



نصرت علیہ السلام علیہ السلام

مخوطی تراشیں

تصنیف
چارلس اسمتھ ایم۔ اے

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن سررشتہ ٹائلف ترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی

۱۳۶۰ شم ۱۳۵۰ قمر ۱۹۴۱

طبع و نشر خانہ عثمانیہ

۱۶۲۷

یہ کتاب میکملن کمپنی کی اجازت سے جن کو حق اشتا
حاصل ہے اردو میں ترجمہ کر کے
طبع و شائع کی گئی ہے

فہرست مضامین

مخروطی تراشیں

نمبر	مضمون
۱	پہلا باب - محد
۲۳	دوسرا باب - خطِ مستقیم
۷۶	دوسرے باب پر مثالیں
۸۳	تیسرا باب - محوروں کی تبدیلی - غیر موسیقی نسبتیں یا چلیبی نسبتیں - در پیچ
۱۰۲	چوتھا باب - دائرہ
۱۴۴	چوتھے باب پر مثالیں
۱۵۱	متفرق مثالیں (۱)
۱۵۵	پانچواں باب - قطع مکانی

صفحہ	مضمون
۱۸۵	خلاف
۱۹۲	پانچویں باب پر مثالیں
۲۰۳	چھٹا باب - قطع ناقص
۲۴۸	چھٹے باب پر مثالیں
۲۹۰	ساتواں باب - قطع زائد
۲۸۴	ساتویں باب پر مثالیں
۲۹۰	متفرق مثالیں (۲)
۲۹۶	آٹھواں باب - مخروطی کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو۔
۳۰۹	آٹھویں باب پر مثالیں
۳۱۵	نواں باب - درجہ دوم کی عام مساوات
-	ہر منحنی جس کی مساوات دوسرے درجہ کی ہو ایک مخروطی ہوتا ہے۔
۳۱۸	ایک مخروطی کے مرکز کے محدود
۳۲۰	ممیز
-	ایک مرکز دار مخروطی کے محدود کا محل اور مقدار
۳۲۲	ایک مکافی کا محور اور وتر خاص
۳۲۳	مخروطیوں کو مرتسم کرنا
۳۲۷	مخروطی کے متعارفوں کی مساوات
۳۲۹	قائم زائد کے لیے شرط

صفحہ	مفہوم
۳۳۱	نویں باب پر مثالیں
۳۳۵	دسواں باب۔ متفرق مسئلے
۳۳۷	محزوطی کے کسی نقطہ پر ماس کی مساوات
۳۳۷	وہ شرط کہ ایک دیا ہوا خط مستقیم ایک محزوطی کا ماس ہو سکے
۳۳۸	ایک محزوطی کے لہجہ سے کسی نقطہ کے قطبی کی مساوات
۳۴۰	مزدوج نقطے اور مزدوج خط
۳۴۱	ایک محزوطی کا کوئی وتر ایک نقطے، دوائس کے قطبی سے
۳۴۳	متوسّعی طور پر منقطع ہوتا ہے
۳۴۳	ایک محزوطی کے قطر
۳۴۵	وہ شرط کہ دو دیے ہوئے خط مزدوج قطروں کے متوازی ہوں
۳۴۶	ایک محزوطی کے مساوی مزدوج قطر
۳۴۹	ایک محزوطی کے وتروں کے قطعے
۳۴۹	مس۔ لہ من۔ ۱۔ ۲۔ ۳۔ لہ ۶۔ ۷۔ ۸۔ اور ۹۔ لہ ۱۰۔
۳۵۲	سے مراد
۳۵۵	کسی نقطہ سے ماسوں کے ایک زوج کی مساوات
۳۵۶	ایک وتر کے سروں کے ماسوں کی مساوات
۳۵۷	مرتب دائرہ کی مساوات
۳۵۹	ایک محزوطی کے چار ماسکے
۳۶۰	ایک محزوطی کے خروج المرکز
۳۶۸	ماسکے اور مرتب
۳۷۰	محزوں کی مساوات
۳۷۰	ایک محزوطی کی مساوات بحوالہ ماس اور محاد

صفحہ	مضمون
۳۷۳	عاد
۳۷۷	متشابه منحنی
۳۸۶	دسویں باب پر مثالیں
۴۰۳	گیارہواں باب - مخروطیوں کے نظام
۴۰۵	ایک مخروطی پانچ نقطوں میں سے
۴۰۶	ایک مخروطی چار نقطوں میں سے
۴۰۸	دو مکافی چار نقطوں میں سے
"	چار نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کا مرکز طریق
	ایک چار زاویوں کے وتر نقطے ایک ایسے مثلث کے
	راس ہوتے ہیں جو کسی حائلہ مخروطی کے لمحاظ سے
۴۱۳	خود قطبی ہو۔
	ایک چار زاویوں کے وتر ایک ایسے مثلث کے ضلع
	ہوتے ہیں جو کسی اندرونی مخروطی کے لمحاظ سے
۴۱۴	خود قطبی ہو۔
۴۱۶	چار ثابت خطوں کو مس کرنے والے مخروطیوں کا مرکز طریق
۴۱۸	محدودوں کے محوروں کو مس کرنے والا مکافی
۴۲۲	ہم بانسکی مخروطی
۴۳۵	لٹھی مخروطی
۴۳۷	کسی نقطہ پر دائرہ اسنخا
۴۴۴	نویں باب پر مثالیں
۴۵۳	بارہواں باب - نفاق اور محاسی مساواتیں

صفحہ	مضمون
۴۵۳	لغاف
۴۵۸	ماسی محدود اور مساواتیں
۴۶۰	لغاف کا مرتب دائرہ
۴۶۲	لغاف کے ماسکے
۴۶۳	محوروں کے طول
۴۶۴	محروطی ہم ماسکی جب کہ $f = (l, m) =$
"	محروطی ہم ماسکی جب کہ $f = (l, m) =$
۴۶۵	ماسی مساوات میں۔ $l = m$ کا مفہوم
"	ان محروطیوں کے مرکوزوں کا طریق جو چار ثابت خطوط l, m, n, p کو
۴۶۶	ان محروطیوں کے مرتب دائرے جو چار دیے ہوئے خطوط l, m, n, p کو
۵۶۸	مس کریں ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔
۴۶۹	بارہویں باب پر مشاطیں
۴۷۷	تیرہواں باب۔ سہ خطی محدود
"	سہ خطی محدودوں کی تعریف
۴۷۹	خطوط مستقیم
۴۸۸	چار نقطوں کے محدود شکل l, m, n, p میں
۴۸۹	چار خطوط کی مساوات شکل l, m, n, p میں
۴۹۲	محروطی جو درجہ دوم کی عام مساوات سے حاصل ہوتے ہیں۔
۴۹۳	ماس اور قطبی
۴۹۶	ایک محروطی کے مرکز کے محدود
"	ایک مکانی کے لیے شرط

مضمون

متعارف
 قائم زائد کے لیے شرط
 حائط دائرہ
 ایک دائرے کے لیے شرطیں
 ماسکے احد مرتبہ
 ربعی محدود
 حائط مخروطی
 اندرونی مخروطی
 مخروطی جو چار ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں
 مخروطی جو چار ثابت خطوں کو مس کرتے ہیں
 مخروطی ایک خود قطبی مثلث کے حوالے سے
 مخروطی دو ماسوں اور وتر تاس کے حوالے سے
 دائرے جن کا تعلق ایک مثلث سے ہوتا ہے
 پیاسکل کا مسئلہ
 بریان کان (Brianchon) کا مسئلہ
 ماسی محدود
 مثلثات ایک مخروطی میں، اور دوسرے مخروطی کے گرد
 اور تیسرے کے لحاظ سے خود قطبی
 اندرونی — حائط کثیر الاضلاع
 تیرہویں باب پر مثالیں

چودھواں باب — متکافی قطبی — نکل
 قطبی مکانی کی تعریف

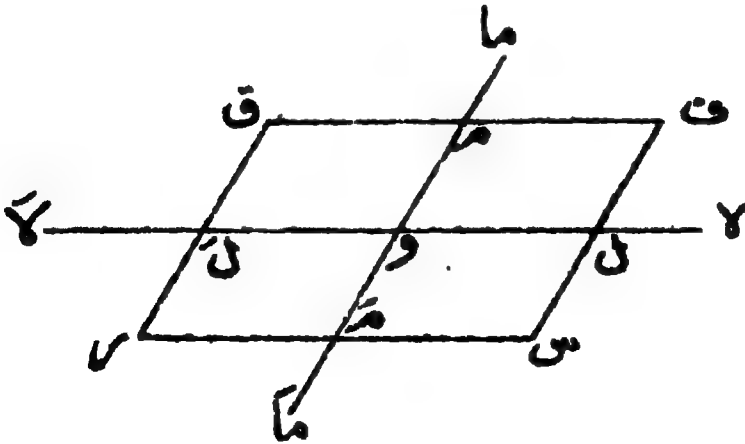
صفحہ	مضمون
۵۶۱	کسی منحنی کا درجہ اور اس کے متکافی کی جماعت ایک ہی ہوتے ہیں
۵۶۲	متکافی مسئلوں کی مثالیں
۵۶۵	دائرہ کے لمحات سے مکافات
۵۶۷	ہم محور دائروں کی مکافات ہم ماسکی محرومیوں میں
۵۶۸	تظلیل - تظلیل کی تعریف
۵۷۵	کسی منحنی کا ظل اُسی درجہ کا ایک منحنی ہوتا ہے
۵۷۶	ماسوں، قلیوں اور قلیوں، متوازی خطوط مستقیم
۵۷۸	کسی خط کو لاتنا ہی پر منظر کیا جاسکتا ہے، اور اس کے ساتھ ہی کسی دوز اوپوں کو دیے ہوئے زاویوں میں منظر کیا جاسکتا ہے۔
۵۸۰	کسی محرومی کو ایک دائرہ میں منظر کیا جاسکتا ہے
۵۸۱	محرومیوں کا ایک نظام جو ایک چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں ہم ماسکی محرومیوں میں منظر کیا جاسکتا ہے
۵۸۲	پنسلوں اور مستوی کی چلیبی نسبتیں تظلیل سے نہیں لیتیں
۵۸۶	چار خطوط کی پنسل کی چلیبی نسبت اس سمت کی چلیبی نسبت کے مساوی ہوتی ہے جو ان خطوط کے قلیوں سے بنتی ہے۔
۵۸۹	ایک محرومی پر کے نقطوں کے غیر موسیقی خواص، اور ایک محرومی کے ماسوں کے غیر موسیقی خواص۔
۵۹۸	ہم رسم سمتیں اور پنسلیں
۵۹۸	چھ دھویں باب پر مثالیں

صفحہ	مضمون
۶۰۲	پندرہواں باب - غیر متغیر
۶۰۳	غیر متغیر
۶۲۳	پندرہویں باب پر مثالیں
۶۲۸	متفرق مثالیں

پہلا باب

محدود

۱۔ اگر ایک مستوی میں دو ثابت خطوط مستقیم لا ولا، ما و ما لیے جائیں اور مستوی کے کسی نقطہ ف میں سے دو خطوط مستقیم ف مر، ف ل علی الترتیب لا ولا، ما و ما کے متوازی کھینچے جائیں جہاں ف ل اور ف مر، لا ولا اور ما و ما سے علی الترتیب ل اور مر پر ملتے ہیں تو نقطہ ف کا محل معلوم ہو سکتا ہے جبکہ خطوط ف مر اور ف ل کے



طول دیے گئے ہوں۔ کیونکہ ہمیں صرف ول، و مر کو علی الترتیب معلومہ
خطوط و ف، ل ف کے مساوی لینا اور متوازی الاضلاع ل و مر ف
کی تکمیل کرنا ہوگا۔

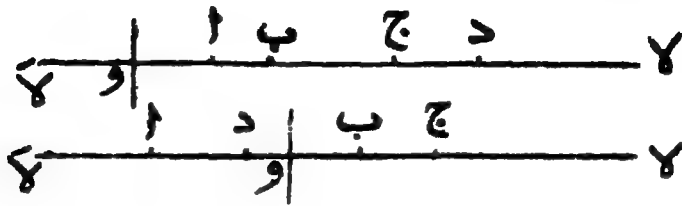
یہ طول مر ف اور ل ف یا ول اور و مر جو اس طرح نقطہ ف
کے محل کو خطوط و لا، و ما کے حوالہ سے مقرر کرتے ہیں نقطہ ف کے محدود
بحوالہ محاور و لا، و ما کہلاتے ہیں۔ محوروں کا نقطہ تقاطع مبدا کہلاتا ہے۔
(۲) جب محوروں کا درمیانی زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے تو محوروں کو قائم محاور کہا
جاتا ہے لیکن جب یہ درمیانی زاویہ، زاویہ قائمہ نہیں ہوتا تو محوروں کو مائل محاور
کہتے ہیں۔

ول کو بالعموم نقطہ ف کا فصلہ اور ل ف کو معین کہتے ہیں۔
وہ محدود جس کی پیمائش محدود لا پر عمل میں آتی ہے حرف لا سے
تعبیر کیا جاتا ہے اور وہ محدود جس کی پیمائش محدود ما پر کی جاتی ہے حرف ما
سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر شکل میں، ول طول کی و اکائیاں اور و مر ب
اکائیاں ہوں تو نقطہ ف پر لا = و اور ما = ب اور اس لیے اس نقطہ کو اکثر
اختصاراً نقطہ (و، ب) کہا جاتا ہے۔

۴۔ فرض کرو کہ و مر کو طول میں و مر کے مساوی اور ول کو ول
کے مساوی لیا گیا ہے اور مر، ل میں سے محوروں کے متوازی خطوط کھینچے
گئے ہیں (دیکھو شکل دفعہ ۱)۔ اب تین نقطوں ق، س، س کے محدود
مقدار میں ف کے محدودوں کے مساوی ہونے لگے۔ پس خطوط ول، ل ف کے
طولوں کا جان لینا ہی کافی نہیں ہے بلکہ وہ سمتیں بھی معلوم ہونی چاہئیں جن میں
ان کی پیمائش کی گئی ہے۔

اگر ایک سمت میں پیمائش کردہ خطوں کو مثبت لیا جائے تو سمت مخالف
میں پیمائش کردہ خطوں کو منفی لینا چاہیے۔ ہم ان خطوں کو جن کی پیمائش و لا
یا و ما کی سمتوں میں کی گئی ہو مثبت سمجھیں گے اور اس لیے وہ خطوط جن کی
پیمائش و لا یا و ما کی سمتوں میں کی گئی ہو منفی متصور ہونے چاہئیں۔

اس خط مستقیم کو جس پر یہ نقطے واقع ہیں لا کا محور فرض کرو اور اس پر کسی نقطہ کو مبداء قرار دو۔ اب اگر $ا = لا$ ، $ب = لا$ ، $ج = لا$ اور $د = لا$ تو



اب = ا + د + د + ب = - + ا + د + ب = - لا + لا

ج = د + ج + و + د = - + ج + و + د = - لا + لا

ب = ج + ج = - لا + لا

ا = ج + ا = - لا + لا

اس لیے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ لا، لا، لا کی تمام قیمتوں کے لیے

$$(- لا + لا) + (- لا + لا) + (- لا + لا) = (- لا + لا) + (- لا + لا) + (- لا + لا)$$

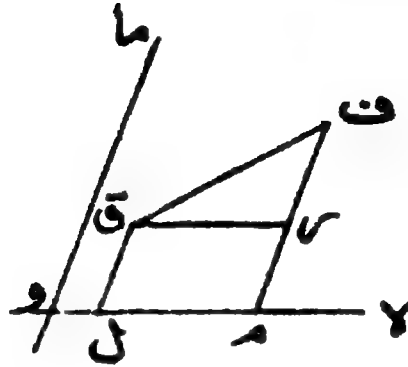
درست ہے۔ خطوط وحدانی دور کرنے سے یہ واضح ہے۔

مثال ۲۔ ایک خط مستقیم پر کوئی تین نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج' ہیں اور ف کوئی اور نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ف \times ا + ج \times ب + ج \times ا + ب \times ج + ج \times ا + ب \times ج = ۰$$

۴۔ دو نقطوں کے درمیانی فاصلہ کو ان کے محدودوں کی رقوم میں بیان کرنا۔ (۴)

فرض کرو کہ ف، نقطہ (لَا، مَآ) اور ق، نقطہ (لَا، مَآ) ہے اور فرض کرو کہ محاورہ زاویہ سے پیمائش ہیں۔



ف مراد ق ل کو دما کے متوازی اور ق مراد کو دلا کے متوازی
کیونکہ شکل۔

تب ول = لا، ل ق = مآ، و مر = لا، مر ف = مآ
علم مثلاً سے

ف ق = ق مآ + مر ف - ق مر × مر ف جم ق مر ف

لیکن ق مآ = ل م = و مر - ول = لا - لا

مر ف = مر ف - مر ف = ل ق - مآ = مآ

اور زاویہ ق مر ف = زاویہ و مر ف = π - زاویہ لا و ما = π - سہ

اس لیے ف ق = (لا - لا) + (مآ - مآ) + (لا - لا) + (مآ - مآ) جم سہ

یا ف ق = $\pm \sqrt{(لا - لا)^2 + (مآ - مآ)^2 + (لا - لا)^2 + (مآ - مآ)^2}$ جم سہ

اگر محاورہ علی القوائم ہوں تو

ف ق = $\pm \sqrt{(لا - لا)^2 + (مآ - مآ)^2}$

ہم مبداء سے ف کے فاصلہ کو راست معلوم کر سکتے ہیں یا اس کو اوپر کے ضابطہ میں لا، ما، = رکھنے سے معلوم کیا جاسکتا ہے چنانچہ

$$\text{رف} = \pm \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ر}^2} \text{ لا، ما، جم سے}$$

یا محاور قائم ہوں تو

$$\text{وف} = \pm \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

(۵) سوائے ان خطوط مستقیم کے جو محوروں کے متوازی ہوں دیگر خطوں کی سمت کے متعلق کوئی قرار داد اختیار نہیں کی گئی ہے کہ کونسی سمت کو مثبت سمجھا جائے۔ اس لیے ہم ف ق یا ق ف میں سے کسی ایک کو مثبت فرض کر سکتے ہیں۔ لیکن اگر ایک ہی خط مستقیم میں تین یا زیادہ نقطے ف، ق، س، ہوں تو ایک ہی سمت کو مثبت سمجھنا چاہیے تاکہ تمام صورتوں میں

$$\text{ف ق} + \text{ق س} = \text{ف س}$$

حسب ذیل مثالوں میں محاور قائم ہیں:-

مثال ۱- ایک شکل میں نقطہ لا = ۱، ما = ۲ اور نقطہ لا = ۳، ما = ۱ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ ان کے درمیان فاصلہ ۵ ہے۔

مثال ۲- ان خطوں کے طول معلوم کرو جو نقطوں کے حسب ذیل جوڑوں کو ملاتے ہیں:

$$(۱) (۱-۱) \text{ اور } (۱-۱)' (۲) (۲-۲) \text{ اور } (۲-۲)' (۳) (۳-۳) \text{ اور } (۳-۳)'$$

$$(۴) (۴-۴) \text{ اور } (۴-۴)'$$

مثال ۳- ثابت کرو کہ تین نقطے (۱، ۱)، (۱، -۱) اور (۱، ۱) ایک متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

مثال ۴- ثابت کرو کہ چار نقطے (۱، ۰)، (۰، ۲)، (۲، ۰) اور (۰، ۰) ایک مستطیل کے راس ہیں۔

مثال ۵۔ ایک ہی شکل میں نقطوں (۰-۱) (۱۴۰) (۳۰۰) اور (۱۲۰) و مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ وہ ایک مربع کے راس ہیں۔
یہی بات نقطوں (۱۰۲) (۳۰۳) (۵۰۲) اور (۳۰۰) کی صورت میں ثابت کرو۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ چار نقطے (۱۰۲) (۳۰۵) (۴۰۳) اور (۳۰۱) ایک توازی الاضلاع کے راس ہیں۔

مثال ۷۔ اگر نقطہ (لا) دو نقطوں (۳۰۳) اور (۲-۱) سے مساوی فاصلے پر ہو تو ثابت کرو کہ لا = ۱۳ + ۵

$$[\text{کیونکہ } (۲-۱) + (۳-لا) = (۲-۱) + (۱-لا) + (۲+لا)]$$

اور اس سے مطلوب نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۱۰۰۰) تین نقطوں (۰-۱) (۳۰۳) اور (۳۳۱۸) سے مساوی فاصلے پر ہے۔

مثال ۹۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۰۰۰) (۱۰۰۳۲) اور (۰۰۳۲) سے

جواب: (۱۱-۲۱)

سادی فاصلے پر ہو۔

مثال ۱۰۔ تین مثلث کے اضلاع کے طول معلوم کرو جس کے راس

(۸۰۱۰) (۳۰۱۳) اور (۳۰۵۰۴) ہیں۔

ثابت کرو کہ نقطہ (۲۰۲۰۶۱۰۴) ہر راس سے فاصلہ ۶۱۵ پر ہے۔

جواب: اضلاع ۱۳ ۱۲ ۵۰ ہیں۔

۵۔ اُس نقطہ کے محدود معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے

(۶) نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کی تقسیم ایک معلومہ نسبت میں کرے۔

فرض کرو کہ ف کے محدود لا، ب اور ق کے محدود لا، ب ہیں اور فرض کرو

کہ سا (لا، ب) وہ نقطہ ہے جو ق کو نسبت ۱:۲ میں تقسیم کرتا ہے۔

اگر خط نسبت ک : - ک میں خارجاً منقطع ہو تو

ل : ن = م = ک : - (ک : -)

$$\text{اور اس لیے} \quad \frac{\text{ک} - \text{لا}}{\text{ک} - \text{ک}} = \frac{\text{ک} - \text{لا}}{\text{ک} - \text{ک}} = \frac{\text{ک} - \text{لا}}{\text{ک} - \text{ک}}$$

مندرجہ بالا نتیجے درست رہتے ہیں خواہ محدودوں کے محوروں کے

درمیان کوئی زاویہ ہو۔ لیکن بہت سی صورتوں میں ضابطے ذرا پیچیدہ ہو جاتے ہیں جب کہ محاورہ علی القوائم نہ ہوں۔

ہم آئندہ محوروں کو تمام صورتوں میں علی القوائم سمجھنے کے
الّا آنکہ اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔

مثال ۱۔ اس خط کا وسطی نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۱، ۳) (۵، -۵) کو ملاتا ہے۔

$$\text{لا} = \frac{\{(-5) + 3\}}{2} = -1 = \text{م} = \frac{(4 + 1)}{2} = 2.5$$

مثال ۲۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۳، ۲) اور (۵، -۳) کو ملانے والا
خط کی تقسیم نسبت ۲ : ۱ میں کرتا ہے۔

$$\text{لا} = \frac{1 \times 5 + 2 \times 2}{2 + 1} = 3 = \text{م} = \frac{1 \times (-3) + 2 \times 3}{2 + 1} = 1$$

مثال ۳۔ نقاط ا، ب، ج علی الترتیب (۱، ۲)، (۲، ۱)، اور (۱، ۱)

ہیں۔ ج، ب، ا کے نقاط وسطی علی الترتیب د، ع، ف ہیں۔
نقطہ گ کے محدود معلوم کرو جو د کو اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ ۲ : ۱ دگ = گ ا
د کے محدود

$$\text{لا} = \frac{(1 + 1)}{2} = 1 = \text{م} = \frac{(2 + 2)}{2} = 2$$

ہیں اور اس لیے گ کے محدود

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 1 + 2 \times (1 + 1)}{2 + 1} = 1$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 1 + 2 \times (1 + 1)}{2 + 1} = 1$$

ہیں۔

اس نتیجہ کے تشاکل سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ گ خطوط ج ب اور ج پر بھی واقع ہے اور نیز یہ کہ ۲ ع گ = گ ب اور ۲ ف گ = گ ج کسی مثلث کے خطوط وسطی کے نقطہ تقاطع کو مثلث کا مرکز ہندسی کہتے ہیں اور ہم اوپر کی مثال سے یہ دیکھتے ہیں کہ اگر ایک مثلث کے راس (۱، ۱)، (۱، ۲)، (۲، ۱) ہوں تو اس کے مرکز ہندسی کے عدد $\frac{1}{3}$ (۱، ۱ + ۱ + ۱) $\frac{1}{3}$

ہیں۔

مثال ۴۔ اس مثلث کا مرکز ہندسی معلوم کرو جس کے راس علی الترتیب (۲، ۲)، (۲، ۵) اور (۵، ۲) ہیں۔ جواب: (۳، ۰)

مثال ۵۔ اس مثلث کا مرکز ہندسی معلوم کرو جس کے راس علی الترتیب (۵، ۳)، (۳، ۵) اور (۲، ۱۰) ہیں۔ جواب: (۱، ۲)

مثال ۶۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو (۳، ۵) اور (۵، ۳) کو ملانے والے خط کی تقسیم نسبت ۵:۳ میں کرتا ہے۔ جواب: $(\frac{16}{8}, \frac{15}{8})$

مثال ۷۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو (۱، ۲) اور (۵، ۳) کو ملانے والے خط

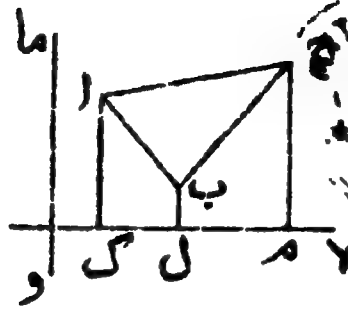
کی تقسیم خارجی طور پر نسبت ۲:۳ میں کرتا ہے۔ جواب: (۰، ۷)

۶۔ مثلث کے رقبہ کو اس کے راسوں کے محددوں

کی رقوم میں بیان کرنا۔ (۸)

فرض کرو کہ راسوں ۱، ۲، ۳ کے عدد علی الترتیب (۱، ۱)، (۱، ۲)، (۲، ۱)

(لا، لا) (لا، لا) ہیں۔



خطوط اک، ب، ل، اور ج ہر کو محور ما کے متوازی کھینچو حسب شکل
 ۵ اب ج = مرج اک - ک اب ل - ل ب ج مر

اب مرج اک = ۵ مرج ا + ۵ اک مر

$$= \frac{۱}{۴} ک مر \times مرج + \frac{۱}{۴} ک مر \times ک$$

$$= \frac{۱}{۴} (لا - لا) (لا + لا)$$

اسی طرح ک اب ل = $\frac{۱}{۴} (لا - لا) (لا + لا)$

اور ل ب ج مر = $\frac{۱}{۴} (لا - لا) (لا + لا)$

$$۵ اب ج = \frac{۱}{۴} \{ (لا - لا) (لا + لا) + (لا - لا) (لا + لا) + (لا - لا) (لا + لا) \}$$

یا اُن رقموں کو ترک کرنے سے جو ایک دوسرے کو خارج کرتی ہیں

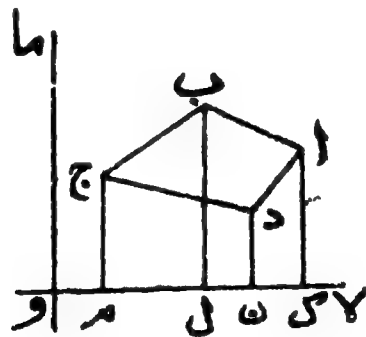
$$۵ اب ج = \frac{۱}{۴} \{ لا لا - لا لا + لا لا - لا لا + لا لا - لا لا \}$$

۱	۲	۳	۴
۱	۲	۳	۴
۱	۲	۳	۴

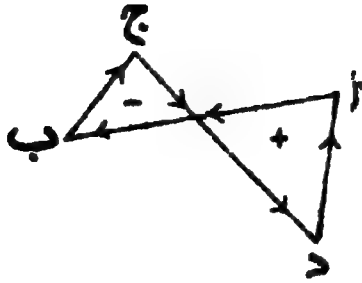
مثلث کے رقبہ کا یہ جملہ مثبت ہوگا اگر اس ایسی ترتیب میں ہوں کہ مثلث کے گرد چلنے پر رقبہ ہمیشہ بائیں جانب رہے یا اگر گھیرے اب ج ا کو طے کرنے کی ترتیب خلاف سمت ساعت ہو۔ جب کبھی راسوں کے محدودوں کے اندراج سے رقبہ کے لیے منفی جملہ حاصل ہو تو مثلث کے گرد چلنے کی ترتیب کو الٹ دیا جائے۔

۹۔ ذواربعۃ الاضلاع کے رقبے کو اس کے راسوں کے محدودوں کی رقوم میں بیان کرنا جبکہ اس ترتیب وار دیے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ اس ترتیب وار ا، ب، ج، د ہیں اور ان کے محدود علی الترتیب (ا، ب)، (ب، ج)، (ج، د) اور (د، ا) ہیں۔



اک، ب، ج، د کو محور کے متوازی کھینچو حسب شکل۔



مثال ۱۔ اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس (۱، ۲) (۳، ۴) اور (۵، ۲) ہیں۔ نیز اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس (۴، ۵) (۶، ۵) اور (۱، ۳) ہیں۔
جواب: ۲، ۵

مثال ۲۔ اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس 'ا'، 'ب'، 'ج' علی الترتیب (۳، ۲) (۵، ۴) اور (۲، ۶) ہیں۔ جواب: ۵۔
[منفی علامت اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' گردش کی اُس ترتیب میں ہے جو موافق سمت ساعت ہے اور یہ نقطوں کو مرتب کرنے سے معلوم ہو سکتا ہے۔ اکثر صورتوں میں رقبہ کی صرف مطلق قیمت مطلوب ہوگی۔]
مثال ۳۔ 'ا'، 'ب'، 'ج' علی الترتیب نقطے (۵، ۱) (۱، ۳) (۵، ۵) ہیں اور 'ب'، 'ج'، 'ا' کے نقاط وسطی 'د'، 'ع'، 'ف' ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$۵ \text{ ا ب ج} = ۵۴ \text{ د ع ف}$$

مثال ۴۔ اُس ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس ترتیب وار (۲، ۱) (۲، ۶) (۳، ۵) اور (۴، ۳) ہیں۔
نیز اُس ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ جس کے راس (۲، ۲) (۲، ۲) (۳، ۲) (۳، ۲) ہیں۔
جواب: ۱۱، ۲۰

مثال ۵۔ اُس ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ترتیب وار (۲، ۴) (۵، ۳) (۵، ۱) اور (۲، ۴) ہیں۔
جواب: صفر

نقطوں کو قسم کرو اور نتیجہ کو ظاہر کرنے کے لیے اب ج د ا کھینچو۔
رقبہ معلوم کرو جب کہ نقطوں کو ترتیب 'ا' 'ب' 'ج' میں لیا گیا ہو۔

جواب: ۵۶

مثال ۶۔ نقطہ 'ا' 'ب' 'ج' د علی الترتیب (۴،۲) (۲،۲) (۲،۸)

اور (۶،۴) ہیں۔ اب ج د کا رقبہ معلوم کرو۔ نیز نقطوں کو ترتیب 'ا' 'ج' 'ب' د میں اور ترتیب 'ا' 'ب' 'ج' د میں لے کر ثابت کرو کہ 'ج' د کے متوازی ہے اور 'ب' ج د کے نہ۔

جواب: ۱۲

۸۔ اگر ایک منحنی کی تعریف ایک ایسی ہندسی خاصیت کی بناء پر کی گئی ہو جو اس کے تمام نقطوں میں مشترک ہو تو کوئی نہ کوئی جبری رشتہ موجود ہوگا (۱) جو منحنی کے تمام نقطوں کے محدودوں سے پورا ہوگا اور ان نقطوں کے علاوہ دیگر نقطوں سے پورا نہیں ہوگا۔ اس جبری رشتہ کو منحنی کی مساوات کہتے ہیں۔

اس کے برعکس وہ تمام نقطے جو ایک معلوم جبری مساوات کو پورا کرتے ہیں ایک منحنی پر واقع ہوتے ہیں جس کو اس مساوات کا طریق کہتے ہیں۔ مثلاً اگر ایک خط مستقیم کو محور و ما کے متوازی اس سے فاصلہ ۱ پر کھینچا جائے تو اس خط پر کے نقطوں کے فاصلے سب کے سب مستقل مقدار ۱ کے مساوی ہونگے اور کسی اور نقطہ کا فاصلہ ۱ کے مساوی نہیں ہوگا۔ پس لا = ۱ اس خط کی مساوات ہوگی۔

اس کے برعکس وہ خط جو محور ما کے متوازی اس سے فاصلہ ۱ پر کھینچا گیا ہو مساوات لا = ۱ کا طریق ہے۔

نیز اگر ایک دائرہ پر کے کسی نقطہ ف کے محدود لا، ما ہوں اور اس کا مرکز مبدا و پر ہو اور اس کا نصف قطر ج ہو تو فاصلہ و ف کا مربع لا + ما ہوگا [دفعہ ۴]۔ لیکن و ف دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اس لیے دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدود لا، ما رشتہ لا + ما = ج کو پورا کرتے ہیں یعنی دائرہ کی مساوات لا + ما = ج ہے۔

اس کے برعکس مساوات $لا + ما = ج$ کا طریق ایک واضح ہے جس کا مرکز مبدا ہے اور جس کا نصف قطر ج کے مساوی ہے۔

اس منحنی کا تقریبی خاکہ جس کو ایک جبری مساوات سے تعبیر کیا گیا ہو اس طرح کھینچا جاسکتا ہے کہ لایا یا کو قیٹوں کا ایک سلسلہ دیا جائے اور اس کے جواب میں مایا یا کی قیٹیں محسوب کی جائیں اور پھر مربع دار کا غز پر نقطوں کا وہ سلسلہ مرتب کیا جائے جن کے محدد اس طریقہ پر حاصل ہوئے ہوں جبکہ مقابلہ میں بہت بڑا وقت ایسی غیر لچک مشق پر صرف کیا جاتا ہے حالانکہ یہ کچھ زیادہ مفید بھی نہیں۔

علم ہندسہ تحلیل میں وہ مساوات معلوم کی جاتی ہے جو ان تمام نقطوں کے محددوں سے پوری ہوتی ہے جو ایک منحنی پر واقع ہوں جس کی تعریف کسی ہندسی خاصیت کی بناء پر کی گئی ہو۔ نیز منحنی کا محل اور اس کے خواص اس مساوات سے اخذ کیے جاتے ہیں جو منحنی پر کے تمام نقطوں کے محددوں سے پوری ہوتی ہے۔

ایک مساوات کو n ویں درجہ کی مساوات کہتے ہیں جب اس کو اس طرح تکمیل کرنے کے بعد کہ متغیروں کے قوت نما چھوٹے سے چھوٹے ممکن صحیح اعداد ہوں اس میں بڑے سے بڑے اعداد کی رقم (یا ارقام) n اعداد کی ہو (۱۲) مثلاً مساواتیں $لا + لا + ب + لا + ج = ۰$ ، $لا + لا + لا + ب + ج = ۰$ ، $لا + لا + لا + لا + ب + ج = ۰$ (جس کو منطقی بنانے پر $لا + لا + لا + لا + لا + لا + ب + ج = ۰$ ہوجاتی ہے) سب کی سب دوسرے درجہ کی ہیں۔

مثال ۱۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو نقطوں (۳، ۴) اور (۵، ۲) سے اس کے فاصلے مساوی رہتے ہیں۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $لا - لا = ۱$

مثال ۲۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں (۰، ۰) اور (۰، ۰) سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل (۲ ج) رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $لا + ما = ج - و$

مثال ۳۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں (۱، ۲) اور (۳، ۴) سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا فرق مستقل (رج) رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $12 = 11 + 1 = 12$

مثال ۴۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقطہ (۳، ۴) سے اس کا فاصلہ اس فاصلہ کا دوگنا رہتا ہے جو اس کو نقطہ (۱، ۲) سے ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $12 = 11 + 1 = 12$

مثال ۵۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اس کا فاصلہ مبدا سے اس کے فاصلہ کا نصف رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $12 = 11 + 1 = 12$

مثال ۶۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اس کا فاصلہ نقطہ (۱، ۲) سے اس کے فاصلہ کے مساوی رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $12 = 11 + 1 = 12$

مثال ۷۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ طول کی ۳ اکائیاں رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $12 = 11 + 1 = 12$

مثال ۸۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اس کا فاصلہ محور سے اس کے فاصلے سے یقیناً ۲ کے بڑا رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
جواب: $12 = 11 + 1 = 12$

مثال ۹۔ ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۴) سے فاصلہ ۵ پر رہتا ہے۔
جواب: $12 = 11 + 1 = 12$

مثال ۱۰۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۴) سے فاصلہ ۵ پر اور نقطہ (۱۲، ۵) سے فاصلہ ۱۳ پر ہیں۔

[یہ نقطہ حسب ذیل دو مساواتوں کو پورا کرتے ہیں:

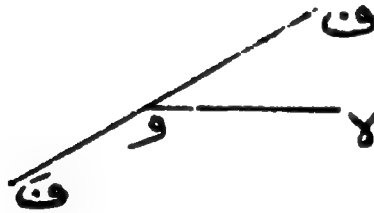
$$[12 = (12-6)^2 + (5-4)^2 \quad , \quad 13 = (12-6)^2 + (5-4)^2]$$

جواب: (۱۲، ۵) اور (۱۲، ۵)

۹۔ دفعات ۱ اور ۲ میں جو محدود استعمال ہوتے ہیں ان کو کارڈیں محدود کہتے ہیں کیونکہ ان کو سب سے پہلے ڈیکارٹ نے استعمال کیا تھا۔ لیکن ایک مستوی پر کسی نقطہ کے محل کو دوسرے طریقوں سے بھی متعین کیا جاسکتا ہے۔ ان میں سے ایک مفید طریقہ حسب ذیل ہے:

قطبی محدود

اگر ایک نقطہ کو مبداء لیا جائے اور اس میں سے ایک ثابت خط مستقیم ولا کھینچا جائے تو کسی نقطہ ف کا محل معلوم ہوگا اگر زاویہ ولا وف اور فاصلہ وف معلوم ہوں۔



ان کو نقطہ ف کے قطبی محدود کہا جاتا ہے۔
 طول وف کو سمتی نصف قطر کہتے ہیں اور اسے بالعموم ر سے تعبیر کرتے ہیں۔ زاویہ ولا وف کو سمتی زاویہ کہتے ہیں اور اسے ط سے تعبیر کرتے ہیں۔
 اس زاویہ کو مثبت سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمائش ولا سے اُس سمت کے خلاف کی گئی ہو جس میں گھری کی سوئیاں گردش کرتی ہیں۔
 سمتی نصف قطر کو مثبت سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمائش و سے

اس خط پر کی گئی ہو جو سمتی زاویہ کی تحدید کرتا ہے اور منفی سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمائش مخالف سمت میں کی گئی ہو۔

گرف و کوٹ تک خارج کیا جائے اور دف مقدار میں دف کے مساوی ہو اور اگر ف کے محدود راہ ہوں تو ف کے محدود راہ یا راہ + π ہونگے۔

۱۰۔ دو نقطوں کا جن کے قطبی محدود دیے گئے ہوں درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دو نقطوں فاق کے محدود راہ اور راہ ہیں۔ تب علم مثلث سے

$$فاق = دف + وق - ۲ وف \times وق \text{ جم ف وق}$$

لیکن وف = راہ وق = راہ اور زاویہ ف وق = زاویہ لا وق (۱۳)

۔ زاویہ لا وف = راہ۔ راہ

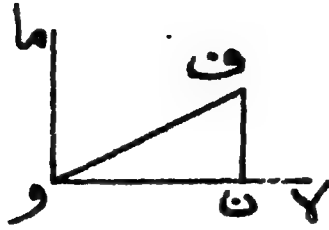
$$\therefore فاق = راہ + راہ - ۲ راہ \text{ جم (راہ راہ)}$$

ایک دائرہ کی قطبی مسادات جب کہ دائرہ کا مرکز نقطہ (راہ راہ) پر ہو اور اس کا نصف قطر ج ہو ج = راہ + راہ - ۲ راہ جم (راہ راہ) ہے جہاں دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدود راہ ہیں۔

۱۱۔ قائم محدودوں کو قطبی محدودوں میں تبدیل کرنا۔
اگر وہیں سے ایک خط و ماہ ولا پر عمود کھینچا جائے اور ولا و ماہ کو قائم محاور سمجھا جائے تو

$$لا = ون = وف \text{ جم لا وف} = رجم راہ$$

$$ماہ = ن ف = وف \text{ جب لا وف} = رجب راہ$$



مثال ۱۔ اُن نقطوں کے قائم محدود کیا ہیں جن کے قطبی محدود علی الترتیب $(\frac{\pi}{3}, 1)$ ، $(\frac{\pi}{3}, 2)$ اور $(\frac{\pi}{3}, -2)$ ہیں۔

جواب: $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ ، $(-2, 2)$ ، $(-2, -2)$

مثال ۲۔ اُن نقطوں کے قطبی محدود کیا ہیں جن کے قائم محدود علی الترتیب $(1, -1)$ ، $(1, 1)$ اور $(2, 3)$ ہیں۔

جواب: $(\frac{\pi}{3}, 2)$ ، $(\frac{\pi}{3}, 5)$ ، $(\frac{\pi}{3}, -5)$

مثال ۳۔ اُن نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرو جن کے قطبی محدود $(\frac{\pi}{2}, 2)$ اور $(\frac{\pi}{2}, 4)$ ہیں۔

جواب: $2\sqrt{2}$

مثال ۴۔ اُن نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرو جن کے قطبی محدود $(\frac{\pi}{2}, 2)$ اور $(\frac{\pi}{2}, 4)$ ہیں۔

جواب: $2\sqrt{2}$

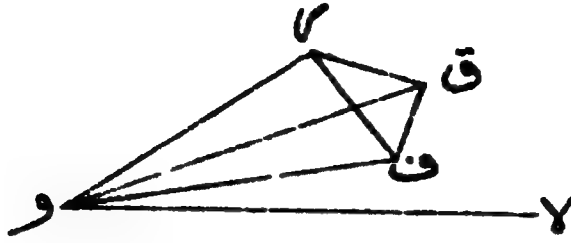
مثال ۵۔ اُس نقطہ کا طریق معلوم کرو جو نقطہ $(\frac{\pi}{2}, 5)$ سے فاصلہ ۳ پر رہے۔

جواب: $2 - 10$ جب $2 + 10 = 12$

مثال ۶۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کا فاصلہ نقطہ $(\frac{\pi}{2}, 3)$ سے $2 - 6$ رہے۔

جواب: $2 - 6$ جب $2 + 6 = 8$

۱۲۔ ایک مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کے راسوں کے قطبی محدود دیے گئے ہوں۔ (۱۵)



فرض کرو کہ 'ق'، 'س' کے معد علی الترتیب (ر، طم) (ر، طم) (ر، طم) ہیں۔

تب مثلث 'ق' 'س' کا رقبہ = ۵ وف 'ق' + ۵ وق 'س' - ۵ وف 'س'

اور ۵ وف 'ق' = $\frac{1}{4}$ وف \times وق جب ف وق

$$= \frac{1}{4} \text{ ر } \text{ ر } \text{ جب (طم - طم) }$$

اسی طرح ۵ وق 'س' = $\frac{1}{4}$ ر $\text{ ر } \text{ جب (طم - طم) }$

اور ۵ وف 'س' = $\frac{1}{4}$ ر $\text{ ر } \text{ جب (طم - طم) } = \frac{1}{4} \text{ ر } \text{ ر } \text{ جب (طم - طم) }$

\therefore ۵ فاق 'س' = $\frac{1}{4}$ ر $\text{ ر } \text{ جب (طم - طم) } + \frac{1}{4}$ ر $\text{ ر } \text{ جب (طم - طم) } + \frac{1}{4}$ ر $\text{ ر } \text{ جب (طم - طم) }$

اگر مثلث 'ق' کے رقبہ کو مثبت خیال کیا جائے جب کہ گھیرا 'ق' و
منلاف سمت ساعت طے ہو اور منفی جبکہ موافق سمت ساعت طے ہو اور اسی طرح دوسرے
مثلثوں کے متعلق سمجھا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ تمام صورتوں میں

$$۵ فاق 'س' = ۵ وف 'ق' + ۵ وق 'س' + ۵ دس 'ف'$$

نیز ذرا بچہ الاضلاع 'ق' 'س' کے لیے تمام صورتوں میں

$$\text{رقبہ فاق 'س' = ۵ وف 'ق' + ۵ وق 'س' + ۵ دس 'ف' + ۵ دس 'ف'}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ ر } \text{ ر } \text{ جب (طم - طم) } + \frac{1}{4} \text{ ر } \text{ ر } \text{ جب (طم - طم) } + \frac{1}{4} \text{ ر } \text{ ر } \text{ جب (طم - طم) }$$

$$+ \frac{1}{p} r r \text{ جب } (p - p) + \frac{1}{p} r r \text{ جب } (p - p)$$

$$\text{اب } r r \text{ جب } (p - p)$$

$$= r r \text{ (جب } p \text{ جم } p - \text{ جب } p \text{ جم } p)$$

$$= p - p \text{ ، دفعہ ۱۱ سے}$$

پس حسب دفعہ ،

$$\text{رقبہ فاقی سراسر} = \frac{1}{p} \{ (p - p - p) + (p - p - p) + (p - p - p) \}$$

$$+ (p - p - p)$$

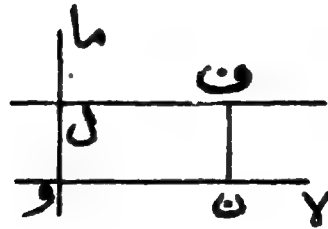


(۱۶)

دوسرا باب

خطِ مستقیم

۱۳۔ ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو محدودوں کے
محوروں میں سے ایک کے متوازی ہو۔
فرض کرو کہ l ق ایک خطِ مستقیم ہے جو محور la کے متوازی ہے اور
محور سے نقطہ l پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ $ol = b$ ۔



فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ f کے محدود (la) ہیں۔
اب سین n $f = ol$

$$+ \frac{1}{4} \text{ ر ر جب (طہ - طہ) } + \frac{1}{4} \text{ ر ر جب (طہ - طہ) }$$

$$\text{اب ر ر جب (طہ - طہ)}$$

$$= \text{ر ر (جب طہ جم طہ - جب طہ جم طہ)}$$

$$= \text{لا طہ - لا طہ ، دفعہ اسے}$$

پس حسب ذیل

$$\text{رقبہ فقہی} = \frac{1}{4} \{ (\text{لا طہ - لا طہ}) + (\text{لا طہ - لا طہ}) + (\text{لا طہ - لا طہ}) \} + (\text{لا طہ - لا طہ})$$

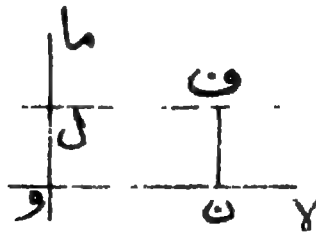


(۱۶)

دوسرا باب

خطِ مستقیم

۱۳۔۔۔ ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو محدودوں کے
 گہروں میں سے ایک کے متوازی ہو۔
 فرض کرو کہ ل ق ت ایک خطِ مستقیم ہے جو محور لا کے متوازی ہے اور
 نقطہ ل ق ت ملتا ہے۔ فرض کرو کہ ول = ب۔



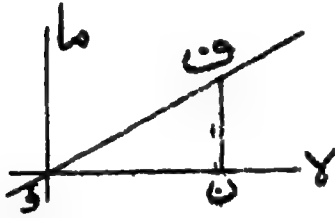
نیز کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدود (لا، ما) ہیں۔
 ب بین ن ف = ول

ہیں $ما = ب$ خط کی مساوات ہے۔
 اس طرح $لا = و$ اس خط کی مساوات ہے جو عورما کے متوازی ہے اور
 اس سے فاصلہ $و پر ہے$ ۔

۱۴۔ ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو مبدا

سے گزرے۔

فرض کرو کہ مبدا میں سے گزرنے والا ایک خط مستقیم $و ف$ ہے اور
 فرض کرو کہ زاویہ $لا و ف$ کا $ما س = م$

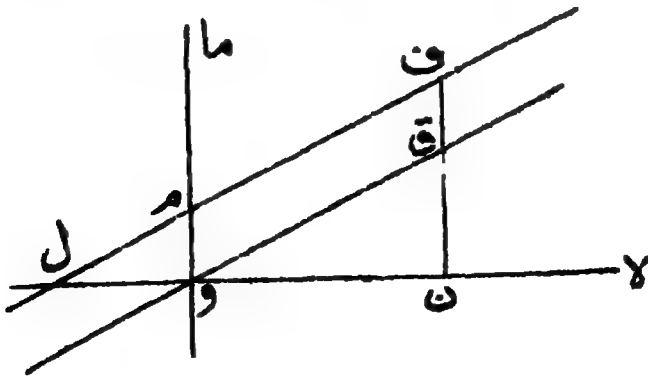


فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ $ف$ کے محدود 'لا' ما ہیں۔

اب $ن ف = م س$ $ن و ف \times و ن$

پس $ما = م لا$ مطلوبہ مساوات ہے۔

۱۵۔ کسی خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ ل طرف ایک خط مستقیم ہے جو محوروں سے تعامل اور مر پر ملتا ہے۔

فرض کرو $و = ج$ اور $م = ول = م$
فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے بعد لا، ما ہیں۔
ف ن کو محور ما کے متوازی اور وق کو خط ل طرف کے متوازی
کھینچو حسب شکل۔

اب $ن = ف = ن + ق + ق + ف$

$= ون + من + وق + و م$

لیکن $ن = ف = ما، ون = لا، و م = ج$ اور $من = وق = م = ول = م$

$ما = م + لا + ج \dots \dots \dots (۱)$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

جب کوئی مخصوص خط مستقیم زیر بحث ہوتا ہے تو مفادیرم اور ج مستقل رہتی ہیں اور اس لیے ان کو مستقل کہتے ہیں۔ ان میں سے م اس زاویہ کا تماس ہے جو محور لا کی مثبت سمت اور خط کے اس حصہ کے درمیان ہوتا ہے جو محور لا کے اوپر ہے اور ج محور ما پر کا مقلوعہ ہے۔

مستقلات م اور ج کو مناسب قیمتیں دے کر مساوات $ما = م + لا + ج$ سے کسی خط مستقیم کو تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً وہ خط مستقیم جو محور ما کو مبدا سے اکائی فاصلہ پر قطع کرتا ہے اور محور لا سے $م$ کا زاویہ بناتا ہے مساوات $ما = لا + ا$ سے تعبیر ہوگا۔

ہم (۱) سے دیکھتے ہیں کہ کسی خط مستقیم کی مساوات پہلے درجہ کی ہوتی ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ پہلے درجہ کی ہر مساوات ایک

خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔
پہلے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰ \dots\dots\dots (۱)$$

ہے۔ اب یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ مساوات ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے یہ دکھانا کافی ہے کہ اگر طریق پر کے کسی تین نقطوں کو ملایا جائے تو اس طریقہ پر بنے ہوئے مثلث کا رقبہ صفر ہوگا۔

فرض کرو کہ طریق پر کوئی تین نقطے 'ف'، 'ق'، 'س' ہیں اور ان کے محدود علی الترتیب (لا، ما)، (لا، نا)، اور (لا، آ) ہیں۔ پس نقطوں کے محدودوں کو مساوات (۱) پوری کرنی چاہیے، اس لیے

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

اب 'ا'، 'ب'، 'ج' کو سا قفا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۰ = \begin{vmatrix} ۱ & لا & ما \\ ۱ & لا & ما \\ ۱ & لا & ما \end{vmatrix}$$

اس لیے مثلث کا رقبہ صفر ہے (صفحہ ۶) اور اس لیے طریق پر کے کوئی

تین نقطے ایک خط مستقیم پر ہونے چاہئیں۔

اس لیے مساوات ۱ + لا + ب + ما + ج = ۰ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

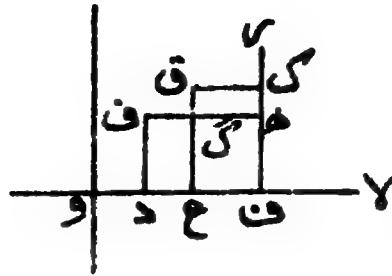
دوسرا ثبوت: اوپر کی مساواتوں سے بذریعہ عمل تفریق حاصل ہوتا ہے

$$۱ (لا - لا) + ب (ما - ما) = ۰$$

$$۱ (لا - لا) + ب (ما - ما) = ۰ \quad \text{اور}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{لا - لا}{ما - ما} = \frac{لا - لا}{ما - ما}$$

(۱۹)



$$\text{یعنی بموجب شکل } \frac{\text{ف گ}}{\text{ق ق}} = \frac{\text{ف}}{\text{ق}}$$

اس لیے مثلثات ف گ ق، ف م م متشابه ہیں اور اس لیے ف ق م ایک خط مستقیم ہے۔

مساوات ۱ لا + ب + م = ج۔ میں تین مستقلات نظر آتے ہیں حالانکہ دفعہ ۱ میں حاصل شدہ مساوات میں صرف دو مستقلات ہیں۔ لیکن اگر کسی نقطہ کے محدود لا، م، مساوات لا + ب + م = ج کو پورا کرتے ہوں تو وہ اس مساوات کو بھی پورا کرینگے جو کسی مستقل سے ضرب دینے یا تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ چنانچہ اگر ہم ب سے تقسیم کریں تو ہم مساوات کو شکل م = $\frac{ج}{ب}$ - لا + $\frac{ب}{ب}$ میں لکھ سکتے ہیں اور اس میں صرف دو مستقلات - $\frac{ج}{ب}$ اور - $\frac{ب}{ب}$ ہیں اور یہ مساوات م = لا + ج کے مستقلات م اور ج کے متناظر ہیں۔

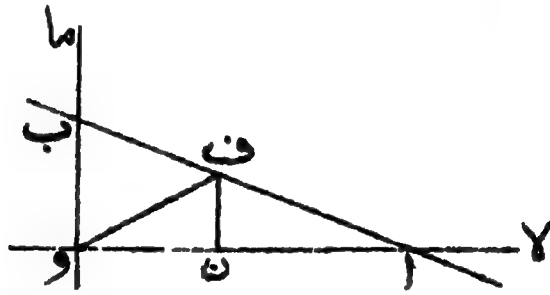
مثال ۱۔ اس خط کی مساوات لکھو جو محور لا کے ساتھ ۳۵ کا زاویہ بنائے اور محور ماکو مبداء سے فاصلہ ۳ پر قطع کرے۔ جواب: م = لا - ۳
مثال ۲۔ خط مستقیم ۳ لا + م = ۴ کی مساوات کو شکل م = $\frac{۴}{۳}$ - لا + $\frac{۳}{۳}$ میں لکھو۔ جواب: م = $\frac{۴}{۳}$ - لا + $\frac{۳}{۳}$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ وہ خط مستقیم جو محور لا کے ساتھ سن ۵ کا زاویہ بناتا ہے اور محور ماکو نقطہ (۵-۶۰) پر قطع کرتا ہے نقطہ (۰،۱) میں سے

گزرتا ہے۔

۱۶۔ ایک خط مستقیم کی مساوات کو ان مقطوعوں کی رقوم میں معلوم کرنا جو وہ محوروں پر قطع کرتا ہے۔ (۲۰)

فرض کرو کہ l اور b وہ نقطے ہیں جہاں خط مستقیم محوروں کو قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ $u = 1$ و $u = b = 1$ ۔
فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ f کے محدد l ، u ہیں۔



ف n کو محور u کے متوازی کھینچو اور u کو ملاؤ۔

اب $u = u + f + u = b + u = 1$

یا $u + b = l = 1$

یا $1 = \frac{u}{b} + \frac{l}{u}$

اس مساوات کو مشکل

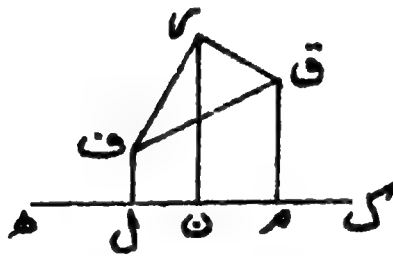
$l + u = 1$

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں l اور u محوروں پر کے مقطوعوں کے متکافی ہیں۔

ظل

۱۸۔ اگر کسی خط مستقیم کے سروں ف اور ق سے کسی دوسرے خط مستقیم ہک پر عمود فل اور ق مر کیونچے جائیں تول مر کو ف ق کا ظل، ہک پر کہتے ہیں۔

(۲۱) فرض کرو کہ کوئی اور نقطہ سا ہے اور ہک پر اس کا ظل ن ہے تو چونکہ تمام صورتوں میں ل مر + مر ن = ل ن اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی خط پر ف ق اور ق مر کے ظلوں کا مجموعہ اس خط پر ف مر کے ظل کے مساوی ہوتا ہے۔



اسی طرح کسی خط پر ا ب، ب ج، ج د، ف ق کے ظلوں کا مجموعہ ا ق کے ظل کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز کسی خط پر ایک بند کثیر الاضلاع کے ضلعوں کے ظلوں کا مجموعہ صفر کے مساوی ہوتا ہے۔

اگر ن ضلعوں والے منتظم کثیر الاضلاع کا ایک ضلع ایک معلوم خط کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو دوسرے اضلاع ترتیب وار زاویے

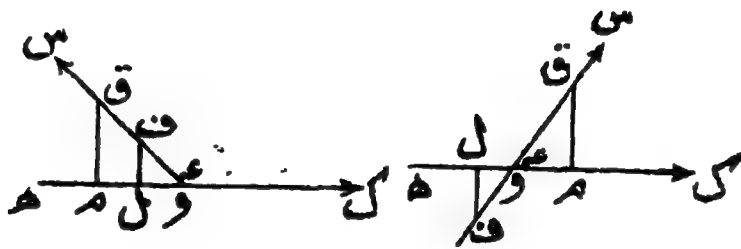
$$\text{طہ} + \frac{\pi}{n}, \text{طہ} + \frac{2\pi}{n}, \text{طہ} + \frac{3\pi}{n}, \dots$$

بنائی گئے اور طے کی تمام قیمتوں کے لیے حاصل ہوگا۔

$$ج م + ط + ج م + \left(\frac{\pi}{2} + ط\right) + ج م + \left(\frac{\pi}{2} + ط\right) + \dots + ن ر ق ن تک =$$

فرض کرو کہ وہ خط جس پر ف ق واقع ہے م ک کو دو پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ان دو خطوں کی مثبت سمتوں و ک اور و س کے درمیان زاویہ ک و س' ع ہے۔

اب زاویہ کی جیب التمام کی تعریف کی رو سے



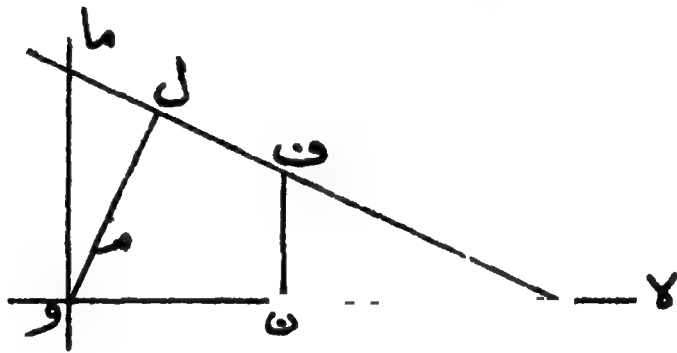
$$و ل = و ف ج م م \text{ اور } و م = و ق ج م م$$

$$ل م = ق ق ج م م$$

پس کسی خط م ک پر خط ف ق کا ظل ف ق ج م م ہوتا ہے جہاں ع زاویہ ہے جو م ک کی مثبت سمت اور اُس خط کی مثبت سمت کے درمیان ہے جس پر ف ق واقع ہے۔

۱۱۔ ایک خط مستقیم پر مبدا، و سے عمود و ل کھینچنا

گیا ہے اور یہ عمود محور لا کے ساتھ زاویہ ع بنا تا ہے۔ خط مستقیم کی مساوات کو عمود ول اور زاویہ ع کی رقوم میں معلوم کرو۔ فرض کرو کہ ول = ع اور زاویہ لا ول = ع۔ فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدود لا، ما ہیں۔
ف ن کو محورا کے متوازی اور ن مرکز ول پر عمود کھینچو۔



اب ن ف، و ما کے متوازی ہے اور تمام صورتوں میں
زاویہ ما ول = زاویہ ما ولا + زاویہ لا ول
= - زاویہ لا و ما + زاویہ لا ول = - $\frac{\pi}{4}$ + ع
ول پروں اور ن ف کے ظلوں کا مجموعہ ول کے مساوی
ہے (دفعہ ۱۸)۔
ون کا ظل = ون جم ع
ن ف کا ظل = ن ف جم (- $\frac{\pi}{4}$ + ع)
اس لیے ع = ون جم ع + ن ف جم (- $\frac{\pi}{4}$ + ع)
= لا جم ع + ما جب ع

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

۴۰۔ — دفعات ۱۵، ۱۶ اور ۱۹ میں ہم نے خط مستقیم کی مساوات کو مختلف شکلوں میں جن میں مختلف مستقلات شامل ہوتے ہیں غیر تابع طریقوں سے معلوم کیا ہے۔ لیکن اس مساوات کی کسی شکل کو دوسری شکل سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً اگر ہمیں یہ مساوات محروں پر کے مقطوعوں کی رقوم میں معلوم ہو تو ہم E اور e کی رقوم میں اس مساوات کو رشتوں و جم $e = E$ اور b جب $e = E$ کے ذریعہ معلوم کر سکتے ہیں جہاں یہ رشتے ذمہ ۱۹ کی شکل سے فوراً حاصل ہو جاتے ہیں۔ پس مساوات $\frac{1}{a} + \frac{b}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a+b}$ اور b کی ان قیمتوں کو درج کرنے سے مساوات $\frac{1}{a} + \frac{b}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a+b}$ حاصل ہوتی ہے۔

اگر خط مستقیم کی مساوات

$$\frac{1}{a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+b+c} = 0$$

ہو تو اس کو $\frac{1}{a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+b+c}$ سے تقسیم کرنے پر مساوات

$$= \frac{1}{a(a+b+c)} + \frac{b}{b(a+b+c)} + \frac{c}{c(a+b+c)}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اب $\frac{1}{a(a+b+c)}$ اور $\frac{b}{b(a+b+c)}$ علی الترتیب کسی خاص

زاویہ کی جیب التمام اور جیب ہیں کیونکہ ان کے مربوں کا مجموعہ اکائی کے مساوی ہے۔ اگر ہم اس زاویہ کو e کہیں تو

$$\frac{1}{a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+b+c} = e$$

جہاں e کو $\frac{c}{a+b+c}$ کی جگہ رکھا گیا ہے۔

مثال ۱۔ اگر ۳ لا - ۲ ما - ۵ = ۰ تو اس ۲ ما + ۲ لا سے تقسیم کرنے پر مساوات $\frac{3}{2} لا - \frac{2}{2} ما - \frac{5}{2} = 0$ حاصل ہوتی ہے۔ اس کی شکل لاجم ۵ + ماجب ۵ = ۰ ہے جہاں جم ۵ = $\frac{3}{2}$ جب ۵ = $-\frac{2}{2}$ اور ع = ۱

مثال ۲۔ مساوات لا + ما + ۵ = ۰ مساوات

$$لاجم \frac{3}{2} + ماجب \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

کے مائل ہے۔

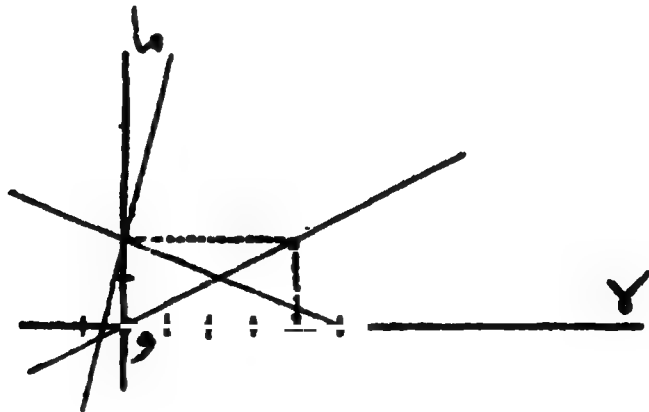
مثال ۳۔ مساوات لا + ۲ ما + ۲۵ = ۰ کو شکل

لاجم ۵ + ماجب ۵ = ۰

جواب: $لا - \frac{2}{5} = ۱ - ما$

میں لکھو۔

۲۱۔ جب کسی خط مستقیم کی مساوات دی گئی ہو تو اس کا محل معلوم کرنے کے لیے صرف یہ ضروری ہے کہ اس پر کے کسی دو نقطوں کے محدد معلوم کر لیے جائیں۔ ان محددوں کو معلوم کرنے کے لیے لا کی کوئی دو قیمتیں فرض کرو اور ان کے جواب میں معلوم مساوات سے ما کی دو قیمتیں معلوم کرو۔ وہ نقطے جہاں خط محوروں کو قطع کرتا ہے بڑی آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔



مثال ۱۔ خط مستقیم کی مساوات $۲ لا + ۵ ما = ۱۰$ ہے۔ یہ خط مستقیم محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں $ما = ۰$ اور اس لیے $لا = ۵$ ۔ محور ما کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں $لا = ۰$ اور اس لیے $ما = ۲$ ۔

مثال ۲۔ خط $۳ لا - ۴ ما + ۲ = ۰$ محوروں پر جو نقطے قطع کرتا ہے وہ علی الترتیب $۱/۳$ اور $۱/۲$ ہیں۔

مثال ۳۔ $لا - ۱۲ ما = ۱۰$ اس صورت میں مبادا خط پر ہے اور جب $لا = ۰$ تو $ما = ۱$

یہ سب خطوط شکل میں کھینچے گئے ہیں۔

۲۲۔ اگر ہم ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا چاہیں جو کسی دو شرطوں کو پورا کرتا ہے تو ہم حسب ذیل عام شکلوں میں سے کوئی ایک شکل اس خط کی مساوات کے لیے فرض کر سکتے ہیں:

$$(۱) \quad ما = لا + ج، (۲) \quad \frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱، (۳) \quad لا + ما = ۱$$

$$(۴) \quad لا + ما + ج = ۰، (۵) \quad لا + ما + ج = ۱$$

ان میں سے کسی ایک شکل کو اختیار کر لینے کے بعد دو مستقلات $م$ اور $ج$ یا $ا$ اور $ب$ یا $ا$ اور $م$ یا $ع$ اور $ج$ یا $\frac{ا}{ج}$ اور $\frac{ب}{ج}$ کی قیمتوں کو (۲۵)

ان دو شرطوں سے متعین کرنا ہوگا جن کو خط پورا کرتا ہے۔

مثال ۱۔ ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کر دو جو نقطہ (۲، ۳) میں سے گزرتا ہے اور محوروں پر مساوی نقطے قطع کرتا ہے۔

$$[\text{فرض کرو کہ خط کی مساوات } \frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ ہے۔}]$$

اب چونکہ نقطہ مساوی ہیں اس لیے $ا = ب$

$$\text{نیز چونکہ نقطہ (۲، ۲) خط پر ہے اس لیے } \frac{۲}{ا} + \frac{۲}{ا} = ۱$$

$$\therefore ۱ = ۵ = ب \text{ اور مطلوبہ مساوات } \frac{لا}{۵} + \frac{ما}{۵} = ۱ \text{ ہے}$$

مثال ۲۔ اُس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۲' ۳۱) میں سے گزرتا ہے اور محور لا کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتا ہے۔

[فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات $m = لا + ج$ ہے۔

تب چونکہ خط مستقیم محور لا کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتا ہے اس لیے $m = مس = ۹۰$ ۔ نیز نقطہ (۲' ۳۱) خط پر ہے اس لیے $m = ۳۱ + ج$ اور اس لیے $ج = ۱ - ۳۱ = ۱ - ۳۱$ پس مطلوبہ مساوات $۱ - ۳۱ = لا + ج$ ہے۔]

مثال ۳۔ جب مساوات $۵ لا + ۱۱۲ = ۲۶$ کو شکل لا جم

+ ماحیب $ع = ع$ میں کھجا جائے تو $ع$ کی قیمت معلوم کرو۔ جواب: ۲

مثال ۴۔ خط $۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$

کا مبداء سے عمودی فاصلہ معلوم کرو۔ جواب: ۲، ۶

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ وہ خط جس کے مقطعے محاور لا اور ما پر علی الترتیب ۵ اور ۴ ہیں نقطہ (۸' ۱۵) میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو نقطوں (۰' ۵) و (۲' ۰) میں سے گزرتا ہے نقطوں (۳' ۱۵) اور (۵' ۰) میں سے بھی گزرتا ہے۔

مثال ۷۔ اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱۲' ۴) میں سے گزرتا ہے اور محور لا کے ساتھ زاویہ ۳۱ بناتا ہے۔ جواب: $۳ = لا$

مثال ۸۔ ثابت کرو کہ نقطوں (۲' ۳) اور (۱' ۵) کو خط $۱ = لا + ۱$ پر ہے۔

مثال ۹۔ ثابت کرو کہ خط $۱ = لا + ۲$ اُس خط کو جو نقطوں (۱۰' ۳) اور (۹' ۸) کو ملاتا ہے نسبت ۳:۲ میں قطع کرتا ہے۔

مثال ۱۰۔ ثابت کرو کہ خط $۱۲ = لا - ۴$ اُس خط کو جو (۱۰' ۱) اور (۲' ۳) کو ملاتا ہے نسبت ۳:۲ میں خارجاً قطع کرتا ہے۔

۲۳۔ ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا (۲۶)

جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے معلومہ سمت میں گھنچا

کیا ہو۔
فرض کر دو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدود 'لا' ہیں اور فرض کر دو کہ خط
مور لا کے ساتھ میں 'ام' کا زاویہ بناتا ہے۔
تب اس خط کی مساوات

$$م = لا + ج$$

ہوگی اور چونکہ (لا، 'لا') اس خط پر ہے اس لیے

$$لا = م + ج$$

اس لیے تفریق کرنے پر

$$لا - م = (لا - لا) \dots \dots \dots (۱)$$

وہ خط جو (۱) سے حاصل ہوتا ہے نقطہ (لا، 'لا') میں سے گزرتا
ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ پس م کو مناسب قیمت دیے سے یہ مساوات
کسی خط مستقیم کو جو نقطہ (لا، 'لا') میں سے گزرتا ہے تعبیر کریں گی۔

پس جب ہیں یہ معلوم ہو جائے کہ ایک خط مستقیم ایک مخصوص
نقطہ (لا، 'لا') میں سے گزرتا ہے تو ہم اس کی مساوات کے لیے فوراً
لکھ لیتے ہیں۔

$$لا = م (لا - لا)$$

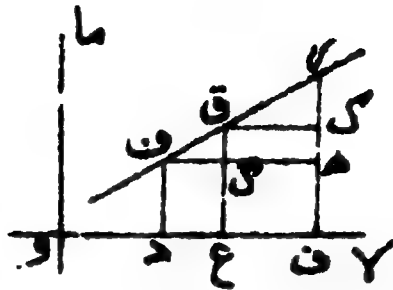
اور پھر م کی قیمت کو اس دوسری شرط سے معلوم کرتے ہیں جس کو خط
پورا کرتا ہے۔

۲۴۔ ایک خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو دو

دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے۔

فرض کر دو کہ دیے ہوئے نقطہ ف اور ق علی الترتیب (لا، 'لا') اور
(لا، 'لا') ہیں اور فرض کر دو کہ خط مستقیم ف ق پر کوئی دوسرا نقطہ سا

(لا، ما) ہے۔



(۲۷) اب چونکہ ف ق سہ ایک خط مستقیم ہے مثلثات ف گ ق، ف د سہ، متشابه ہیں اور اس لیے

$$\frac{\text{ف د سہ}}{\text{ف گ ق}} = \frac{\text{ف د سہ}}{\text{ف گ ق}}$$

$$\frac{۱-۱}{۱-۱} = \frac{۱-۱}{۱-۱}$$

یعنی

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

دوسرا طریقہ: فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات

$$(۱) \dots \dots \dots ۱ + ۱ = ۲$$

ہے تب چونکہ نقاط (۱، ۱) اور (۲، ۲) اس خط پر ہیں اس لیے

$$(۲) \dots \dots \dots ۱ + ۱ = ۲$$

$$(۳) \dots \dots \dots ۱ + ۱ = ۲$$

مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) سے 'ا' ب، ج کو سا قضا کرو تو مطلقاً

مساوات شکل

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

میں حاصل ہوگی۔

مثال ۱۔ نقطہ (۳، ۲) اور (۱، ۳) کو ملانے والے خط کی مساوی

$$= \frac{3-1}{2-1} = \frac{2-1}{2-3} \text{ یا } 2-1 = 1-2$$

ہے۔

مثال ۲۔ ان خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو (۱) نقطہ (۲، ۱) اور (۲، ۵) (ii) نقطہ (۱، ۴) اور (۰، ۱۳) کو ملاتے ہیں۔

$$\text{جواب: (i) } 2-1 = 1-2 \text{ (ii) } 1-0 = 13-1$$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ (۵، ۳) اور (۴، ۲) کو ملانے والا خط اس خط کی تنصیف کرتا ہے جو (۲، ۴) اور (۴، ۹) کو ملاتا ہے۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ (۶، ۳) اور (۹، ۶) کو ملانے والا خط محور کو ابتدا سے اگلی فاصلہ پر قطع کرتا ہے۔

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ دو نقطوں (۳، ۹) اور (۱۵، ۳) میں سے گزرنے والا خط محوروں پر مساوی نقطے پر قطع کرتا ہے۔

مثال ۶۔ وہ خطوط معلوم کرو جو نقطہ (۴، ۳) میں سے گزرتے ہیں اور محوروں کو اس طرح قطع کرتے ہیں کہ مقطعے مقدار میں مساوی ہوتے ہیں۔

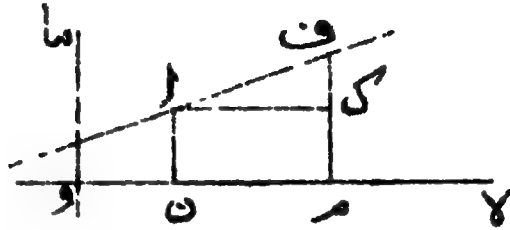
$$\text{جواب: } 1-0 = 1-1 \text{ اور } 1-1 = 1-0$$

۲۵۔ فرض کرو کہ خط مستقیم 'اف' محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ فرض کرو کہ 'ا' کے محدود 'ا' اور 'ف' کے محدود 'ا' میں اور فاصلہ 'اف' = ۲۔

(۲۸)

ان اور فاصلہ کو محور 'ا' کے متوازی کیجیو۔ 'ا' کو محور لا کے

متوازی کیمنجو۔



تب اک = اف جم طہ او۔ ک ف = اف جب طہ

یا لا۔ لا = رجم طہ اور ما۔ ما = ر جب طہ

خط اف کی مساوات کو شکل

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{جم طہ}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}}{\text{ر جب طہ}}$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

۲۶۔ فرض کرو کہ کسی خط مستقیم کی مساوات

$$(\text{لا} + \text{ج} + \text{ما} + \text{ج} = \dots \dots \dots (۱))$$

ہے۔

فرض کرو کہ کسی نقطہ ق کے محدود لا، ما ہیں اور فرض کرو کہ وہ خط جو محور ما کے متوازی ہے اور ق میں سے گزرتا ہے دیے ہوئے خط کو نقطہ ف پر قطع کرتا ہے جس کے محدود لا، ما ہیں۔

تب ایک شکل سے یہ ظاہر ہوگا کہ جب تک ق، خط مستقیم کی ایک ہی جانب رہتا ہے ق ف کو ایک ہی سمت میں کیمنچنا پڑتا ہے لیکن جب ق، خط مستقیم کی دوسری جانب واقع ہوتا ہے تو ق ف کو مخالف

ست میں کھینچا پڑتا ہے۔
اس کا یہ مطلب ہے کہ ق ف، خط مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں
کے لیے مثبت ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے منفی۔
اب ق ف = م - م (۲)

اور م + م + ج = م + م + ج - (م + م + ج) [کیونکہ (م، م) خط پر ہے اور اس لیے م + م + ج = ۰]
∴ م + م + ج = - (م - م) (۳)

(۲) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ م + م + ج، خط مستقیم کی
ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے اور دوسری جانب کے
تمام نقطوں کے لیے منفی ہے۔

اگر ایک خط مستقیم کی مساوات م + م + ج = ۰ ہو اور کسی نقطہ
(م، م) کے محدود جملہ م + م + ج میں درج کیے جائیں تب اگر
م + م + ج مثبت ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ (م، م) خط کی مثبت جانب
واقع ہے لیکن اگر م + م + ج منفی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ (م، م)
خط کی منفی جانب واقع ہے۔
اگر خط کی مساوات کو

$$- م - م - ج = ۰$$

لکھا جائے تو یہ ظاہر ہے کہ وہ جانب جس کو ہم نے مثبت جانب کہا ہے اب
اُسے منفی جانب کہنا چاہیے۔

مثال ۱ — نقطہ (۲، ۳) خط م - م - ج = ۰ کی منفی جانب پر ہے اور
خط م - م - ج = ۰ کی مثبت جانب پر ہے۔

مثال ۲ — نقاط (۱، ۲) اور (۱، ۱) خط م + م + ج = ۰ کی مختلف
جانوں پر ہیں۔

مثال ۳ — ثابت کرو کہ چار نقطے (۰، ۰)، (۱، ۱)، (۱، ۲) اور (۲، ۲)
خط مستقیم م - م - ج = ۰ اور م + م + ج = ۰ سے بنے ہوئے چار مختلف خانوں میں

واقع ہیں۔

۲۷۔ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع کے محدود

معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$(۱) \dots\dots\dots = ج + ب + لا$$

$$(۲) \dots\dots\dots = ج + ب + لا$$

ہیں۔

اب اس نقطہ کے محدود جو دونوں خطوط مستقیم میں مشترک ہے دونوں

مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کر نیگے۔ پس ہیں لا اور ما کی وہ قیمتیں معلوم

کرنی ہیں جو مساواتوں (۱) اور (۲) دونوں کو پورا کریں۔ یہ قیمتیں

$$\frac{لا}{ب-ج} = \frac{ب}{ج-لا} = \frac{ج}{ب-لا}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

۲۸۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ تین خطوط مستقیم ایک نقطہ پر

مل سکیں۔

فرض کرو کہ تین خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$(۱) \dots\dots\dots = ج + ب + لا$$

$$(۲) \dots\dots\dots = ج + ب + لا$$

$$(۳) \dots\dots\dots = ج + ب + لا$$

ہیں۔

یہ تین خطوط مستقیم ایک نقطہ پر ملینگے اگر ان میں سے دو خطوں کا نقطہ

تقاطع تیسرے خط پر واقع ہو۔

خطوط مستقیم (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع کے محدود

$$\frac{1}{\text{ب ج} - \text{ب ج}} = \frac{1}{\text{ج و} - \text{ج و}} = \frac{1}{\text{و ب} - \text{و ب}}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔
در شہاد کہ یہ نقطہ خط (۳) پر واقع ہو رہے کہ

$$\frac{\text{ب ج} - \text{ب ج}}{\text{و ب} - \text{و ب}} = \frac{\text{ج و} - \text{ج و}}{\text{و ب} - \text{و ب}} = \frac{\text{و ب} - \text{و ب}}{\text{و ب} - \text{و ب}}$$

$$\text{یا } \frac{\text{و ب} - \text{ج} - \text{ب ج}}{\text{و ب} - \text{و ب}} = \frac{\text{و ب} - \text{ج} - \text{و ج}}{\text{و ب} - \text{و ب}} = \frac{\text{و ب} - \text{و ج}}{\text{و ب} - \text{و ب}} = \frac{\text{و ب} - \text{و ج}}{\text{و ب} - \text{و ب}}$$

مثالیں

۱۔ وہ خطوط مستقیم کھینچو جن کی مساواتیں ہیں

$$(۱) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ \quad (۲) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱$$

$$(۳) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ \quad (۴) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱$$

۲۔ ان خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطوں کے حسب ذیل جوڑوں کو

لاتے ہیں :

$$(۱) \quad (۱۲، ۱۱) \text{ اور } (۱۱، ۱۲) \quad (۲) \quad (۱۱، ۱۲) \text{ اور } (۱۲، ۱۱)$$

$$\text{جواب: } (۱) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ \quad (۲) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱$$

۳۔ ان خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۱-۱) میں سے گزرتے

ہیں اور محور لا کے ساتھ علی الترتیب زاویے ۵۰° اور ۴۰° بناتے ہیں۔

$$\text{جواب: } ۱۲ = ۱۱ + ۱ \quad (۱-۱)$$

۴۔ حسب ذیل مساواتوں کو شکل لا جمعو + ما جب م = ج = ۰ میں لکھو:

$$(۱) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ \quad (۲) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱$$

$$\text{جواب: } (۱) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱ \quad (۲) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱$$

۵۔ ان خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۵، ۵) میں سے گزرتا ہے اور

جواب: (د-ج) لا + (و-ب) ا + ب ج-د = (د-ج) لا + (و-ب) ا + ا و ج-ب = د

۱۳۔ اوکی کیا قیمت ہونی چاہیے کہ تین خطوط مستقیم

$$۳ = ۲ - ۱ + ۲ = ۳ \quad ۱ = ۲ - ۱ + ۲ = ۳ \quad ۲ = ۳ - ۱ + ۲ = ۳$$

ایک نقطہ پر مل سکیں۔

۱۵۔ نقطوں (۲، ۱) اور (۳، ۴) کو ملانے والا خط نقطوں (۲، ۱)

اور (۳، ۴) کو ملانے والے خط سے کس نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔

جواب: خط کی تنصیف ہوتی ہے۔

۱۶۔ معلوم کرو کہ آیا نقطے (۳، ۲) اور (۲، ۳) خط مستقیم ۱۵-۱۶+۴=۱۰ کی

ایک ہی جانب واقع ہیں یا مخالف جانبوں پر۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ نقطے (۰، ۰) (۱، ۱) اور (۲، ۲) خط ۱+۲=۱ کی مخالف

جانبوں پر واقع ہیں۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ مبدا اُس مثلث کے اندر ہے جس کے ضلعوں کی مساواتیں

$$۱۱ - ۱۲ + ۱۳ = ۱۱ \quad ۱۲ - ۱۳ + ۱۱ = ۱۱ \quad ۱۳ - ۱۱ + ۱۲ = ۱۱$$

ہیں۔ [متناظر اس (-۱، ۲) (۲، ۳) (۳، ۴) ہیں]

۲۹۔ دو خطوط مستقیم کی مساواتیں دی گئی ہیں۔

ان خطوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

(۱) اگر دیے ہوئے خطوں کی مساواتیں

$$۱۱ - ۱۲ + ۱۳ = ۱۱ \quad ۱۲ - ۱۳ + ۱۱ = ۱۱ \quad ۱۳ - ۱۱ + ۱۲ = ۱۱$$

ہوں تو مطلوبہ زاویہ ۱۱ یا ۱۲ (۱۱ - ۱۲) ہوگا۔

کیونکہ ۱۱ اور ۱۲ وہ زاویے ہیں جو وہ عمود عمود لا کے ساتھ بناتے ہیں

جن کو مبدا سے ان خطوں پر علی الترتیب کھینچا گیا ہے اور یہ ظاہر ہے کہ کسی

دو خطوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی یا متمم ہوتا ہے جو ان خطوں

کے عمودوں کے درمیان بنتا ہے۔

(۲) اگر خطوں کی مساواتیں

$$ما = م لا + ج ، ما = م لا + ج$$

ہوں اور طہ ، طہ وہ زاویے ہوں جو یہ خطوط محور لا کے ساتھ بناتے ہیں تو
مس طہ = م اور مس طہ = م اور اس لیے

$$مس (طہ - طہ) = \frac{م - م}{م + م}$$

مطلوبہ زاویہ مس () ہے۔

یہ خطوط ایک دوسرے پر عمود ہونگے جبکہ
+ م م =

اور متوازی ہونگے جبکہ

(۳) اگر خطوں کی مساواتیں

$$ولا + ب ما + ج = ، ولا + ب ما + ج =$$

ہوں تو ان مساواتوں کو شکلوں

$$ما = \frac{لا}{ب} - \frac{ج}{ب} اور ما = \frac{لا}{ب} - \frac{ج}{ب}$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس لیے (۲) کی رو سے مطلوبہ زاویہ

$$مس ا = \frac{\frac{لا}{ب} + \frac{ج}{ب}}{1 + \frac{لا}{ب}} یا مس ا = \frac{ب ا - ج}{لا + ب}$$

ہے۔

خطوط ولا + ب ما + ج = ، اور ولا + ب ما + ج =
ایک دوسرے پر عمود ہونگے اگر

$$ولا + ب ب =$$

اور متوازی ہونگے اگر

$$ب - د = ۱ = ۰ \text{ یا } \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

۳۰۔ عمودیت کی شرط صرفاً ان دو خطوں سے پوری ہوتی ہے جن کی مساواتیں

$$۱ + لا + ب + ج = ۰ \text{ اور } ب - لا - ۱ + ج = ۰$$

ہیں۔ یہ شرط ان دو خطوں

$$۱ + لا + ب + ج = ۰ \text{ اور } \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} + ج = ۰$$

سے بھی پوری ہوتی ہے۔

پس اگر ایک دیے ہوئے خط مستقیم کی مساوات میں لا اور ما کے سروں کو باہم بدلا جائے (یا انہیں مغلوب کیا جائے) اور ان میں سے ایک کی علامت تبدیل کی جائے تو ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات حاصل ہوگی جو دیے ہوئے خط مستقیم پر عمود ہوگا، اب اگر یہ خط کسی دوسری شرط کو بھی پورا کرتا ہے تو مستقل رقم کو سوزوں قیمت دینی چاہیے۔

مثال ۱۔ وہ خط جو مبداء میں سے گزرتا ہے اور $۲ + لا = ۰$ پر عمود ہے

$$۲ - لا = ۰ \text{ ہے۔}$$

مثال ۲۔ وہ خط جو نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرتا ہے اور $۲ + لا - ۵ = ۰$

پر عمود ہے $۲(لا - ۴) + ۳(۵ - ۲) = ۰$ ہے کیونکہ وہ دیے ہوئے خط پر عمود ہے اور نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۳۔ خطوط

$$۲ + لا + ۳ + ۱ = ۰ \text{ اور } لا - ۱ = ۰$$

کے درمیان عادیہ زاویہ ۵۵° ہے۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ نقطوں (۳، ۱) اور (۱، ۳) کو ملانے والا خط
نقطوں (۲، ۵) اور (۳، ۹) کو ملانے والے خط پر عمود ہے۔

مثال ۵۔ خطوط ۳ لا + ۲ = ۷ اور ۲ لا + ۱ = ۵ کے
درمیان حادہ زاویہ معلوم کرو۔
جواب: ۵۰°

مثال ۶۔ خطوط ۳ لا - ۲ ما + ۷ = ۰ اور ۲ لا + ۱ = ۵ کے درمیان
حادہ زاویہ معلوم کرو۔
جواب: ۱۵۰°

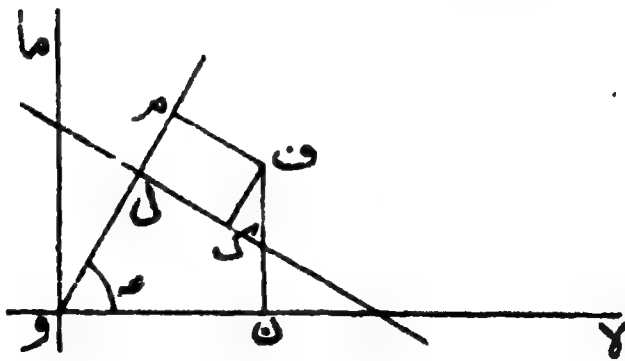
مثال ۷۔ وہ خط معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۲) میں سے گزرتے ہیں
اور خط ۳ لا - ۲ ما + ۵ = ۰ کے ساتھ ۵۰° کے حادہ زاویے بناتے ہیں۔
جواب: لا - ۲ ما + ۲ = ۰ اور ۲ لا + ۱ = ۵

۳۱۔ ایک دیے ہوئے خط مستقیم سے ایک دیے ہوئے
نقطہ کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات

لاجم عہ + ما جب عہ - رع = ۰ ... (۱)

ہے اور فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدد لا، ما ہیں۔



فرض کرو کہ دیے ہوئے خط مستقیم پر مبدا سے اور نقطہ (لا، ما) سے
عمود ول، فنک ہیں۔

فن کو دلا پر اور ف م کو ول پر عمود کھینچو۔
تب $\text{وم} = \text{ول پر ون اور ن ف کے ظلوں کا مجموعہ}$
اب ن ف، وما کے متوازی ہے اور تمام صورتوں میں
زاویہ ماول = زاویہ ماولا + زاویہ لاول
 $= \text{زاویہ لاول} + \text{وما} = \text{ول} = -\frac{\pi}{2} + \epsilon$
ول پر ون کا ظل ون جم ϵ ہے اور ن ف کا ظل
ن ف جم $(-\frac{\pi}{2} + \epsilon)$

$$\frac{لا + ب + ما + ج}{لا + ب} \dots \dots \dots (۳)$$

۴۔

دوسرا طریقہ :- اس خط کی مساوات جو نقطہ ف (لا، ما) میں سے گذرتا ہے اور خط لا + ب + ما + ج = پر عمود ہے
ب (لا - لا) - (ما - ما) = ۰

۵۔

اگر یہ عمودی خط دیے ہوئے خط سے نقطہ گ پر ملے اور گ کے عمود لا، ما ہوں تو چونکہ گ دونوں خطوں پر ہے اس لیے
ب (لا - لا) - (ما - ما) = ۰ (۱)
اور لا + ب + ما + ج = جس کو لکھا جاسکتا ہے
لا - لا + (ب - ما) = - (لا + ب + ما + ج) (۲)
(۱) اور (۲) کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$(لا + ب)^2 = (لا - لا)^2 + (ب - ما)^2 = (لا + ب + ما + ج)^2$$

$$\text{اس لیے گ ف} = (لا - لا)^2 + (ب - ما)^2$$

$$= \frac{لا + ب + ما + ج}{لا + ب}$$

پس جب ایک خط مستقیم کی مساوات کو شکل لا + ب + ما + ج = میں دیا جائے تو اس سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا عمودی فاصلہ جملہ لا + ب + ما + ج میں نقطہ کے محدود درج کرنے اور لا، ما کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر المربع سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر $\angle A + \angle B$ کو ہمیشہ مثبت فرض کیا جائے تو خط کی مثبت جانب کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کا طول مثبت ہوگا اور منفی جانب کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کا طول منفی ہوگا۔ [دیکھو دفعہ ۲۶]

۳۲۔ ان خطوں کی مساوات میں معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کریں۔ (۳۶)

اگر دو خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کے نا صنف کھینچے جائیں اور ان نا صنفوں میں سے ایک پر کے کسی نقطے سے خطوں پر عمود ڈالے جائیں تو یہ ظاہر ہے کہ یہ عمود مقدار میں ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔ پس اگر خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$\angle A + \angle B + \angle C = 0 \quad (1)$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 0 \quad (2)$$

ہوں اور دو نا صنفوں میں سے کسی ایک پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو

$$\frac{\angle A + \angle B + \angle C}{\angle A + \angle B} \quad \text{اور} \quad \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{\angle A + \angle B}$$

مقدار میں مساوی ہونے چاہئیں۔

اس لیے نقطہ (لا، ما) خطوط مستقیم

$$(3) \dots\dots\dots \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{\angle A + \angle B} \pm = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{\angle A + \angle B}$$

میں سے کسی ایک پر ہے۔

اس لیے وہ دو خطوط جو (۳) سے حاصل ہوتے ہیں مطلوبہ نا صنف ہیں۔ ہم ان دو نا صنفوں میں تمیز کر سکتے ہیں کیونکہ اگر ہم دونوں نسب نماؤں کو مثبت لیں اور اگر (۳) میں اوپر کی علامت لی جائے تو $\angle A + \angle B + \angle C$ اور

آ ۱۱ + ب ۱ + ج ۱ دونوں یا تو مثبت ہونے پائیں یا دونوں منفی۔

پس
$$\frac{11 + 1 + 1}{11 + 1 + 1} = \frac{11 + 1 + 1}{11 + 1 + 1} \dots (۱۲)$$

میں ہر نقطہ خطوط (۱) اور (۲) دونوں کی مثبت جانب ہے یا دونوں کی منفی جانب۔

اگر مساواتوں کو اس طرح لکھا جائے کہ مستقل، تمام دونوں مثبت ہوں تو پیدا دونوں خطوں کی مثبت جانب ہوگا اور اس لیے (۴) اس زاویہ کا نصف ہوگا جس میں مساوات واقع ہے۔

مثال ۱۔ خطوط ۱۲-۱۱-۱۰ اور ۱۲-۱۱-۱۰ کے

دو بیانی زاویوں کے نصف
$$\frac{11 + 1 + 1}{11 + 1 + 1} = \frac{11 + 1 + 1}{11 + 1 + 1}$$
 سے حاصل ہو

ہیں اور اوپر کی علامت لینے سے وہ نصف ملتا ہے جس میں مساوات واقع ہے۔

مب ذیل مثال اہم ہے۔

مثال ۲۔ ایک مثلث ا ب ج کے راس ا ب ج کے محدود

علی الترتیب (۲۱) (۲۵) اور (۲۱) ہیں۔ اس مثلث کے اندرونی زاویہ کا مرکز معلوم کرو۔

اضلاع ج ج ا، ج ا ب کی مساواتیں۔

$$11 + 1 + 1 = 11 + 1 + 1 = 11 + 1 + 1$$

ہیں۔ اگر ان مساواتوں کے دائیں جانبی ارکان میں ا ب ج کے حدود کو درج کیا جائے تو نتائج علی الترتیب ۱ + ۱ + ۱ ہوں گے۔

اب اضلاع کی مساواتوں میں تمام ارقام کی علامتیں (اگر

ضرورت ہو) تبدیل کرو تاکہ ہر راس مقابل کے ضلع کی مثبت جانب ہو۔ تب مساواتیں ہوں گی

$$11 + 1 + 1 = 11 + 1 + 1 = 11 + 1 + 1$$

$$\text{پس } \frac{۳-۶۸-۱۱۹}{\sqrt{۲۸+۲۱۹}} + = \frac{۴۵۳+۶۱۶-۱۱۳}{\sqrt{۲۱۶+۲۱۳}}$$

کوزاویہ (ج) کا اندرونی ناصف ہونا چاہیے کیونکہ اس مساوات کے دونوں ارکان مثبت ہونے چاہئیں یا دونوں منفی اور اس لیے ناصف پر کا کوئی نقطہ (ج) درج ب دونوں کی مثبت جانب یا دونوں کی منفی جانب ہونا چاہیے۔

$$\text{اسی طرح } \frac{۴-۶۴+۱۱}{\sqrt{۲۷+۲۱}} + = \frac{۳-۶۸-۱۱۹}{\sqrt{۲۸+۲۱۹}}$$

زاویہ ب (ج) کا اندرونی ناصف ہے۔
پس اندرونی دائرہ کا مرکز مساواتوں

$$\frac{۴-۶۴+۱۱}{۱۴۷} = \frac{۳-۶۸-۱۱۹}{۱۴۵} = \frac{۴۵۳+۶۱۶-۱۱۳}{۱۴۵}$$

سے ماہل ہوگا چنانچہ یہ نقطہ (۱۱، ۱۱) ہے۔

۳۳۔ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔

مطلوبہ مساوات کو ماہل کرنے کا سب سے واضح طریقہ یہ ہے کہ دیے ہوئے خط مستقیم کا نقطہ تقاطع (لا، ما) معلوم کیا جائے اور پھر شکل ما-ما = م (لا-لا) استعمال کی جائے جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کی مساوات کی شکل ہے۔ لیکن حسب ذیل طریقہ بعض اوقات قابل ترجیح قرار پاتا ہے۔

(۳۸)

فرض کرو کہ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$(۱) \dots\dots\dots = لا + ب + ج$$

$$(۲) \dots\dots\dots = لا + ب + ج$$

ہیں۔ اب مساوات

$$(۳) \dots\dots\dots = لا + ب + ج + لہ (لا + ب + ج)$$

پر غور کرو۔ یہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے کیونکہ وہ پہلے درجہ کی مساوات ہے نیز اگر (لا، ما) وہ نقطہ ہو جو دیے ہوئے خطوط مستقیم میں مشترک ہے تو حاصل ہونا چاہیے

$$لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$لا + ب + ما + ج + لہ (لا + ما + ج) = ۰$$

اور اس لیے اس آخری مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ (لا، ما) خط (۳)

پر بھی ہے۔

پس (۳) ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات ہے جو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔ نیز لہ کو موجودہ قیمت دینے سے یہ مساوات کسی دوسری شرط کو بھی پوری کر سکتی ہے، مثلاً وہ کسی دوسرے دیے ہوئے نقطہ میں سے گذرنے والے خط کو تعبیر کر سکتی ہے۔ اس لیے مساوات (۳) لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے ان تمام خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتے ہیں۔

مثال۔ اس خط کی مساوات معلوم کرو جو مبدا کو خطوط لا + ما + ج = ۲

$$اور لا + ما + ج = ۲ کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے۔$$

کوئی خط جو نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے

$$لا + ما + ج = ۲ + لہ (لا + ما + ج) = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ یہ نقطہ (۰، ۰) میں سے گذریگا اگر

$$۲ = لہ + ۰ = ۰$$

$$لا + ما + ج = ۲ + لہ (لا + ما + ج) = ۰$$

$$لا + ما = ۰$$

یا

مطلوبہ مساوات ہے۔

۳۴۔ اگر تین خطوط مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب

$$لا + ب + ما + ج = ۰، لا + ب + ما + ج = ۰، لا + ب + ما + ج = ۰$$

اس لیے ان سے تبییر شدہ تین خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔
 [(۱) میں اندراج کرنے سے آسانی کے ساتھ یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ ث
 جس کے محدود $\frac{1}{2}$ (لا + لا + لا) $\frac{1}{2}$ (ما + ما + ما) ہیں (د پر ہے اور اس نتیجہ
 کے تشاکل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ث، ب، ح اور ج ف پر بھی ہے۔]

مثالیں

(۴۰)

۱۔ وہ زاویے معلوم کرو جو خطوط مستقیم کے حسب ذیل زوجوں کے
 درمیان ہیں:

$$(۱) \quad ۵ + لا ۲ = ۶ \quad ۳ + لا ۳ = ۷$$

$$(۲) \quad لا ۲ + ما ۲ = ۴ \quad لا ۲ - ما ۱ = ۱$$

$$(۳) \quad (لا + ب) + ما + ج = ۰ \quad (ا + ب) - لا - (ب - ا) = ما$$

جواب: (۱) ۴۵، (۲) ۹۰، (۳) ۴۵

۲۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو $۲ + لا ۳ + ما ۳ = ۵$ پر عمود ہو

اور نقطہ (۳، ۱) میں سے گزرے۔ جواب: $۳ - لا ۳ - ما ۲ = ۱۹$

۳۔ ان خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو میدان میں سے گذریں اور خطوط

$۳ + لا ۲ + ما ۲ = ۵$ اور $۳ + لا ۳ + ما ۳ = ۷$ پر عمود ہوں۔ ان نقطوں کے محدود

معلوم کرو جہاں یہ عمود خطوں سے ملتے ہیں اور ثابت کرو کہ ان نقطوں کو ملائیو

خط کی مساوات $۳ + لا ۲ + ما ۳ = ۳۵$ ہے۔

۴۔ خطوں $۳ + لا ۲ + ما ۳ = ۷$ اور $۳ + لا ۳ + ما ۳ = ۲۰$ اور $۳ + لا ۳ + ما ۳ = ۲۰$

۸ = ۰ سے نقطہ (۳، ۲) کے عمودی فاصلے معلوم کرو۔ جواب: ۲

۵۔ ان خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو علی الترتیب نقاط (۱، ۱) اور

(۲، ۱) میں سے گذریں اور $۳ + لا ۳ + ما ۳ = ۷$ کے متوازی ہوں۔ ان

خطوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرو۔ جواب: $\frac{۱}{۵}$

۶۔ ان دو خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۲) میں سے

گزریں اور لا + ۲ = ۰ کے ساتھ ۵ کا زاویہ بنائیں۔

جواب: لا - ۳ + ۴ = ۰، لا + ۳ = ۹

۷۔ ان دو خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو لا + ۴ + ۲ = ۰ کے متوازی ہوں اور نقطہ (۱، -۱) سے اکائی فاصلہ پر واقع ہوں۔

جواب: لا + ۴ + ۲ = ۰، لا + ۴ = ۲۶

۸۔ اس خط کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ کو لا - ۳ - ۴ = ۰ اور

۱ - ۲ + ۱ = ۰ کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے۔

جواب: لا + ۱۱ + ۳ = ۰

۹۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱) کو لا + ۳ + ۴

- ۲ = ۰ اور لا - ۲ + ۵ = ۰ کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے۔

جواب: لا + ۲۶ + ۳ = ۰

۱۰۔ اس خط کی مساوات معلوم کرو جو لا - ۳ - ۱ = ۰ اور لا

+ ۵ - ۶ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے گزرے اور لا + ۳ + ۴ = ۰ پر عمود ہو۔

جواب: لا + ۶۶ - ۱۸۸ = ۰

۱۱۔ ایک مثلث کے راس (۱، ۲)، (۲، ۳) اور (۱، -۱) ہیں۔

اس مثلث کے اضلاع پر مبداء سے عمود کھینچے گئے ہیں۔ ان عمودوں کے طول

معلوم کرو۔ جواب: $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{13}$ ، $\frac{1}{26}$

۱۲۔ ان خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو خطوط مستقیم لا + ۳

- ۱۲ = ۰ اور لا + ۳ - ۲ = ۰ کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کریں،

اور نیزہ شکل کھینچو جو ان چار خطوں کو تعبیر کرے۔

جواب: لا - ۱۲ = ۰، لا + ۴ = ۳۶

۱۳۔ خطوط لا + ۳ - ۱۰ = ۰، لا + ۳ - ۲۰ = ۰، لا - ۳ + ۵ = ۰

لا - ۵ = ۰ سے بنے ہوئے متطیل کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو اور

ثابت کرو کہ وہ نقطہ $(\frac{9}{4}, \frac{3}{4})$ پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۱۴۔ خطوط لا - ۱ = ۰، لا + ۱ = ۰، لا - ج = ۰ سے بنے ہوئے

(۳۱)

جواب: ج

ثلث کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ اس ثلث کا رقبہ جو خطوط $۱-۲=۳$ ، $۲-۳=۴$ ، $۳-۴=۵$ ۔

اور $۱+۲+۳=۶$ سے بنتا ہے $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

۱۶۔ اس ثلث کا رقبہ معلوم کرو جو خطوط $۱-۲=۳$ ، $۲-۳=۴$ ، $۳-۴=۵$ ۔

جواب: $\frac{۳۳۸}{۲۱}$ سے بنتا ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ اس ثلث کا رقبہ جو خطوط $۱-۲=۳$ ، $۲-۳=۴$ ، $۳-۴=۵$ ۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ اس ثلث کا رقبہ جو خطوط مستقیم $۱-۲=۳$ ، $۲-۳=۴$ ، $۳-۴=۵$ ۔

$$\frac{\frac{1}{2} (1^2 - 2^2)}{1^2 - 2^2}$$

۱۹۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم پر

اس نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا

طریق ایک خط مستقیم ہے۔

$$\frac{1}{2} \frac{(1^2 - 2^2)}{1^2 - 2^2} + \frac{1}{2} \frac{(2^2 - 3^2)}{2^2 - 3^2} + \frac{1}{2} \frac{(3^2 - 4^2)}{3^2 - 4^2}$$

[مثال ۱۷ استعمال کرو]

ہوگا۔

۲۰۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم پر

اس نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا

طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۳۵۔ ن ویں درجہ کی متجانس مساوات 'مبدأ میں سے

گذرنے والے ن خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔

فرض کرو کہ مساوات

$$۱^۰ + ۲^۰ + ۳^۰ + \dots + (n-1)^۰ = n^۰ \dots (۱)$$

ہے۔

لان سے تقسیم کرو تو

$$(1) \left(\frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} \right) = \dots (2)$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں m_1, m_2, \dots, m_n ہیں۔
تب مساوات بالا وہی ہے جو

$$\left(\frac{1}{10} - m_1 \right) \left(\frac{1}{10} - m_2 \right) \left(\frac{1}{10} - m_3 \right) \dots \left(\frac{1}{10} - m_n \right) = 0$$

ہے اور اس لیے پوری ہوتی ہے جبکہ

$$\frac{1}{10} - m_1 = 0, \frac{1}{10} - m_2 = 0, \dots \text{ وغیرہ}$$

اور وہ کسی اور صورتوں میں پوری نہیں ہوتی۔

اس لیے اس طریق پر کے تمام نقطے جو (۱) سے تعبیر ہوتا ہے ان خطوط مستقیم

$$m_1 - \frac{1}{10} = 0, m_2 - \frac{1}{10} = 0, \dots, m_n - \frac{1}{10} = 0$$

میں سے ایک یا دوسرے پر ہیں۔

۳۶۔ دو خطوط مستقیم کے درمیان زاویہ معلوم کرنا جو مساوات

$$(1) \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \dots$$

$$\text{اگر خطوط } m_1 - \frac{1}{10} = 0, m_2 - \frac{1}{10} = 0, \dots \text{ ہوں تو } (m_1 - \frac{1}{10})(m_2 - \frac{1}{10}) \dots = 0$$

وہی ہے جو دی ہوئی مساوات

$$m_1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \dots$$

ہے۔

$$(1) \dots \dots \dots \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \dots$$

$$(2) \dots \dots \dots \frac{1}{10} = m_1$$

اور

اگر خطوط کے درمیان زاویہ طہ ہو تو

$$\text{مس طہ} = \frac{۱۲ + ۱۲}{۱ + ۱} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲ \text{ اب } - (ج)$$

اگر ب' - (ج) مثبت ہے تو خطوط حقیقی ہیں، یہ خطوط منطبق ہونگے
اگر ب' - (ج) = -

اگر ب' - (ج) منفی ہے تو خطوط خیالی ہیں لیکن حقیقی نقطہ (۰) میں سے گذرتے ہیں۔

اگر (ج + ۱) = ۰ تو خطوط ایک دوسرے کے علی القواہم ہونگے
یعنی لا اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہو تو خطوط علی القواہم ہوں گے۔

۳۷۔ وہ شرط معلوم کرو کہ دوسرے درجہ کی عام مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کر سکے۔

دوسرے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰ = ۵۰۵۰$$

(۱) ل + م + ن (ل + م + ن) = ۰ (۲)
کے معادل ہو تو (۱) اور (۲) میں سروں کو مساوی رکھنے سے

$$\begin{aligned} ل + م + ن &= ۰ \\ ل + م + ن &= ۰ \\ ل + م + ن &= ۰ \end{aligned}$$

$$۸ ف گ = ۲ ل م ن + ل ل (م ن + م ن)$$

$$م م (ن ل + ن ل) + ن ن (ل ل + ل ل)$$

$$۲ = ۱ب + ج + ۱(۴ف - ۲ب + ج) + ب(۴گ - ۲ج + ۱)$$

$$+ ج(۴م - ۲ل + ب)$$

پس ۱ب + ج - ۱ف - بگ - ۱ج + ۲ف + ۲گ = ۰ (۳)
مطلوبہ شرط ہے۔

اگر لا اور ما دونوں کے سر صفر نہ ہوں تو اوپر کے نتیجہ کو زیادہ آسانی سے اس طرح حاصل کیا جاسکتا ہے کہ مساوات کو لایا میں دو درجی مساوات سمجھ کر حل کیا جائے۔

فرض کرو کہ ۱ صفر نہیں ہے تو اگر ہم مساوات کو لایا میں دو درجی مساوات سمجھ کر حل کریں تو

$$۱لا + ۲ما + گ = ۰ \quad (۴ - ۱ب) + ۲(۲ - ۱ا + ۱گ) = ۰$$

اب اس غرض کے لیے کہ یہ شکل ۱لا + ۲ب + ج = ۰ میں تحویل ہو سکے یہ ضروری اور کافی ہے کہ علامت جذر کے اندر کا جملہ کامل مربع ہو۔
اس کے لیے شرط

$$(۴ - ۱ب)(۱گ - ۱ا + ج) = (۲گ - ۱ف + ۱)$$

ہے جس کو ۱ سے تقسیم کرنے کے بعد وہ شرط (۳) کے مماثل ہو جاتی ہے۔

۳۸۔ ان خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو

$$۱لا + ۲ما + ۱ب + ۲گ + ۱لا + ۲ف + ج = ۰ \quad (۱)$$

$$ل + لا + م + ا = ۰ \quad (۲)$$

اور کے مشترک نقطوں کو مبداء سے ملانے سے حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات (۱) کو مساوات (۲) کے ذریعہ دوسرے درجہ کی تجانس مساوات بناؤ تو حاصل ہوگا

$$۱لا + ۲ما + ۱ب + ۲گ + ۱لا + ۲ف + ج = ۰$$

$$+ م + ا = ۰ \quad (۳)$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔
 کیونکہ مساوات (۳) متجانس ہونے کی وجہ سے وہ مبدا میں گزرنیوالے
 خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے (صفحہ ۳۵)۔ یہ معلوم کرنے کے لیے کہ خطوط (۳)
 خط (۲) سے کہاں متقاطع ہوتے ہیں (۳) میں $ل + م = م$ رکھو تو رشتہ
 (۱) پورا ہو گا جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ خطوط (۳) (۱) اور (۲) کے
 مشترک نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

مثال۔ وہ خطوط معلوم کرو جو

$$۲ + ل = ۲ + لا - لا + ۱ = ۱ اور ۳ + لا = ۱ - لا = ۰$$

کے نقاط تقاطع کو مبدا سے ملاتے ہیں۔

خطوں کی مساوات

$$۲ + لا + لا - لا = لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۰$$

ہے۔ یہ مساوات

$$لا - لا - لا = لا = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے۔ پس خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ مستقیم
 ۳۹۔ ان خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو دو خطوط مستقیم

$$لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۰$$

کے درمیانی زاویوں کی تریف کریں۔

اگر دیے ہوئے خطوط محور لا کے ساتھ زاویے ط اور طہ بناتے

ہیں تو

$$(لا - لا مس طہ) (لا - لا مس طہ) = ۰$$

وہی ہے جو دی ہوئی مساوات ہے۔ پس

$$مس طہ + مس طہ = \frac{۲}{ب} \dots \dots (۱)$$

$$\text{مس مس ط} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \dots \dots \dots (۲)$$

اگر نہ وہ زاویہ ہو جو ناصفوں میں سے ایک مخروط لاکے ساتھ بناتا ہے تو

$$\text{ط} = \frac{\text{ط}_۱ + \text{ط}_۲}{۲} \text{ یا } \text{ط} = \frac{\pi}{۲} + \frac{\text{ط}_۱ + \text{ط}_۲}{۲}$$

اور ان میں سے کسی صورت میں

$$\begin{aligned} \text{مس ۲ ط} &= \text{مس (ط}_۱ + \text{ط}_۲) \\ \frac{\text{مس ۲ ط}}{\text{مس ۲ ط} - ۱} &= \frac{\text{مس ط}_۱ + \text{مس ط}_۲}{\text{مس ط}_۱ - ۱} \end{aligned}$$

اگر ایک ناصف پر (لا'ا) کوئی نقطہ ہو تو $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \text{مس ط}$ (۴۵)

$$\text{اس لیے } \frac{\text{مس ط}_۱ + \text{مس ط}_۲}{\text{مس ط}_۱ - ۱} = \frac{\frac{\text{ا}}{\text{ب}}}{\frac{\text{ا}}{\text{ب}} - ۱}$$

اس لیے (۱) اور (۲) کو استعمال کرنے سے مطلوبہ مساوات

$$\frac{\text{۵۲}}{\text{ا} - \text{ب}} = \frac{\text{۲ لا ا}}{\text{ا} - \text{ا}}$$

$$\dots \dots \dots (۳) \quad \frac{\text{لا ا}}{\text{ا} - \text{ب}} = \frac{\text{لا ا}}{\text{ا} - \text{ب}}$$

ماثل ہوتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ دو خطوط مستقیم ۱۔ ۲ لا ا قط ط + لا = ۰ ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ ط بناتے ہیں۔

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات $لا + لا۲ - لا۱ + لا۳ = ۱۸$ دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔ جواب: ۲۵°

۳۔ ثابت کرو کہ حسب ذیل مساواتوں میں سے ہر ایک 'خطوط مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرتی ہے۔ ہر زوج کا درمیانی زاویہ بھی معلوم کرو۔

$$(۱) (لا - لا۱)(لا - لا۲) = ۰ \quad (۲) لا۱ - لا۲ = ۰$$

$$(۳) لا۱ = لا۲ \quad (۴) لا۱ - لا۲ - لا۳ + لا۴ = ۰$$

$$(۵) لا۱ - لا۲ + لا۳ + لا۴ = ۰ \quad (۶) لا۱ - لا۲ + لا۳ + لا۴ = ۰$$

$$(۷) لا۱ + لا۲ + لا۳ + لا۴ = ۰$$

۴۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

$$لا۱ - لا۲ + لا۳ + لا۴ = ۰$$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی؟ ثابت کرو کہ اگر یہ مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو ان کا درمیانی زاویہ سس' $\frac{1}{2}$ ہے جواب: لہ = ۲

۵۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

$$لا۱ + لا۲ - لا۳ + لا۴ = ۰$$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی؟ جواب: لہ = ۱۰ یا $-\frac{۲۵}{۳}$

۶۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

$$لا۱ + لا۲ + لا۳ + لا۴ = ۰$$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔ ایہ خطوط حقیقی ہیں یا خیالی؟

جواب: ۲۸

مثال ۷۔ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات $لا۱ + لا۲ + لا۳ + لا۴ = ۰$

جواب: لہ = $\frac{۱۵}{۲}$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی؟

۸۔ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو

$$لا۱ + لا۲ - لا۳ + لا۴ = ۰ \quad \text{اور} \quad لا۱ - لا۲ + لا۳ + لا۴ = ۰$$

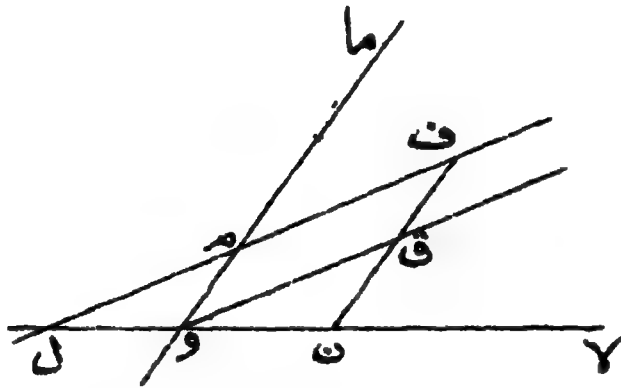
کے مشترک نقطوں کو مبداء سے ملاتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

$$\text{خطوط} \quad لا۱ + لا۲ - لا۳ + لا۴ = ۰ \quad \text{اور} \quad لا۱ - لا۲ + لا۳ + لا۴ = ۰ \quad \text{ہیں۔}$$

مائل محاور

(۳۶)

۴۰۔ خط مستقیم کی مساوات اُن محوروں کے حوالے سے معلوم کرنا جو ایک دوسرے سے زاویہ θ پر مائل ہوں۔



فرض کرو کہ l مرف کوئی خط مستقیم ہے جو محوروں سے نقاط l پر ملتا ہے۔

فرض کرو کہ خط l پر کسی نقطہ F کے محدد (l ، MA) ہیں۔
 F N کو محور MA کے متوازی اور Q کو خط l مرف کے متوازی کھینچو حسب شکل۔ تب

$$N F = N Q + Q F \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{لیکن } \frac{N F}{O N} = \frac{Q F}{O Q} \text{ جب } N Q \text{ مستقل} = \frac{Q F}{O Q} \text{ مستقل} = M \text{ (فرض کرو)}$$

$$\text{اور } Q F + Q M = Q N \text{ مستقل} = C \text{ (فرض کرو)}$$

اس لیے (۱) ہو جاتا ہے $MA = M + C$ جو مطلوبہ مساوات ہے۔
 اگر طہ وہ زاویہ ہو جو خط محور l کے ساتھ بناتا ہے تو

$$م = \frac{\text{جب ط}}{\text{جب (س۔ ط)}}$$

$$\text{مس ط} = \frac{م \text{ جب س}}{م \text{ جم س} + ۱}$$

۴۱۔ دفعات ماسبق کے متعدد نتیجے درست رہتے ہیں خواہ محاور قائم (۴۴) ہوں یا مائل۔ ان نتیجوں کو آسانی سے پہچان لیا جاسکتا ہے۔

۴۲۔ دو خطوط مستقیم کی مساواتیں، زاویہ سہ پر مائل محور وحوالے سے دو گئی ہیں۔ ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

اگر خطوں کی مساواتیں

ما = م لا + ج ، ما = م لا + ج
ہوں اور اگر طہ اور طہ وہ زاوے ہوں جو وہ علی الترتیب محور لا کے ساتھ بناتے ہیں تو (دفعہ ۴۰)

$$\text{مس ط} = \frac{م \text{ جب س}}{م \text{ جم س} + ۱} \text{ اور } \text{مس ط} = \frac{م \text{ جب س}}{م \text{ جم س} + ۱}$$

اس لیے مس (طہ۔ طہ) = $\frac{(م - م) \text{ جب س}}{(م + م) \text{ جم س} + ۱}$ (۱)
یا خطوں کا درمیانی زاویہ

$$\text{مس}^۱ = \frac{(م - م) \text{ جب س}}{(م + م) \text{ جم س} + ۱}$$

ہے۔

یہ خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں گے اگر

..... (۲) $\frac{(م + م) \text{ جم س} + ۱}{(م + م) \text{ جم س} + ۱} = ۰$
اگر خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰ \quad ۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

ہوں اور ان کے درمیان زاویہ طہ ہو تو م = - ب اور م = - ب اور اسلئے ان تیسوں کو (۱) میں درج کرنے سے

$$- (۱ ب - ۱ ب) جب سے$$

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰ \quad ۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

یہ خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے اگر

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰ \quad ۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

پس کوئی خط جو لا + ب + ما + ج = ۰ پر عمود ہے اس کی مساوات

$$(ب - ۱ جم) لا - (۱ ب - ۱ جم) ما = مستقل$$

ہے۔ بالخصوص خطوط لا + ما جم سے ۰ اور ما + لا جم سے ۰ علی الترتیب

محوروں ما = ۰ اور لا = ۰ کے عمود وار ہیں۔

$$۳۳ - خط \quad ۱ + لا + ب + ما + ج = ۰ \quad (۳۸)$$

سے کسی نقطہ (لا، ما) کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ خط محاور لا اور ما کو علی الترتیب نقاط ک اور ل پر قطع

کرتا ہے اور فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدود لا، ما ہیں اور

ف ن وہ عمود ہے جو اس سے خط ل ک پر کھینچا گیا ہے۔ تب

$$۵ فل ک = ۵ فل و + ۵ ف و ک - دل و ک ... (۱)$$

$$۵ فن ل ک = ۵ ول ل + ۵ و ل ک - و ل ک ... (۲)$$

اگر ہم مثلث کے رقبہ کی علامت کے لحاظ سے کوئی قرارداد اختیار

نہ کریں تو نقطہ اور خط کے مختلف محلوں کے لیے رشتہ (۱) میں ترمیم کرنی

ہوگی، لیکن مساوات (۲) ہر صورت میں درست رہتی ہے۔ طالب علم کو

چاہیے کہ مختلف شکلیں کھینچ کر اس بیان کی صداقت کا بطور خود نقیض کر لے۔

$$\begin{aligned} \text{اب وک} &= \text{ج} \text{ 'ول} = \text{ج} \\ \text{نیز لک} &= \text{وک} + \text{ول} - \text{وک} \times \text{ول جم} = \\ &= \frac{\text{ج}}{\text{اب}} (\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} \times \text{ب جم} = \\ &= (۲) \text{ سے} \end{aligned}$$

$$\text{فان} = \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} \times \text{ب جم} = \text{جب سے}}$$

دوسرا طریقہ

اس خط کی مساوات جو نقطہ ف (لا، ما) میں سے گزرتا ہے اور خط (لا + ب + ما + ج = ۰ پر عمود ہے

(ب - ا جم) (لا - لا) - (ا - ب جم) (ما - ما) = ۰
ہے۔ فرض کرو کہ عمود کے پائیں ن کے محدود لا، ما ہیں پس ن دونوں خطوں پر ہے اور اس لیے

$$\begin{aligned} (\text{ب} - \text{ا جم} - (\text{لا} - \text{لا}) - (\text{ا} - \text{ب جم} - (\text{ما} - \text{ما})) &= ۰ \dots (۱) \\ \text{اور } \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} &= ۰ \text{ جس کو لکھا جاسکتا ہے} \\ \text{ا جب} - (\text{لا} - \text{لا}) + \text{ب جب} - (\text{ما} - \text{ما}) &= \text{جب سے } (\text{ا} + \text{ب} + \text{ما} \\ + \text{ج}) &= ۰ \dots (۲) \end{aligned}$$

(۱) اور (۲) کا مربع لیکر جمع کرنے سے

$$\begin{aligned} (\text{ا} + \text{ب} - \text{ا} \times \text{ب جم} - (\text{لا} - \text{لا}) + (\text{ا} - \text{ب} - \text{ا} \times \text{ب} - (\text{ما} - \text{ما})) &+ (\text{ا} - \text{ب} - \text{ا} \times \text{ب جم} - (\text{ما} - \text{ما})) \\ = \text{جب سے } (\text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}) &= ۰ \end{aligned}$$

پس
$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10} = \text{ن ف}$$
 جب سے

۴۲* - خطوط

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا جبکہ محاورہ زاویہ سے پر مائل ہوں۔

اگر خطوط $1 = 2$ اور $3 = 4$

ہوں تو $1 + 2 = 3 + 4$

اور $1 = 2$

اس لیے $1 - 2 = 3 - 4$

لیکن $1 = 2$ اور $3 = 4$ کا درمیانی زاویہ

مستقل
$$\frac{(1 - 2) \text{ جب سے}}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}$$
 [دفعہ ۴۲] ہے، اس لیے مطلوبہ زاویہ

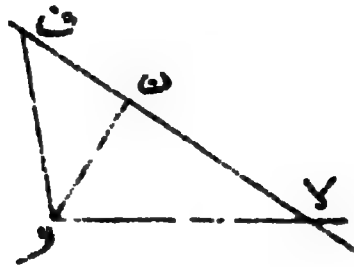
مستقل
$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}$$
 ہے۔

خطوط $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ ایک دوسرے کے علی التوا مائل ہونگے اگر $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

قطبی محدود

۴۵ - خط مستقیم کی قطبی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مبداء سے دیے ہوئے خط پر نمودون ہے اور فرض کرو کہ
ون = ع اور لا ون = ع۔
فرض کرو کہ خط پر کوئی نقطہ ف ہے اور اس کے محدود ر، ط ہیں۔



تب مثل میں زاویہ ن و ف، (ط۔ ع) ہے اور
و ف جم ن و ف = ون
اس لیے مطلوبہ مساوات
ر جم (ط۔ ع) = ع

ہے۔

اس مساوات کو مساوات لاجم ع + ما جب ع = ع میں لا کی
بجائے ر جم ط اور ما کی بجائے ر جب ط رکھ کر بھی ما مل کیا جاسکتا ہے۔

۶۶۔ دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے
خط کی قطبی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطے ف، ق اور ان کے محدود علی الترتیب ر، ط اور ر، ط ہیں۔

فرض کرو کہ خط پر کوئی نقطہ س ہے اور اس کے محدود ر، ط ہیں۔

اب چونکہ

$$\Delta ف وق + \Delta ق و س = \Delta ف و س$$

اس لیے ر ر جب (ط۔ ط) + ر ر جب (ط۔ ط) = ر ر جب (ط۔ ط) = ۰

اس لیے مطلوبہ مساوات

ز رجب (طہ - طہ) + ز رجب (طہ - طہ) + ز رجب (طہ - طہ) =

۴-

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مساوات $ما - لا = ۰$ سے حاصل ہوتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں خواہ محاور کے درمیان زاویہ کچھ ہی ہو۔

۲۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۱) میں سے گزرتے اور خط $لا + ۲ = ما$ کو علی القوائم قطع کرے، یہ معلوم ہے کہ محوروں کا درمیانی زاویہ ۶۰ ہے۔

جواب: $لا = ۱$

۳۔ وہ زاویہ معلوم کرو جو خط $ما = ۵ + لا + ۶$ محور لا کے ساتھ بناتا ہے جبکہ محاور ایک ایسے زاویہ پر مائل ہوں جس کی جیب التمام $\frac{3}{5}$ ہے۔

جواب: ۴۵

۴۔ اگر خطوط $ما = م + لا + ج$ اور $ما = م + لا + ج$ محور لا کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں تو

$$م + م + م + م = ۰$$

۵۔ اگر خطوط $(لا + ۲ ج + لا + ۲ ج + ما = ۰)$ محور لا کے ساتھ مساوی

زاویے بنائیں تو $ج = (جم) =$

۶۔ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مساوات

$$لا + ۲ لا + ما جم = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں، محاور زاویہ ۳۰ پر مائل

۷۔ اس خط پر جو نقطوں $(۲، ۱)$ اور $(۳، ۲)$ کو ملاتا ہے قطب سے

عمود کھینچا گیا ہے۔ اس عمود کے پائین کے قطبی مجدد معلوم کرو۔

۸۔ سب ذیل مثالوں سے اہم امور کی توضیح ہوتی ہے:-

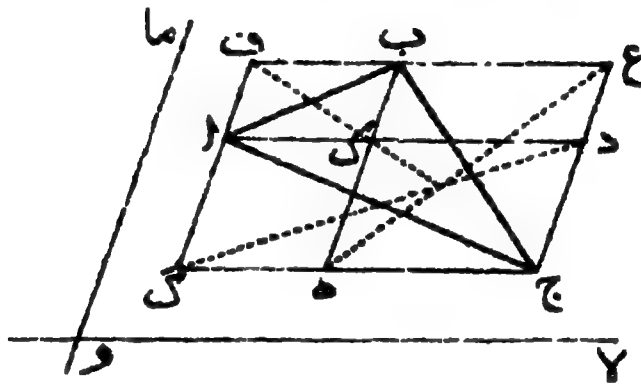
(۱) ایک مثلث کے اضلاع پر انہیں وتر مان کر متوازی

الاضلاع کھینچے گئے ہیں جن کے ضلع دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے

(۵۱)

متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان متوازی الاضلاعوں کے دوسرے وتر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

متوازی الاضلاعوں کے اضلاع کے متوازی کسی دو خطوں کو عمود فرض کرو۔ فرض کرو کہ مثلث کے راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے محدود علی الترتیب (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما) ہیں



اب اس متوازی الاضلاع پر غور کرو جس کا ایک وتر 'ا ب' ہے۔ اس کے دوسرے وتر کے سرے (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔ اس لیے وتر 'ف' کی مساوات

$$\frac{لا-لا}{لا-لا} = \frac{ما-ما}{ما-ما}$$

ہوگی

$$لا(ما-ما) + ما(لا-لا) + لا(لا-لا) = لا(لا-لا) + لا(لا-لا) + لا(لا-لا)$$

اسی طرح 'ح' کی مساوات

$$لا(ما-ما) + ما(لا-لا) + لا(لا-لا) = لا(لا-لا) + لا(لا-لا) + لا(لا-لا)$$

اور 'گ' کی مساوات

$$لا(ما-ما) + ما(لا-لا) + لا(لا-لا) = لا(لا-لا) + لا(لا-لا) + لا(لا-لا)$$

ہوگی۔

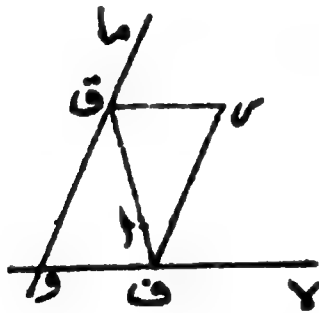
ان تین مساواتوں کا مجموعہ متساویاً معدوم ہوتا ہے اس لیے یہ تین خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ [دفعہ ۳۴]

(۲) ایک ثابت نقطہ (۱) میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو دو دیے ہوئے خطوط مستقیم ولا، و ما کو علی الترتیب نقطوں ف، ق پر قطع کرتا ہے۔ متوازی اناضلاع وف، ق کی تکمیل کی گئی ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

دیے ہوئے دو خطوط کو محاورہ تسلیم کرو اور فرض کرو کہ ا کے محدود ف، گ ہیں۔ فرض کرو کہ ف، ق کی مساوات، اس کے ممکنہ محلوں میں سے کسی ایک میں،

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا}{پ} + \frac{ما}{پ}$$

ہے۔ تب نقطہ س کے محدود و اور بہ ہوں گے۔



لیکن چونکہ خط ف، ق نقطہ (ف، گ) میں سے گزرتا ہے اس لیے قیمتیں لا = ف، ما = گ مساوات (۱) کو پورا کرتی ہیں۔ اس لیے

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ = \frac{گ}{پ} + \frac{ف}{پ}$$

پس نقطہ س کے محدود و اور بہ، رشتہ (۲) کو ہمیشہ پورا کرتے ہیں۔ نقطہ س کے محدود کو و اور بہ کی بجائے لا اور ما کہنے سے اس کے طریق کی مساوات

$$۱ = \frac{گ}{پ} + \frac{ف}{پ}$$

معلوم ہوتی ہے۔

(۳) ایک ثابت نقطہ و میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو دو دیے ہوئے متوازی خطوط مستقیم کو علی الترتیب نقطوں ف اور ق پر قطع کرتا ہے۔ ف اور ق میں سے خطوط مستقیم مستقل سمتوں میں کھینچے گئے ہیں جو نقطہ مرا پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مرا کا طریقہ ایک خط مستقیم ہے۔

ثابت نقطہ و کو مبدا اور محور ما کو متوازی خطوط مستقیم کے متوازی لو۔ فرض کرو کہ ان متوازی خطوط مستقیم کی مساداتیں $\text{لا} = \text{ا}$ ، $\text{لا} = \text{ب}$ ہیں۔

اب اگر وف ق کی مسادات $\text{ما} = \text{م}$ لا ہو تو ف کا فصله ا اور اس لیے اس کے سین کی قیمت م ا ہے۔ نیز ق کا فصله ب اور اس لیے اس کا سین م ب ہے۔

فرض کرو کہ ف مرا ہمیشہ خط $\text{ما} = \text{م}$ لا کے متوازی ہے اور ق مرا ہمیشہ $\text{ما} = \text{م}$ لا کے متوازی ہے تو ف مرا کی مسادات

$$\text{ما} = \text{م} \text{ ا} = \text{م} (\text{لا} - \text{ا}) \dots \dots \dots (۱)$$

اور ق مرا کی مسادات

$$\text{ا} = \text{م} \text{ ب} = \text{م} (\text{لا} - \text{ب}) \dots \dots \dots (۲)$$

ہوگی۔

نقطہ مرا پر رشتے (۱) اور (۲) دونوں پورے ہوں گے اور ہم م کی کسی مخصوص قیمت کے جواب میں مرا کے محدودوں کو ہم ذات مساداتیں (۱) اور (۲) کے حل کرنے سے معلوم کر سکیں گے۔ لیکن ہمارا مقصود یہ نہیں ہے۔ ہمیں تو وہ جبری رشتہ مطلوب ہے جو نقطہ مرا کے محدودوں (لا، ما) سے پورا ہوتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اس رشتہ کو معلوم کرنے کے لیے مساواتوں (۱) اور (۲) سے م کو صرف ساقط کرنا ہوگا۔ چنانچہ نتیجہ حاصل ہوگا۔

$$(\text{ب} - \text{ا}) \text{ ما} = \text{م} \text{ ب} (\text{لا} - \text{ا}) - \text{م} \text{ ا} (\text{لا} - \text{ب})$$

یہ مساوات پہلے درجہ کی ہے اور اس لیے مطلوبہ طریق ایک خاستقیم ہے۔

(۴) ایک مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ اس کے اندرونی

اور جانی دائروں کے مرکز معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ راسوں 'ا' 'ب' 'ج' کے محدود علی الترتیب (لا، لا) (لا، لا) (لا، لا) ہیں۔ جب 'ج' کی مساوات

$$1(لا-لا) - لا(لا-لا) + لا(لا-لا) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ہے، 'ج' کی مساوات

$$2(لا-لا) - لا(لا-لا) + لا(لا-لا) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ہے اور 'ب' کی مساوات

$$3(لا-لا) - لا(لا-لا) + لا(لا-لا) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ہے۔

مذکورہ دائروں میں سے کسی ایک کے مرکز سے ان خطوں پر عمود مقدار میں

مساوی ہیں۔ اس لیے ان چار دائروں کے مرکز مساواتوں

$$\frac{1(لا-لا) - لا(لا-لا) + لا(لا-لا)}{\sqrt{(لا-لا)^2 + (لا-لا)^2}} \pm =$$

$$\frac{2(لا-لا) - لا(لا-لا) + لا(لا-لا)}{\sqrt{(لا-لا)^2 + (لا-لا)^2}} \pm =$$

$$(4) \dots\dots\dots \frac{3(لا-لا) - لا(لا-لا) + لا(لا-لا)}{\sqrt{(لا-لا)^2 + (لا-لا)^2}} \pm =$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر مثلث کے راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے محدودوں کو مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) میں علی الترتیب دج کیا جائے تو ان تین مساواتوں کے دائیں جانبی اراکین وہی ہوں گے۔ اس لیے (دفعہ ۲۶) مثلث کے راس سب کے سب یا تو خطوط (۱)، (۲)، (۳) کی مثبت جانبوں پر واقع ہوں گے یا سب کے سب منفی جانبوں پر۔

اندرونی دائرہ کے مرکز سے مثلث کے ضلعوں پر عمود سب کے سب اسی سمت میں کھینچے ہوتے ہیں جس میں مثلث کے راسوں سے ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہوں۔ پس (۴) میں تمام ایہامات کی علامتیں اندرونی دائرہ کے لیے مثبت ہیں۔

جانبی دائروں کے لیے علامتیں علی الترتیب - +، +، -، -، +، +، -، - ہیں۔
مشاہدہ طلب ہے کہ (۴) میں مندرجہ آسروں کے نسب نامہ مثلث (۵۴)

'ا'، 'ب'، 'ج' کے اضلاع 'ا'، 'ب'، 'ج' ہیں۔
اب اگر تمام ایہامات کی علامتوں کو مثبت لیا جائے یعنی اگر (لا، ما) اندرونی مرکز (In-centre) ہو تو تینوں شمار کنندوں کا مجموعہ $\Delta r =$ اویسوں نسب ناموں کا مجموعہ $= ا + ب + ج$ کیونکہ لا اور ما کے مردونوں مجموعوں میں صفر ہیں۔

$$\text{پس ہر کسر} = \frac{\Delta r}{ا + ب + ج}$$

اب شمار کنندوں اور نسب ناموں کو ترتیب وار لا، لا، لا سے ضرب دو اور جمع کر دو تو ہر کسر

$$= \frac{لا \times \Delta r}{لا + لا + لا}$$

$$لا (ا + ب + ج) = لا + لا + لا$$

$$ما (ا + ب + ج) = ما + ما + ما$$

ان سے اندرونی مرکز کے محدود اضلاع کے طولوں اور راسوں کے محدود نکلی رقوم میں ماحصل ہوتے ہیں۔

نوٹ۔ اوپر کے نتیجہ کو ہم اس واقعہ سے بھی فوراً معلوم کر سکتے تھے کہ اندرونی مرکز (ب) ج پر کی تین کیتوں کے لیے جو متقابل کے اضلاع کی متناسب ہوں "کیت کا مرکز" ہے، اور یہ اس واقعہ سے مستنبط ہوتا ہے کہ وہ خط جو ہر اس اندرونی مرکز سے ملا تاہت مقابل کے ضلع کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے درمیان نسبت اس نسبت کا عکس ہوتی ہے جو اس کے سروں پر کی کیتوں کے درمیان۔

دوسرے باب پر مثالیں

۱۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت متقاطع خطوط پر اس کے مقطوعوں کے شکافیوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات $b^2 - a^2 = 2$ لایا $a + b = 2$ دو ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ جو علی الترتیب خطوط مستقیم $a + b = 2$ لایا $a + b = 2$ کے علی التواءم ہیں۔

۳۔ ن خطوں کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (ا، ب) میں سے گزریں اور مساوات

$$b^2 - a^2 = 2 \quad a + b = 2 \quad a + b = 2 \quad a + b = 2$$

سے تعبیر شدہ ن خطوں پر علی الترتیب عمود ہوں۔

۴۔ ان خطوط مستقیم کے درمیانی زاویے معلوم کرو جو مساوات

$$a^2 + b^2 = 2 \quad a^2 - b^2 = 2 \quad a^2 - b^2 = 2$$

سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۵۔ (ا، ب) دو ثابت خطوط مستقیم ہیں اور (ب، ثابت نقطہ)

ان خطوں پر ف' ق کوئی دو نقطے ہیں ایسے کہ نسبت اف : ب ق مستقل ہے۔
ثابت کرو کہ ف' ق کے وسطی نقطہ کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۶۔ اگر ایک خط مستقیم ایسا ہو کہ کئی ثابت نقطوں سے اس پر کھینچے ہوئے
عمودوں کا مجموعہ صفر ہو تو ثابت کرو کہ یہ خط مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گزریگا۔

۷۔ ف' ہ' ا' ف' ن وہ عمود ہیں جو ایک نقطہ ف' سے دو ثابت
خطوط مستقیم پر کھینچے گئے ہیں جو نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ن ق اور م ق کو ان خطوط مستقیم

کے متوازی ٹھہرایا گیا ہے اور وہ نقطہ ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر نقطہ ف'
کا طریق ایک خط مستقیم ہو تو نقطہ ق کا طریق بھی ایک خط مستقیم ہوگا۔

۸۔ ایک ثابت نقطہ و میں سے ایک خط مستقیم و ف' ق کھینچا
گیا ہے جو دو ثابت خطوط مستقیم سے نقاط ف' ق پر ملتا ہے۔ خط مستقیم

و ف' ق میں ایک نقطہ را ایسا لایا گیا ہے کہ و ف' و را و ق سلسلہ
موسیقیہ میں ہیں۔ ثابت کرو کہ را کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۹۔ خطوں ع = ج، ع = ج، ع = ج، ع = ج
سے بنے ہوئے متوازی الانضلاع کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جہاں

ع = لاجم ع + ماجب ع - ع
اور ع = لاجم ع + ماجب ع - ع

۱۰۔ (ب ج د ایک متوازی الانضلاع ہے۔ ا کو قطب اور ا ب
کو ابتدائی خط مان کر متوازی الانضلاع کے چار ضلعوں اور دو وتروں کی مساواتیں

معلوم کرو۔
۱۱۔ ایک دیئے ہوئے نقطہ (ہ' ک) سے محوروں پر عمود کھینچے گئے

ہیں اور ان عمودوں کے پائین کو ملا لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ (ہ' ک) سے اس
خط پر عمود کا طول

ک جب' سہ

$$\sqrt{ھ^۲ + ک^۲} = ک ھ ۲$$

ہے اور اس کی مساوات $لا - ک = ما - ض$ ہے۔
 ۱۲۔ دو خطوط مستقیم محدودوں کے مباد میں چھ گزرتے ہیں ان میں سے
 ہر خط سے ایک نقطہ (لا، ما) کا فاصلہ ض ہے۔ ثابت کرو کہ یہ دو خطوط مساوی
 (لا، ما - لا، با) = ض (لا، با + ما)

سے حاصل ہوتے ہیں۔
 ۱۳۔ دیے ہوئے خطوط مستقیم ولا، وما پر دو ثابت نقطے (ب
 اور نیز کوئی دو نقطے ف، ق لیے گئے ہیں ایسے کہ وف + وق = و
 + وب ثابت کرو کہ اق اور ب ف کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم
 ہے۔

۱۴۔ ایک مربع کے ضلعوں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے دو متقابل
 راسوں کے محدود ۳، ۴ اور ۱، ۱ ہیں۔

۱۵۔ ایک مثلث کا قاعدہ اور قاعدے پر کے زاویوں کا فرق دیے
 گئے ہیں۔ اس مثلث کے راس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۱۶۔ ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو کہ اس پر ایک ہی
 خط مستقیم کے دو دیے ہوئے حصوں کے محاذی مساوی زاویے بنیں۔
 ۱۷۔ خطوں

لاجم ط + ماجب ط = لا + لاجم ف + ماجب ف = لا
 ہر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب خط

لاجم ط + ف + ماجب ط = لا + لاجم ف = لا

پر اسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کے مربع کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ اس
 نقطہ کے طریق کی مساوات لا + ما = ا ہے۔

۱۸۔ ف، ف ب خط مستقیم ہیں جو ثابت نقطوں (ب
 میں سے گزرتے ہیں اور ایک دیے ہوئے خط پر متقل طول قطع کرتے ہیں۔ ف

میں سے ایک پر عمود ہو۔
۲۴۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۸'۱) اس مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز
ہے جس کے اضلاع کی مساواتیں علی الترتیب
 $۳ + لا = ۶$ ، $۲ + لا = ۵$ ، $۱ + لا = ۵$ ۔

ہیں۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے حدود
جس کے اس (۲'۱) (۳'۲) اور (۱'۳) ہیں $\frac{1}{4}$ (۸ + لا) اور $\frac{1}{4}$ (۱۶ - لا) ہیں۔ نیز جانبی دائروں کے مرکز معلوم کرو اور مختلف صورتوں کا
فوق دکھاؤ۔

۲۶۔ اگر محاور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

$$(لا - ۳) لا = م (۳ - لا)$$

سے ایسے تین خطوط تعمیر ہوتے ہیں جو مبداء میں سے گزرتے ہیں اور ایک
دوسرے کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

$$۲۷۔ خطوط ۱ لا + ۲ = لا + لا + ب لا =$$

پر نقطہ (لا' لا) سے عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کا مائل ضرب

$$\frac{۱ لا + ۲ = لا + لا + ب لا}{۱ (ب - ۱) + ۲ = ۲}$$

۴

۲۸۔ اگر نقطہ (لا' لا) سے خطوں ۱ لا + ۲ = لا + لا + ب لا = پر عمود
ع، ع، ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(ع' ع) (ع' ب) (ب - ۱) + ۲ = (۱ لا - ب لا)$$

$$۲ + (ب + ۱) لا + لا = ۲ (لا + لا)$$

۲۹۔ اگر تین خطوط مستقیم

۱. $\text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ا} = \text{د}$ ۔
 ہر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہو اور ک کے مساوی
 ہو تو ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق

$$1. \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ا} = \text{د} \quad \text{ک} = \sqrt{(1-\text{ج}) + (\text{ب} - \text{د})} = 2$$

۴-

(۵۸)

۳۰ - مساوات

$$1. \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ا} = \text{د}$$

سے تعبیر شدہ تین خطوں میں سے دو خطوط علی القوائم ہوں گے اگر

$$1. \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ا} = \text{د}$$

۳۱ - ثابت کرو کہ مساوات

$$1. \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ا} = \text{د}$$

سے خطوط مستقیم کے ایسے دو زوج تعبیر ہوتے ہیں جو علی القوائم ہیں۔ نیز اگر ۲ ب

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 + 49 + 50 + 51 + 52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 + 58 + 59 + 60 + 61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69 + 70 + 71 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 + 77 + 78 + 79 + 80 + 81 + 82 + 83 + 84 + 85 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

۳۲ - وہ ضروری اور کافی شرط کہ

$$1. \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ا} = \text{د}$$

سے تعبیر شدہ خطوط مستقیم میں سے دو علی القوائم ہوں یہ ہے کہ

$$1. \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ا} = \text{د}$$

۳۳ - دو منحنیوں

$$1. \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ا} = \text{د}$$

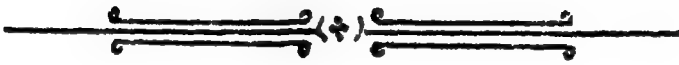
$$2. \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ا} = \text{د}$$

کے نقاط تقاطع کو مبداء سے ملا یا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ پلانے والے خطوط مستقیم

علی القوائم ہونگے اگر گ = (۱ + ب) = گ (۱ + ب) -

۳۴ - اگر ایک مثلث کے راسوں سے دوسرے مثلث کے اضلاع

کھینچے ہوئے عمود ایک نقطہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ دوسرے مثلث کے راسوں سے پہلے مثلث کے اضلاع پر کھینچے ہوئے عمود بھی ایک نقطہ پر ملیں گے۔
 ۳۵۔ اگر ایک مثلث کے راس تین ہم نقطہ ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہوں اور مثلث کے دو اضلاع ثابت نقطوں میں سے گذریں تو ثابت کرو کہ تیسرا ضلع بھی ایک ثابت نقطہ میں سے گذریگا۔

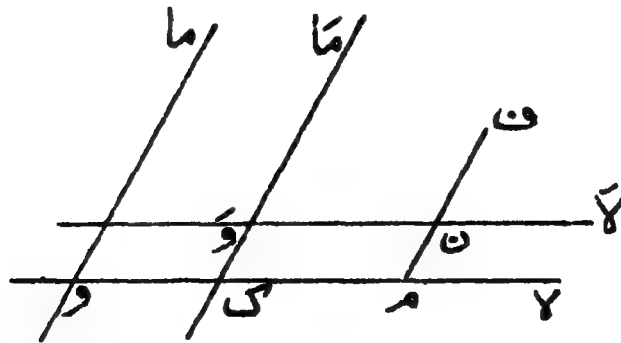


تیسرا باب

(۵۹) محور کی تبدیلی غیر موسمی نسبتیں یا چلیپی نسبتیں۔ درپچ
محوروں کی تبدیلی

۴۸۔ جب ہمیں محوروں کے ایک جٹ کے حوالے سے ایک منحنی کی مساوات معلوم ہو تو ہم محوروں کے دوسرے جٹ کے حوالے سے اس کی مساوات کو اخذ کر سکتے ہیں۔

۴۹۔ محوروں کی سمت بدلے بغیر محدودوں کے مبداء کو تبدیل کرنا۔

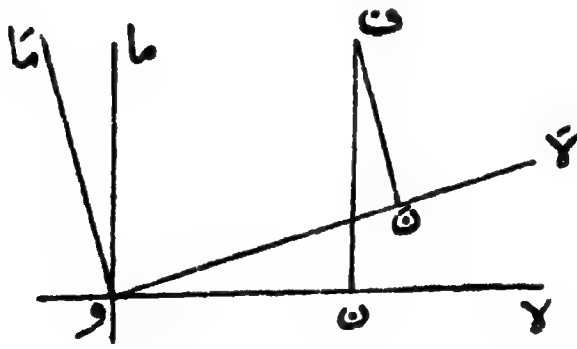


فرض کرو کہ ابتدائی محاور و لا، و ما ہیں اور نئے محاور و لا،

وَمَا جِہَاں وَلَا، وَلَا کے متوازی اور وَمَا، وَمَا کے متوازی ہے۔
فرض کرو کہ ابتدائی محوروں کے حوالے سے وَ کے محدود، ک ہیں۔
فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدود ابتدائی محوروں کے
حوالے سے لَا، مَا اور نئے محوروں کے حوالے سے لَا، مَا ہیں۔ ف م کو
وَمَا کے متوازی کیسے اور فرض کرو کہ ف م، وَلَا کو م پر اور وَلَا کو
ن پر قطع کرتا ہے۔

تب لا = دم = وک + ک م = وک + و ن = م + لا (۶۰)
اور ما = م ف = م ن + ن ف = ک و + ن ف = ک + ما
پس کسی نقطہ کے ابتدائی محدود، نئے محدود کی رقوم میں معلوم ہو چکے
اور اگر ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں درج کیا جائے تو منحنی کی نئی مساوات
حاصل ہوگی۔
ادھر کے بیان میں محاور قائم یاائل ہو سکتے ہیں۔

۵۔ مبداء کو بدلے بغیر محوروں کی سمت تبدیل کرنا
جبکہ دونوں نظام قائم ہوں۔



فرض کرو کہ ابتدائی محاور وَلَا، وَمَا ہیں اور نئے محاور وَلَا،
وَمَا۔ فرض کرو کہ زاویہ لا و لا = طہ۔

فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدود ابتدائی محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لا، ما ہیں۔ ف ن کو ولا پر عمود اور ف ن کو ولا پر عمود مینچو۔

کسی خط پر ون اور ن ف کے غلوں کا مجموعہ، اس خط پر ون اور ن ف کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

$$\text{اب ولا اور و ما پر غل ل تو تو}$$

$$\text{لا = لا جم ط + ما جم (ط + \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{اور } \text{ما = لا جم (ط - \frac{\pi}{4}) + ما جم ط}$$

$$\text{یعنے } \text{لا = لا جم ط - ما جم ط}$$

$$\text{ما = لا جم ط + ما جم ط}$$

(۶۱) پس کسی نقطہ کے ابتدائی محدود نئے محدودوں کی رقوم میں معلوم ہو چکے اور اگر ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں درج کیا جائے تو منحنی کی نئی مساوات حاصل ہوگی۔

مثال ۱۔ ایک منحنی کی مساوات $3\text{لا} + 2\text{لا} + 3\text{ما} - 18\text{لا}$ ہے۔ نقطہ (۳، ۲) میں سے گزرنے والے قائم محاور کے حوالے سے یہ مساوات کیا ہو جائے گی جبکہ لا کا نیا محور پرانے محور کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائے۔

اول مبداء کو نقطہ (۳، ۲) پر منتقل کرو جس کے لیے لا، ما کی بجائے علی الترتیب لا، ۲، ما، ۳ رکھنا ہو گا چنانچہ نئی مساوات

$$3(2 + لا) + 2(2 + لا) + (3 + ما) + (3 + ما) - 18(2 + لا) = 0$$

$$\text{ہوگی جو}$$

$$3\text{لا} + 2\text{لا} + 3\text{ما} - 18\text{لا} = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے یا زبروں کو اڑا دیا جائے تو

$$۳ \text{ لا}^۲ + ۲ \text{ لا} \text{ ما} + ۳ \text{ ما}^۲ - ۱ = ۰ \dots \dots (۱)$$

محوروں کو ۵۰° کے زاویہ میں سے گھمانے کے لیے لا کی بجائے لا^۱ - ما^۱/_۲ اور ما کی بجائے لا^۱/_۲ + ما^۱/_۲ رکھنا چاہیے۔ تب مساوات (۱)

$$۱ = ۳ \left(\frac{\text{لا} - \text{ما}}{\sqrt{۲}} \right)^۲ + \left(\frac{\text{لا} + \text{ما}}{\sqrt{۲}} \right)^۳ + \left(\frac{\text{لا} + \text{ما}}{\sqrt{۲}} \right)^۳$$

ہو جائے گی جو ۴ لا^۲ + ۲ ما^۲ = ۱ میں تحویل ہوتی ہے۔
پس مطلوبہ مساوات

$$۴ \text{ لا}^۲ + ۲ \text{ ما}^۲ = ۱$$

۴۔ مثال ۲۔ مساوات لا^۲ - ما^۲ + ۲ لا + ۴ ما = ۰ کیا ہو جائیگی جبکہ مبدا کو نقطہ (۱، ۱) پر منتقل کیا جائے؟ جواب: لا^۱ - ما^۱ + ۳ = ۰۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ مساوات ۶ لا + ۵ لا ما - ۶ ما^۲ + ۵ لا + ۵ ما = ۰ ان محوروں کے حوالے سے جو ایک خاص نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور ابتدائی محوروں کے متوازی ہیں ۶ لا^۱ + ۵ لا ما - ۶ ما^۱ = ۰ ہو جاتی ہے۔
جواب: نقطہ (۱، ۱) ہے۔

مثال ۴۔ مساوات ۴ لا^۲ + ۲ لا + ۳ لا ما + ۲ ما^۲ - ۱ = ۰ کیا ہو جائیگی جبکہ محوروں کو ۳۰° کے زاویہ میں سے گھما دیا جائے؟

جواب: ۵ لا^۲ + ما^۲ - ۱ = ۰۔

مثال ۵۔ مساوات لا^۲ - ۲ لا ما + ما^۲ + لا - ۳ ما = ۰ کو ان محوروں کے حوالے سے معلوم کرو جو نقطہ (۱، -۱) میں سے گزرتے ہیں اور ان خطوں کے متوازی ہیں جو ابتدائی محوروں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔

جواب: ۲ لا^۲ - ما^۲ = ۰۔

وما کے متوازی اور مرف، وما کے متوازی ہے۔
کسی خط پر وما اور مرف کے ظلوں کا مجموعہ، اس خط پر وما
اور مرف کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔
ایک ایسے خط پر ظل لوجو ولا پر نمود ہے، تب

$$\text{ما جب سہ} = \text{لاجم (ط - ۳)} + \text{ماجم (ط + سہ - ۳)}$$

$$\text{ما جب سہ} = \text{لاجم ط} + \text{ما جب (ط + سہ)}$$

پھر ایک ایسے خط پر ظل لوجو ولا پر نمود ہے، تب

$$\text{لاجم (سہ + ۳)} = \text{لاجم (سہ + ۳ - ط)} + \text{ماجم (سہ + ۳ - ط - سہ)}$$

$$\text{لاجم سہ} = \text{لاجم (سہ - ط)} + \text{ماجم (سہ - سہ - ط)}$$

یہ مضابطے شاذ ہی استعمال کئے جاتے ہیں۔ وہ نتیجے جو محوروں کی
تبدیلی سے حاصل ہوتے ہیں بالعموم بالواسطہ معلوم کئے جاتے ہیں،
جیسا کہ حسب ذیل مثال میں کیا گیا ہے۔

۵۲۔ اگر محوروں کی تبدیلی سے (لا + ۲ = لا ما + ب ما) (۴۳)

بدل کر (لا + ۲ = لا ما + ب ما) ہو جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(لا + ب - ۲ = جم سہ)}{\text{جب سہ}} = \frac{(لا + ب - ۲ = جم سہ)}{\text{جب سہ}}$$

جہاں سہ اور سہ محوروں کے ان دو جٹوں کے زوایاے
میلان ہیں۔

اگر مبداء و ہو اور ف کوئی نقطہ ہو جس کے محدود ابتدائی
محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لا، ما
ہیں تو

نیز
 وف^۱ = لا^۱ + ما^۲ + ۲ لا^۲ ما^۱ جم سے
 وف^۲ = لا^۲ + ما^۱ + ۲ لا^۱ ما^۲ جم سے
 پس لا^۱ + ما^۲ + ۲ لا^۲ ما^۱ جم سے بدل کر لا^۲ + ما^۱ + ۲ لا^۱ ما^۲ جم سے ہو جاتا ہے۔ نیز بموجب فرض

لا^۱ + ۲ لا^۲ ما^۱ + ب ما^۲ بدل کر لا^۲ + ۲ لا^۱ ما^۲ + ب ما^۱ ہوتا ہے۔ اس لیے اگر لہ کوئی مستقل عدد ہو تو

لا^۱ + ۲ لا^۲ ما^۱ + ب ما^۲ لہ (لا^۱ + ۲ لا^۲ ما^۱ جم سے + ما^۲)
 بدل کر لا^۲ + ۲ لا^۱ ما^۲ + ب ما^۱ لہ (لا^۲ + ۲ لا^۱ ما^۲ جم سے + ما^۱)
 ہو جائے گا۔ پس اگر لہ کو ایسا منتخب کیا جائے کہ ان میں سے ایک جملہ کامل مربع ہو تو دوسرا بھی لہ کی اسی قیمت کے لیے کامل مربع ہوگا۔
 جملہ اول کامل مربع ہوگا اگر

$$(ل + لہ) (ب + لہ) - (لہ + لہ جم سے) = ۰$$

اور جملہ دوم کامل مربع ہوگا اگر

$$(ل + لہ) (ب + لہ) - (لہ + لہ جم سے) = ۰$$

لہ کو معلوم کرنے کے لیے درجہ دوم کی یہ جو دو مساواتیں ہیں ان کی اصلیں وہی ہونی چاہئیں۔ ان کو اقل حال

$$لہ جب ۱ سے (ل + لہ) (ب + لہ) - (لہ + لہ جم سے) = ۰$$

اور لہ جب ۲ سے (ل + لہ) (ب + لہ) - (لہ + لہ جم سے) = ۰

میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$(۱) \dots \frac{ل + ب - ۲ جم سے}{جب ۱ سے} = \frac{ل + ب - ۲ جم سے}{جب ۲ سے}$$

$$(۲) \dots \frac{ل + ب - ۲ جم سے}{جب ۱ سے} = \frac{ل + ب - ۲ جم سے}{جب ۲ سے}$$

اور

اگر محوروں کے یہ دو جٹ علی القوائم ہوں تو یہ مساواتیں حسب ذیل سادہ شکلیں اختیار کرتی ہیں:

$$۱ + ب = ۱ + ب' \quad ۱ + ب = ۱ + ب' \quad ۱ + ب = ۱ + ب' \quad \dots (۳)$$

۵۳۔ محوروں کے کسی تغیر سے مساوات کا درجہ نہیں بدلتا۔

دفعات ۴۹، ۵۰، اور ۵۱ سے ہم دیکھتے ہیں کہ محوروں کو خواہ کسی طرح تبدیل کیا جائے نئی مساوات لا اور ما کی بجائے شکل

$$ل + آ + م + ن = ل + آ + م + ن$$

کے جملوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ جملے پہلے درج کے ہیں اور اس لیے ابتدائی مساوات میں لا اور ما کی بجائے یہ جملے درج کئے جائیں تو مساوات کے درج میں کوئی اضافہ نہیں ہوگا۔ اسی طرح مساوات کا درجہ گھٹ نہیں سکتا کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو نئی مساوات سے پرانی مساوات پر عود کرنے سے درجہ میں اضافہ ہونا چاہئے۔

مثال ۱۔ تمام محوروں کے حقیقی استحالہ سے ثابت کرو کہ اگر لا +

$$۲ لا + ما + ب = ۲ لا + ما + ب' \quad ۲ لا + ما + ب = ۲ لا + ما + ب'$$

اور

$$۲ لا + ما + ب = ۲ لا + ما + ب'$$

مثال ۲۔ محوروں کے ایک جٹ سے دوسرے جٹ میں متغیر

کرنے کے لیے ضابطہ

$$لا = م + لا + ن + ما' \quad ما = م + لا + ن + ما'$$

ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{م + م}{ن + ن} = \frac{۱ - ۱}{۱ - ۱}$$

جبکہ دونوں جٹوں میں مبداء وہی ہو۔

[لا + ما + ۲ لا + ما + ب بدلتا ۲ لا + ما + ب' ہوگا۔ اسیلے

اور ما کی بجائے دے ہوئے چلے درج کرواد لا اور ما کے سروں کو اکائی مساوی رکھو اور پھر جم سے کو ساقط کرو۔

مثال ۳۔ ان طریقوں (Loc) کی مساواتیں معلوم کرو جو

$$(ا + لا + ب + ما + ج) = (ا + ب)$$

$$(ا + لا + ب + ما + ج) = (ب + لا - ا + ما + د) = (ا + ب)$$

اور
تعبیر ہوتے ہیں جبکہ عمودی خطوط $ا + لا + ب + ما + ج =$ اور $ب + لا - ا + ما + د =$ ملی ترتیب لا اور ما کے محوروں کے طور پر بنایا گیا ہو۔

جواب: $ا = ۱$ ، $لا = ۱$ ، $ب = ۱$ ، $ما = ۱$ ، $ج = ۱$ ، $د = ۱$ ۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ مساواتوں

$$ا + لا + ب + ما + ج = ۰ \text{ اور } (ا + لا + ب + ما) = ۲ - (ب + لا - ا + ما) = ۰$$

سے تعبیر شدہ خطوط ایک متساوی الاضلاع مثلث کے ضلع بناتے ہیں۔
[محوروں کو خطوط $ا + لا + ب + ما = ۰$ اور $ب + لا - ا + ما = ۰$ پر تبدیل کرو یہ مساواتیں

$$ا + لا + ب + ما + ج = ۰ \text{ اور } ما - ۳ - لا = ۰$$

جائے گا اور نتیجہ واضح ہے۔]

غیر موسیقی یا چلیپی نسبتیں

* ۵۔ ایک خط مستقیم پر نقطوں کے کسی جٹ کو سمت کہتے ہیں،

ایک نقطہ میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کے کسی جٹ کو پینل کہتے ہیں اور اس کے ہر خط کو شعاع یا کرن کہتے ہیں۔

اگر ایک خط مستقیم پر 'ف'، 'ق'، 'س'، 'س' چار نقطے ہوں تو نسبت

$$\frac{ف ق}{ق س} : \frac{ف س}{س س} \text{ یا } \frac{ف ق}{ق س} : \frac{ف س}{س س}$$

کو سعت ف، ق، ر، س کی غیر موسیقی نسبت یا چلیبی نسبت
کہا جاتا ہے اور اس کو {ف، ق، ر، س} سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ موسیقی
اگر ایک سعت کی چلیبی نسبت۔ ا کے مساوی ہو تو اس کو موسیقی
کہتے ہیں۔

یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر {ف، ق، ر، س} = ۱۔ ا تو
ف، ق، ر، س = (ف، ر) - (ف، ق) : (ف، س - ف، ر)
اس لیے ف، ق، ر، س سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔
اگر ف، ق، ر، س موسیقی سعت ہو تو ق، ر، س کو ف، ر، س
کے لحاظ سے موسیقی طور پر مخروں کہا جاتا ہے۔

۵۵۔ اگر چار خطوط مستقیم وف، وق، ور، و س کسی
خط مستقیم سے علی الترتیب نقاط ف، ق، ر، س پر قطع ہوں
تو سعت ف، ق، ر، س کی چلیبی نسبت مستقل ہوتی ہے۔
فرض کرو کہ دئے ہوئے خطوں کی مساواتیں

$$۱ = م، لا، م = م، لا، م = م، لا، م = م، لا$$

ہیں۔
فرض کرو کہ قاطع خط ف، ق، ر، س مساوات ۱ = م، لا، م سے
تعبیر ہوتا ہے۔ تب اگر مخروں لا، م، ف، ق، ر، س کے ظل ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶
ہوں تو مبداء سے ایہہ زلیوں کے فاصلے علی الترتیب

$$\frac{ک}{م-۱}، \frac{ک}{م-۲}، \frac{ک}{م-۳}، \frac{ک}{م-۴}$$

ہوں گے۔ پس

$$\frac{\text{ف ق م ر س} = \text{و ب م ج د}}{\text{ن س م ر ق} = \text{ا د م ج ب}} \\ \left\{ \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ا}} - \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ب}} \right\} \left\{ \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ج}} - \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{د}} \right\} = \\ \left\{ \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ا}} - \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ب}} \right\} \left\{ \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{ج}} - \frac{\text{ک}}{\text{م} - \text{د}} \right\} \\ = \frac{(\text{م} - \text{ا})(\text{م} - \text{ب})}{(\text{م} - \text{ج})(\text{م} - \text{د})}$$

جو خط ف ق ر س کے محل پر منحصر نہیں ہے اور اس لیے مستقل ہے۔

چار خطوں کی پنسل کی چلیبی نسبت سے افراد اس سمت کی

چلیبی نسبت ہوتی ہے جس میں کسی دوسرے خط سے یہ پنسل منقطع ہوتی ہے۔

۵۶۔ اس پنسل کی چلیبی نسبت معلوم کرنا جو مساواتوں (۶۶)

$$\text{ا} = \text{ب} \quad \text{ب} = \text{ج} \quad \text{ج} = \text{د} \quad \text{د} = \text{ا}$$

سے تعبیر شدہ خطوطِ مستقیم سے بنے۔

یہ گزشتہ مسئلہ کی مخصوص صورت ہے جبکہ م = ۱ اور م = ۰۔

گزشتہ دفعہ کی بموجب پنسل کو کسی خط سے قطع کر کے چلیبی نسبت معلوم کی جا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ خط لا = ۱ پنسل کو قطع کرتا ہے، تب م کی دو قیمتیں جہاں یہ خط پنسل کے خطوں کو قطع کرتا ہے علی الترتیب

$$\infty \quad \text{م} \quad ۰ \quad \text{م}$$

ہیں۔ پس مطلوبہ چھپتی نسبت

$$\frac{م}{م} = \frac{م \times \infty}{م \times \infty}$$

ہے۔

ظاہر ہے کہ خطوط

لا۔۔۔، ما۔ م لا۔۔، ما۔۔، ما۔ م لا۔۔

سے یہ موسیقی پیش بنتی ہے

اگر محاور ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو خطوط ما۔ م لا۔۔، اور ما۔ م لا۔۔ دو محوروں میں سے کسی ایک سے مساوی زاوے بناتے ہیں۔

پس اگر کوئی پیش موسیقی ہو اور دو متبادلہ کریں ایک دوسری کے علی القوائم ہوں تو یہ کریں دوسری دو کرونوں کے اندرونی اور بیرونی زاویوں کی تصنیف کریں گی۔

۵۔ ذواربعۃ الاضلاع کے تین وتروں میں سے ہر وتر دوسرے دو وتروں سے موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ خطوط مستقیم ق ا ب، ق د ج، ف د ا اور ف ج ب، ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع ہیں۔ وہ خط جو ان میں سے دو نقطوں کے نقطہ تقاطع کو دوسرے دو خطوں کے نقطہ تقاطع سے ملتا ہے ذواربعۃ الاضلاع کا ایک وتر ہے۔ اس لیے تین وتر ہوتے ہیں یعنی ف ق، ا ج، ب د (شکل دیکھو)

ب ج اور ب ا کو علی الترتیب محاور لا اور ما فرض کرو۔

فرض کرو کہ نقطوں ج، ف، ا، ق کے محدود علی الترتیب

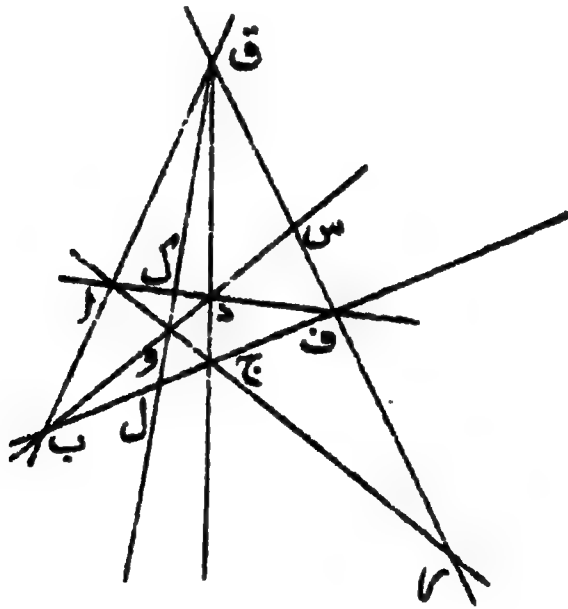
(۶۴) (لا، ۰)، (۰، لا)، (۰، ما)، اور (۰، ما) ہیں۔
اب ج (۰، لا) اور ف (۰، لا) کی مساواتیں

$$۰ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}، ۰ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$$

ہیں۔ اس لیے ب سے کی مساوات

$$۰ = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\right)$$

ہے۔



ا ف اور ج ق کی مساواتیں

$$۰ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}، ۰ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$$

ہیں۔ اس لیے ب سے کی مساوات

$$۰ = \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\right) - \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\right)$$

۴۔

دفعہ ۵۶ سے یہ مستطط ہوتا ہے کہ پنسل ب (ب' د' ب ج' ب' س' موسیقی پنسل ہے اور اس لیے سعتیں 'ا' و 'ج' 'س' اور 'ف' 'س' موسیقی ہیں۔

۵۸۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ خطوط مستقیم لا + لا + لا + لا + لا + لا = ب + ما =۔ اور لا + لا + لا + لا + لا + لا = ب + ما =۔ موسیقی طور پر مزدوج ہوں۔

فرض کرو کہ خطوں کے زوج

اور

$$\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ما} \quad \text{لا} = \text{ما} \\ \text{لا} &= \text{ما} \quad \text{لا} = \text{ما} \\ \text{لا} &= \text{ما} \quad \text{لا} = \text{ما} \end{aligned}$$
 ہیں۔ اب اگر ما = لا، لا = ما، لا = ما، لا = ما، لا = ما، لا = ما سے موسیقی پنسل بنے تو حاصل ہونا چاہیے (دفعہ ۵۵)

$$1 = \frac{(2-1)(2-1)}{(2-1)(2-1)}$$

$$\text{یا} \quad 2 \times 2 + 2 \times 2 = (2+1)(2+1)$$

لیکن دی ہوئی مساواتوں سے

$$2 + 2 = 2 \times 2 \quad \frac{2}{2} = 1 \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2 + 2 = 2 \times 2 \quad \frac{2}{2} = 1 \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

پس مطلوبہ شرط

$$2 + 2 = 2 \times 2$$

۵۹۔

اُسی طریقہ پر ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ نقطوں کے وہ زوج جو مساواتوں

۱ لا + ۲ لا + ب = ۰، اور ۱ لا + ۲ لا + ب = ۰
 سے مائل ہوتے ہیں موسیقی طور پر مزدوج ہوں گے اگر
 ۱ ب + ۲ ب = ۰

درپہنچ

۶۰۔ تعریف۔ فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے خط مستقیم پر
 و ایک ثابت نقطہ ہے اور اسی خط پر نقطوں کے جوڑے ف'ف'،
 ق'ق'، س'س'، وغیرہ ایسے ہیں کہ
 وف × وف = وق × وق = ورا × ورا = ... = مستقل = ک
 تب ہم کہتے ہیں کہ یہ نقطے درپہنچ میں ایک نظام بناتے ہیں اور نقطہ و اس
 نظام کا مرکز ہے۔ ف'ف' جیسے دو نقطے ایک دوسرے کے مزدوج
 کہلاتے ہیں۔ مرکز کا مزدوج نقطہ لامتناہی فاصلہ پر ہوتا ہے۔
 اگر ہر نقطہ مرکز کے اسی جانب ہو جس جانب اس کا مزدوج ہے
 تو دو نقطے ک'ک'، مرکز کے مخالف جانبوں پر ایسے موجود ہوں گے
 کہ وک' = وک' = وف × وف = ان نقطوں ک'ک' کو دوسرے
 نقطے یا مائلے کہا جاتا ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ جب یہ دو مائلے دیے گئے ہوں تو درپہنچ پوری طرح
 متعین ہو جاتا ہے۔
 مزدوج نقطوں کے دو زوج معلوم ہوں تو بھی درپہنچ پوری طرح
 متعین ہوتا ہے۔
 کیونکہ فرض کرو کہ ان نقطوں ۱، ۲ اور ب'ب' (فرض کرو)
 کے فاصلے کسی نقطہ سے جو اس خط مستقیم میں ہے جس میں دیے ہوئے

نقطے واقع ہیں 'ا' اور 'ب' ہیں۔ فرض کرو کہ درپیش کے مرکز کا فاصلہ اُسی نقطہ سے لا ہے۔ تب حسب ذیل رشتہ حاصل ہوتا ہے:

$$(ا - لا) (ا - لا) = (ب - لا) (ب - لا)$$

$$(ا + ا - ب - ب) لا = لا - لا - ب - ب$$

پس مرکز کا صرف ایک محل ہے۔
یہ مشاہد، طلب ہے کہ اگر $ا + ا = ب + ب$ یعنی اگر 'ا' اور 'ب' کا نصف وسطی ایک ہی ہو تو ان چار نقطوں سے جو درپیش متعین ہوگا اُس کا مرکز لاتنا ہی یہ ہوگا اور اس کے بالعکس۔

اس طرح اگر نقطوں کے کوئی زوج 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ج' وغیرہ ایسے ہوں کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' وغیرہ کے نقاط وسطی منطبق ہوتے ہوں تو ان نقطوں سے درپیش کا وہ نظام حاصل ہوگا جس کا مرکز لاتنا ہی پر ہوگا۔

مرکز کے محل کو ہندسی طریقہ پر اسی طرح معلوم کیا جاسکتا ہے کہ مزدوج نقطوں کے دو جوڑوں میں سے ایک ایک کو لے کر اس کے نقطوں میں سے گزرتا ہوا ایک دائرہ کھینچا جائے تو (اقلیدس مقالہ ۳ مسئلہ ۳) ان دائروں کا مشترک وتر اُس خط کو جس پر مزدوج نقطے واقع ہیں مطلوبہ مرکز میں قطع کرے گا۔

۶۱۔ اگر متعدد نقطے درپیش میں ہوں تو ان میں سے کسی چار نقطوں کی چلیپی نسبت ان کے چار مزدوجوں کی چلیپی نسبت کے مساوی ہوگی۔

فرض کرو کہ کوئی چار نقطے 'ف'، 'ق'، 'س'، 'س' ہیں اور مرکز سے ان نقطوں کے فاصلے علی الترتیب 'ف'، 'ق'، 'ر'، 'س' ہیں اس لیے ان کے مزدوجوں کے

$$\text{فاصلے } \frac{ف}{ق}، \frac{ق}{ر}، \frac{ر}{س}، \frac{س}{ف} \text{ ہوں گے۔ تب}$$

$$\left\{ \frac{ف}{ق} \frac{س}{ر} \right\} = \left\{ \frac{ق}{ر} \frac{س}{ف} \right\}$$

$$\text{اور } \left\{ \begin{array}{c} \text{ک} \\ \text{ق} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{ک} \\ \text{ق} \end{array} \right\} = \frac{\left(\frac{\text{ک}}{\text{ق}} - \frac{\text{ک}}{\text{ر}} \right)}{\left(\frac{\text{ک}}{\text{ق}} - \frac{\text{ک}}{\text{ر}} \right)} = \frac{\left(\text{ق} - \text{ر} \right)}{\left(\text{ق} - \text{ر} \right)} = 1$$

پس $\left\{ \begin{array}{c} \text{ف} \\ \text{ق} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{ف} \\ \text{ق} \end{array} \right\}$ اس سے ہم اس امر کا امتحان کر سکتے ہیں کہ آیا کوئی اچھے نقطے درپیش ہیں یا نہیں۔ کیونکہ ۱، ۲ اور ب، ب سے مائل شدہ درپیش ہیں

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{ف} \\ \text{ق} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{ف} \\ \text{ق} \end{array} \right\}$$

۹۲۔ درپیش کے کوئی دو مزدوج نقطے اور اس کے دو ایک موسیقی سعت بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ درپیش کے دو اسکے ک، ک ہیں اور مرکز وہ ہے۔
فرض کرو کہ ک، و = ج = وک۔
تب و سے نقطوں ک، ک کے فاصلے مساوات
لا = ج = ۰

کی اصلیں ہیں۔
نیز و سے مزدوج نقطوں کے کسی زوج کے فاصلے مساوات
لا + لا = ج = ۰

کی اصلیں ہیں۔
پس مسئلہ دفعہ ۵۸ سے فوراً ماخوذ ہوتا ہے۔

۹۳۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ مساواتوں

$$\text{لا} + \text{لا} = \text{ب} = ۰, \text{لا} + \text{لا} = \text{ب} = ۰$$

$$1. \text{ لا} + 2. \text{ لا} + 3. \text{ لا} = 0$$

سے حاصل شدہ نقطوں کے تین زون درپچ میں ہوں۔

ان فاصلوں کا حاصل ضرب جوہر زون کے دو نقطے کسی نقطہ لا = د سے رکھتے ہیں ایک ہی ہونا چاہئے، فرض کرو کہ وہ لہ کے مساوی ہے۔

مساوات

(۷۱)

$$1. (لا - د) + 2. (لا - د) + 3. (لا - د) = 0$$

کی اصلوں کا حاصل ضرب

$$(1. د - 2. د + 3. د)$$

ہے۔ پس لہ کی کسی قیمت کے لئے حاصل ہونا چاہئے

$$1. (د - ل) - 2. (د - ل) + 3. (د - ل) = 0$$

$$1. (د - ل) - 2. (د - ل) + 3. (د - ل) = 0$$

$$1. (د - ل) - 2. (د - ل) + 3. (د - ل) = 0$$

د - ل اور د کو ساقط کرنے سے مطلوبہ شرط

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۶۴۔ دفعہ ماسبق سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ایک خط مستقیم پر چھ نقطوں کو جو درپچ میں ہوں کسی نقطہ سے ملایا جائے تو اس طریقہ سے جو پنسل بنے گی وہ کسی دوسرے خط مستقیم سے ایسے چھ نقطوں میں منقطع ہوگی جو درپچ میں ہوں گے۔

سب سے اول یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر چھ خطوں کی کوئی پنسل کسی خط مستقیم ف ق سے نقطوں کے ایسے تین زوجوں میں قطع ہو جو درپچ میں

ہوں تو یہ نپل ف ق کے متوازی کسی خط سے درپچ میں قطع ہوگی۔

اب فرض کرو کہ خطوط مستقیم کے تین زوج

$$1 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 4 \text{ لا} = 0 \text{ وغیرہ}$$

ہیں جہاں محور لا اس خط کے متوازی ہے جو خطوں کو نقطوں کے ایسے زوجوں میں قطع کرتا ہے جو درپچ میں ہیں، اور محور ما کسی دوسرے خط مستقیم کے متوازی ہے جو کوئی بھی ہو سکتا ہے۔

تب ہم جانتے ہیں کہ $1 \text{ لا} = 0$ خطوں کو درپچ میں قطع کریگا اور ایسے

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

لیکن یہ وہ شرط بھی ہے کہ $1 \text{ لا} = 0$ خطوں کو نقطوں کے ایسے

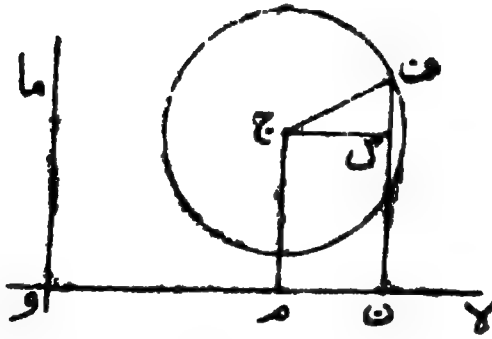
تین زوجوں میں قطع کرے جو درپچ میں ہوں۔



چوتھنا باب

دائرہ

۶۵۔ قائم محوروں کے حوالے سے دائرہ کی مساوات معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز ج ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ ف ہے
فرض کرو کہ ج کے محدود (د'ع) اور ف کے محدود (لا'ما) ہیں۔ فرض کرو کہ
دائرہ کا نصف قطر ہے۔ ج'م اور ف'ن کو و'ما کے متوازی اور
ج'ک کو و'لا کے متوازی کیچھو (حسب شکل)۔ تب
ج'ک' + ک'ف' = ج'ف'
ج'ک = لا۔ د'ک' چنا۔ ما۔ ع

لیکن

$$\therefore (لا - د) + (ما - ع) = 'ا' \dots\dots\dots (۱)$$

مطلوبہ مساوات ہے۔

(۷۲) اگر دائرہ کا مرکز ابتدا ہو تو د اور ع دونوں صفر ہوں گے اور دائرہ کی

مساوات

$$لا + ما = 'ا' \dots\dots\dots (۲)$$

ہوگی۔

مساوات (۱) لکھی جاسکتی ہے

$$لا + ما - ۲ - ۲ = ع + د + ع - 'ا' = ۰$$

اس لیے کسی دائرہ کی مساوات شکل

$$لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰ \dots\dots\dots (۳)$$

کی ہوتی ہے جہاں گ، ف، ج مستطلات ہیں۔

اس کے بالعکس مساوات (۳) ایک دائرہ کی مساوات ہوگی۔ کیونکہ اس کو لکھا جاسکتا ہے

$$(لا + گ) + (ما + ف) = گ + ف - ج$$

اور اس مساوات سے ظاہر ہے کہ اس کے طریق پر کسی نقطہ سے نقطہ

(گ، ف) کا فاصلہ مستقل ہے اور یہ فاصلہ $گ + ف - ج$ کے مساوی

ہے۔ پس مساوات (۳) ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا نصف قطر

$گ + ف - ج$ ہے اور مرکز نقطہ (گ، ف) پر ہے۔

اگر $گ + ف - ج = ۰$ تو دائرہ کا نصف قطر صفر ہے اور دائرہ کو

ایسی صورت میں نقطہ دائرہ کہتے ہیں۔

اگر گ + ف = ج منفی ہو تو لا اور ما کی کوئی معینی قیمتیں مساوات کو پورا نہیں کر سکیں، ایسی صورت میں دائرہ کو خیالی دائرہ کہتے ہیں۔ مندرجہ بالا بیان سے یہ واضح ہے کہ دوسرے درجہ کی کوئی مساوات ایک دائرہ کو تعبیر کرے گی بشرطیکہ (۱) لا اور ما کے سر مساوی ہوں اور (۲) کوئی رقم ایسی نہ ہو جس میں لا ما آئے۔

۶۶۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک دائرہ کی عام مساوات
 لا + ما + گ + لا + ف + ج = ۰

ہے۔ اس مساوات میں تین مستقلات ہیں۔ اگر ہم ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرنا چاہیں جو تین دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے یا کوئی اور شرطیں پوری کرے تو ہم اس کی مساوات کو مندرجہ بالا شکل کی مساوات فرض کریں گے اور دی ہوئی شرطوں کے ذریعہ زیر بحث دائرہ کے لیے مستقلات گ + ف + ج کی قیمتیں متعین کریں گے۔

مثال ۱۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو تین نقطوں (۰، ۱)، (۱، ۰) اور (۱، ۲) میں سے گزرتا ہے۔

[فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا + ما + گ + لا + ف + ج = ۰$$

ہے۔

اب چونکہ نقطہ (۱، ۰) دائرہ پر ہے اس لیے لا = ۰ اور ما = ۱ رکھنے سے مساوات پوری ہونی چاہئے

$$۰ + ۱ + گ + ۰ + ۰ + ج = ۰$$

نیز (۰، ۱) دائرہ پر ہے اس لیے

$$۰ + ۰ + گ + ۱ + ۰ + ج = ۰$$

اور (۱، ۲) دائرہ پر ہے اس لیے

$$۰ + ۱ + ۲ + گ + ۰ + ج = ۰$$

$$گ = ف = ۱ \text{ اور } ج = ۱$$

پس

اس لیے مطلوبہ مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ - لا^۲ - لا^۲ = ۱ + ما^۲ - لا^۲$$

۴۔ [مثال ۲۔ اگر ایک دائرہ کے ایک قطر کے سروں (ب کے محدد (لا، لا)، (لا، لا) ہوں تو دائرہ کی مساوات (لا-لا) (لا-لا) + (لا-لا) (لا-لا) = ۰ ہوگی۔

[وہ خط جو دائرہ پر کے کسی نقطہ ف (لا، لا) کو اسے ملاتا ہے محور لا کے ساتھ زاویہ مس-ا $\frac{لا-لا}{لا-لا}$ بناتا ہے اور وہ خط جو ف کو ب سے

ملاتا ہے محور لا کے ساتھ زاویہ مس-ا $\frac{لا-لا}{لا-لا}$ بناتا ہے۔ اب چونکہ خط ف ب اور ف ب علی التوا ہیں اس لیے

$$۰ = \frac{لا-لا}{لا-لا} \times \frac{لا-لا}{لا-لا} + ۱$$

$$۰ = (لا-لا) (لا-لا) + (لا-لا) (لا-لا)$$

مثال ۳۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا مرکز (۴، ۳) ہے اور نصف قطر ۵ ہے۔

جواب: لا^۲ + ما^۲ + لا + ما = ۱۱

مثال ۴۔ اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو جس کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ - لا^۲ - لا^۲ = ۱۱$$

جواب: مرکز (۱، ۲) نصف قطر ۴

مثال ۵۔ اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو جس کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ + لا + ما = ۱۷$$

جواب: مرکز (۲، ۲) نصف قطر ۲

مثال ۶۔ نقطوں (۱، ۳)، (۲، ۱) اور (۱، ۱) میں سے گزرنیوالے

(۵)

دائرہ کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: $5 + 5 - 11 - 6 - 12 = 0$
 مثال ۷۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقطوں $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ اور $(0, 1)$ میں سے گزرتا ہے۔ جواب: $1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$
 مثال ۸۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقطوں $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ اور $(0, 1)$ میں سے گزرتا ہے۔ جواب: $1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$

۶۔ دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جبکہ محاورہ زاویہ سے پر مائل ہوں۔

نقطہ $(د, ع)$ سے نقطہ $(لا, ما)$ کے فاصلہ کا مربع
 $لا - د + (ما - ع)^2 + 2(لا - د)(ما - ع)$ جم سے
 نکالیں گے۔ اس لیے اس دائرہ کی مساوات جس کا مرکز نقطہ $(د, ع)$ پر اور
 جس کا نصف قطر ہو

$(لا - د) + (ما - ع)^2 + 2(لا - د)(ما - ع)$ جم سے $= 0$ (۱)
 یا $لا + ما + 2لا + 2ما - 2(د + ع) - 2(د + ع) = 0$ (۲)

ہوگی۔

پس کسی دائرہ کی مساوات بحوالہ مائل محاورہ شکل

$لا + ما + 2لا + 2ما - 2(د + ع) - 2(د + ع) = 0$ (۳)
 کی ہوگی جہاں گ، ف کسی مخصوص دائرہ کے لحاظ سے مستقلات ہیں
 لیکن مختلف دائروں کے لیے مختلف ہیں۔

مساوات (۳) درست رہے گی اگر ہم اس کی طرفین کو کسی مستقل
 عدد سے ضرب دیں تب اس کی شکل ہو جائے گی:

$2لا + 2ما + 4لا + 4ما - 4(د + ع) - 4(د + ع) = 0$ (۴)
 پس ایک دائرہ کی مساوات بحوالہ مائل محاورہ دوسرے درجہ کی

ہوتی ہے۔ (۱) لا اور ما کے سر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں اور (۲) لا اور لا کے سروں کی نسبت ۲ جم سے ہوتی ہے جہاں سے محوروں کا درمیانی زاویہ ہے۔

ہم اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کر سکتے ہیں جس کی مساوات $لا + ما + لا + ما$ جم سے $ا + گ + لا + ف + ج =$ ہے۔ کیونکہ یہ مساوات مساوات (لا - د) + (ا - ع) + (لا - د) + (ا - ع) جم سے $ا = د$ کے مماثل ہوگی اگر د + ع جم سے $=$ گ + ع + د جم سے $=$ ف اور د + ع جم سے $ا = ج$ ۔ اس لیے جب $ا =$ ف جم سے $ا =$ گ جب $ا =$ گ جم سے $ف$ اور $ا$ جب $ا =$ ف + $ا =$ گ جم سے $ج$ جب $ا =$ ۔

۶۸۔ تعریف۔ فرض کرو کہ کسی منحنی پر ف اور ق دو نقطے لے (۷۶)

گئے ہیں اور فرض کرو کہ نقطہ ق منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ف سے قریب اور قریب تر آتا ہے تب خط ف ق کے انتہائی محل کو جبکہ ق حرکت کر کے ف تک آئے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جائے منحنی کا ماس نقطہ ف پر پڑے ہیں۔

وہ خط جو ف میں سے گذر کر ماس پر عمود ہو نقطہ ف پر منحنی کا عماد کہلاتا ہے۔

۶۹۔ دائرہ لا + ما = ا کے کسی نقطہ پر کے ماس کی مساوات

معلوم کرنا۔ فرض کرو کہ دائرہ پر کے کسی دو نقطوں کے محدد لا + ما اور لا + ما ہیں۔

نقطہ (لا + ما) اور (لا + ما) میں سے گذر نیوالے قاطع کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{ما - ما}{ما - ما}$$

ہے۔ لیکن چونکہ یہ دو نقطے دائرہ پر ہیں اس لیے

$$لا^۱ + ما^۱ = لا^۲ + ما^۲$$

$$(۲) \dots\dots\dots لا^۱ - لا^۲ = ما^۱ - ما^۲$$

اس لیے مساواتوں (۱) اور (۲) کی متناظر طرفوں کو ضرب دینے سے

$$(۳) \dots\dots\dots (لا - لا)(لا^۱ - لا^۲) = (ما - ما)(ما^۱ - ما^۲)$$

اب فرض کرو کہ نقطہ (لا^۱، ما^۱) نقطہ (لا، ما) تک حرکت کرتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہوتا ہے تب اتہا میں وتر نقطہ (لا، ما) پر تماس بنجاتا ہے۔ پس تماس کی مساوات (۳) میں لا = لا اور ما = ما لکھنے سے حاصل ہوتی ہے چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$(لا - لا)(لا^۱ - لا^۲) + (ما - ما)(ما^۱ - ما^۲) = ۰$$

$$لا^۱ + ما^۱ = لا^۲ + ما^۲$$

$$لا^۱ - لا^۲ = ما^۱ - ما^۲$$

نقطہ (لا، ما) پر کے تماس کی مطلوبہ مساوات ہے۔

۴۔ اس دائرہ کے کسی نقطہ پر کے تماس کی مساوات معلوم

کرنا جس کی مساوات

$$لا^۱ + ما^۱ = لا^۲ + ما^۲$$

ہے۔ دو نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گزرنے والے قاطع کی مساوات

(۴)

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{ما - ما}{ما - ما}$$

ہے۔ چونکہ یہ دو نقطے دائرہ پر ہیں اس لیے

$$لا^۲ + ما^۲ + گ لا + ف۲ = ج۰$$

$$لا^۲ + ما^۲ + گ لا + ف۲ = ج۰$$

۵ (لا - لا) (لا + لا) = (ما - ما) (ما + ما) (لا + لا) (لا + لا) ... (۲) مساواتوں (۱) اور (۲) کی متناظر طرفوں کو ضرب دو تو قاطع کی

مساوات

$$(لا - لا) (لا + لا) = (ما - ما) (ما + ما) (لا + لا) (لا + لا)$$

مائل ہوگی۔

اس لیے (لا، ما) پر کے مماس کی مساوات

$$(لا - لا) (لا + لا) + (ما - ما) (ما + ما) = ج۰$$

$$لا + لا + ما + ما + گ لا + ف۲ = لا + لا + ما + ما + گ لا + ف۲$$

ہے۔

طرفین میں گ لا + ف۲ + ج جمع کرو تو چونکہ (لا، ما) دائرہ پر

ہے اس لیے مماس کی مساوات ہو جاتی ہے

$$لا + لا + ما + ما + گ لا + ف۲ = ج۰$$

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ نقطہ (لا، ما) پر کے مماس کی مساوات دائرہ کی مساوات سے لا کو لا لائیں، ما کو ما لائیں، ۲ لا کو لا لائیں اور ۲ ما کو ما لائیں بدلتے سے معلوم کیجا سکتی ہے۔

مثال ۱۔ دائرہ لا + ما = ۲۵ کے نقطہ (۳، ۴) پر کے مماس

کی مساوات لا + ما = ۲۵ ہے۔

مثال ۲۔ لا + ما = ۲۵ - لا - ما = ۲ کے نقطہ (۲، ۲) پر کے

مماس کی مساوات

$$لا + لا + ما + ما + گ لا + ف۲ = لا + لا + ما + ما + گ لا + ف۲$$

$$= ۱۰ + ۱۰ + ۲ + ۲$$

یا

۷۔ مثال ۳۔ $لا + ما = ۱۶۹$ کے نقطوں $(۱۲، ۵)$ ، $(۱۳، ۵)$ پر
ماسوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ ماس نقطہ $(۱۴، ۵)$ پر علی التوا
مستطاع ہوتے ہیں۔

مثال ۴۔ $لا + ما - لا - ما = ۰$ کے نقطوں $(۲، ۴)$
اور $(۳، ۲)$ پر کے ماس معلوم کرو۔ جواب: $لا = ۴$ اور $ما = ۴$

۸۔ ایک دائرہ کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔ (۷۸)

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا + ما = ۱$$

ہے۔ اگر اس پر $(لا، ما)$ کوئی نقطہ ہے تو اس نقطہ پر ماس کی مساوات
 $لا + ما = ۱$ (۱)

۹۔ اس خط کی مساوات جو $(لا، ما)$ میں سے گزر کر (۱) پر عمود حسب
دفعہ ۳۰

$$(لا - لا) - (ما - ما) = ۰$$

یا $لا - ما = ۰$ (۲)
ہے۔ یہ نقطہ $(لا، ما)$ پر عماد کی مطلوبہ مساوات ہے۔

مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ دائرہ کے کسی نقطہ پر کا عماد
مبدأ میں سے گزرتا ہے یعنی دائرہ کے مرکز میں سے۔

۱۰۔ ایک دیے ہوئے خط مستقیم اور دائرہ کے نقاط تقاطع
معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا + ما = ۱$$

(۱)

اور خط مستقیم کی مساوات

$$م = لا + ج \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔ ان نقطوں پر جو خط مستقیم اور دائرہ میں مشترک ہیں یہ دونوں رشتے پورے ہوتے ہیں۔ خط پر کے نقطے مساوات $م = لا + ج$ کو پورا کرتے ہیں اور دائرہ پر کے نقطے مساوات $م = لا - ج$ کو پورا کرتے ہیں۔ اس لیے مشترک نقطوں کے لیے مساوات حاصل ہوئی ہے۔

$$(م + لا + ج) = لا - ج$$

$$یا (۱ + م) + ۲م + ج لا + ج - لا = لا - ج \dots \dots \dots (۳)$$

یہ ایک دوجہ مساوات ہے اور ہر دوجہ مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں، حقیقی اور مختلف، یا حقیقی اور مساوی، یا خیالی۔

پس لا کی دو قیمتیں ہیں اور ان کے جواب میں م کی دو قیمتیں (۴) (۴۹) سے معلوم ہوتی ہیں۔ اس طرح پر خط مستقیم ایک دائرہ سے دو نقطوں پر ملتا ہے حقیقی اور مختلف، یا دو منطبق، یا دو خیالی نقطوں پر۔ خیالی نقطے وہ ہیں جنکے محدودوں میں سے ایک یا دونوں خیالی ہوں۔

خط مستقیم اور دائرہ کے خیالی نقاط تقاطع کو ہندسی طور پر تعبیر کرنا ناممکن ہے، لیکن ہم دیکھیں گے کہ خیالی نقطے اور خطوط اکثر اہم مفہوم کے حامل ہوتے ہیں اور ان پر غور کرنا ضروری ہے تاکہ ہم اپنے مسئلوں کو عام سے عام شکلوں میں بیان کر سکیں۔

مساوات (۳) کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہو چکی اگر

$$(۱ + م) (ج - لا) = م ج$$

$$ج = لا (۱ + م) \dots \dots \dots (۴)$$

یعنی اگر لا کی دو قیمتیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو م کی دو قیمتیں

بھی (۲) کی رو سے ایک دوسرے کے مساوی ہوتی چاہئیں۔

اس لیے وہ دو نقطے جن پر دائرہ خط سے منقطع ہوتا ہے منطبق ہونگے

$$اگر ج = لا \sqrt{۱ + م} -$$

پس خط $MA = M + LA$ اور $MA + M =$ دائرہ $LA + MA = LA$ کو M کی تمام قیمتوں کے لیے مس کرے گا۔

چونکہ جذر $MA + M$ کو کوئی ایک علامت دیا جاسکتی ہے اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ M کی ہر قیمت کے جواب میں دائرہ کے دو MA س ہوتے ہیں یعنی کسی دے ہوئے خط کے متوازی دو MA س ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ $LA = ۷$ اور $MA = ۸$ ، دائرہ

$$LA + MA = ۳ - LA - ۶ - ۱۲ = ۰$$

کو مس کرتے ہیں۔ MA سوں کے نقاط MA س معلوم کرو۔ جواب: $(۴، ۳)$ اور $(۸، ۲)$

مثال ۲۔ خط $LA + MA = ۵ - ۰$ اور دائرہ $LA + MA = ۲۵$ کے نقاط تقاطع معلوم کرو۔ جواب: $(۰، ۵)$ اور $(۳، ۳)$

مثال ۳۔ معلوم کرو کہ خط $MA + LA + ۳ = ۷$ ، دائرہ

$$LA + MA = ۳ - LA - ۶ - ۱۲ = ۰$$

کو کہاں قطع کرتا ہے۔ جواب: خط نقطہ $(-۱، ۱)$ پر مس کرتا ہے۔

۳۔ ایک دائرہ کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے

نقاط وسطی کا طریق معلوم کرنا۔

دائرہ کے مرکز کو مبداء اور محور LA کو وتروں کے متوازی لو۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$LA + MA = LA^2$$

ہے اور فرض کرو کہ متوازی وتروں میں سے کسی ایک کی مساوات

$$MA - J = ۰$$

۴۔

(۱) اور (۲) کے نقاط تقاطع کے لیے

$$LA + J = LA^2$$

$$\text{لا} = \pm \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ج}^2}$$

چونکہ لا کی یہ دو قیمتیں مساوی اور مختلف العلامت ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وتر کے نقطہ وسطی کا فاصلہ صفر ہے یعنی وتر کا وسطی نقطہ ہمیشہ محور ماپر رہتا ہے۔ یہ ج کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔ اگر ج = ا تو لا کی دونوں قیمتیں خیالی ہیں لیکن ان کا مجموعہ تاہم صفر ہے اور اسلئے وتر کا وسطی نقطہ پھر بھی محور ماپر رہتا ہے۔

پس ایک دائرہ کے متوازی وتروں کے نقاط وسطی کا طریق مرکز سے گذرنے والا وہ خط مستقیم ہے جو وتروں پر عمود ہے۔ اس طریق کو اس خط کے اُس حصہ تک محدود فرض کرنے کی ضرورت نہیں ہے جو دائرہ کے اندر ہے۔

۴۔ دفعات مابقی میں ہم نے دائرہ کے کوئی بند سی خواص تسلیم نہیں کئے ہیں الا آنکہ اس کے کسی نقطہ سے مرکز کا فاصلہ مستقل رہتا ہے۔ اگر ہم ان مسئلوں کو مان لیں جو اقلیدس جلد ۳ میں ثابت کئے گئے ہیں تو دفعات مابقی کے بعض نتیجے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ اُس دائرہ پر جس کی مساوات $\text{لا} + \text{ما} = \text{ا}^2$ ہے کوئی نقطہ (لا، ما)

ہے تو اُس خط کی مساوات جو (لا، ما) سے دائرہ کے مرکز تک

کھینچا گیا ہے $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ا}} = ۰$ ہے اور (لا، ما) میں سے گزرنے والے

عمودی خط کی مساوات (دفعہ ۳)

$$(\text{لا} - \text{لا}') + (\text{ما} - \text{ما}') = ۰$$

$$\text{لا} + \text{ما} - \text{لا}' - \text{ما}' = ۰$$

یا ہے اور اقلیدس جلد ۳ سے یہ خط اس نقطہ پر کا محاس ہے۔

(۸۱) پھر خط ما-م لا-ج = ۰، دائرہ لا + ما = ا^۲ کو مس کرے گا اگر خط کا عمودی فاصلہ دائرہ کے مرکز سے نصف قطر کے مساوی ہو اس لیے شرط

$$ج = ۱ \pm \sqrt{۱ + ۲م}$$

طامل ہوتی ہے۔

۷۵۔ کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے دو مماس کھینچے جاسکتے ہیں اور یہ دو مماس حقیقی ہوں گے اگر یہ نقطہ دائرہ کے باہر ہو، منطبق ہوں گے اگر نقطہ دائرہ پر ہو، اور خیالی ہوں گے اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہو۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ = ر^۲$$

ہے اور فرض کرو کہ کسی نقطہ کے محدد (ک، ھ) ہیں۔ فرض کرو کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہیں۔ تب (لا، ما) پر کے مماس کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ = ر^۲$$

ہوگی۔ یہ مماس نقطہ (ک، ھ) میں سے گذرے گا اگر

$$ھ لا + ک ما = ر^۲ \quad (۱) \dots \dots \dots$$

لیکن (لا، ما) دائرہ پر ہے اس لیے

$$لا^۲ + ما^۲ = ر^۲ \quad (۲) \dots \dots \dots$$

مساواتوں (۱) اور (۲) سے لا اور ما کی وہ قیمتیں معلوم ہوں گی جن پر کے مماس مخصوص نقطہ (ک، ھ) میں سے گذرتے ہیں۔ ما کی بجائے (۲) میں اندراج کرو تو

$$لا^۲ = \frac{(لا^۲ - ھ لا - ک ما)}{ک}$$

$$لا^۲ (ھ + ک) - ۲ لا ھ - لا^۲ = (لا - ھ ک) \quad (۳) \dots \dots$$

مساوات (۳) سے فصلے حاصل ہوتے ہیں اور (۱) سے متناظر معین معلوم ہوتے ہیں۔ اب چونکہ مساوات (۳) ایک دو درجی مساوات ہے اس لیے دو نقطے ہیں جن پر کے پاس نقطہ (۴) (ک) میں سے گزرتے ہیں مساوات (۳) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہونگی بوجہ اسکے کہ

$$\Delta^2 - 4\Delta - 4 = 0 \quad (\Delta + 4)$$

مغیر بڑا، اس کے مساوی، یا اس سے کم ہو۔ یعنی بوجہ اسکے کہ

مغیر بڑا، اس کے مساوی، یا اس سے کم ہو۔ یعنی بوجہ اس کے کہ نقطہ (۴) (ک) دائرہ کے باہر، دائرہ پر، یا دائرہ کے اندر ہو۔

مثالیں

(۸۲)

- ۱۔ ان نقطوں کے محدود معلوم کرو جہاں خط $MA = 2 + LA$ ، دائرہ $LA = 2$ کو قطع کرتا ہے۔
جواب: $(1, -1)$ اور $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$
- ۲۔ ثابت کرو کہ خط $MA = 2 - LA$ ، دائرہ $LA = 2$ کو مس کرتا ہے۔
- ۳۔ ثابت کرو کہ دائرے $LA = 2$ اور $LA = 2 - MA$ کا مرکز $O = 10$ ایک دوسرے کو نقطہ $(1, 1)$ پر مس کرتے ہیں۔
- ۴۔ ثابت کرو کہ دائرہ $LA = 2 - MA$ اور $LA = 2 + MA$ کا مرکز $O = 10$ اور $O = 10$ کو مس کرتا ہے۔
- ۵۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو خطوط $LA = 10$ اور $LA = 10$ کو مس کرتا ہے۔
جواب: $MA = 2 - LA$ اور $MA = 2 + LA$
- ۶۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو خطوط $LA = 10$ اور $LA = 10$ کو مس کرتا ہے۔

جواب: $لآ + مآ - ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ = ۵۰$ یا $لآ + مآ - ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ = ۵۰$

۷۔ ثابت کرو کہ خط $ما = م(لا - ۱) + ۱$ یا $ما = م(لا - ۱) + ۱$ دائرہ $لآ + مآ$

۲ و ۱۱ کو مس کرتا ہے خواہ $م$ کی قیمت کچھ ہی ہو۔

۸۔ دو خطوط کھینچے گئے ہیں جو علی الترتیب نقطوں $(۱، ۰)$ ، $(۰، ۱)$

پر سے گزرتے ہیں اور ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ ط بناتے ہیں۔ ان کے

نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔ جواب: دائرہ $لآ + مآ = ۱۲ + ۱۳ + ۱۴$

۹۔ ایک دائرہ ایک دیے ہوئے خط کو مس کرتا ہے اور دوسرے

خط پر جو اول الذکر خط پر عمود ہے مستقل طول $(۲ل)$ قطع کرتا ہے۔ اس کے مرکز کا

طریق معلوم کرو۔ جواب: $لآ = ل$

۱۰۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقطوں $(۱، ۰)$ ، $(۰، ۱)$

سے اس پر کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ ہمیشہ

ایک دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۱۱۔ $لآ + مآ = ۳$ کے ان دو مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو دو

لا کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتے ہیں۔ جواب: $ما = ۳(لا - ۲)$

۱۲۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو ایک مثلث میں جس

ضلعوں کی مساواتیں

$$لا = ۱، ۵ = ۲، ۵ = ۳ - لا$$

ہیں کھینچا گیا ہے۔ جواب: $ما = (۳ - لا) + (۲ - لا) = ۱$

۱۶۔ کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے دو مماس کھینچے گئے ہیں

اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو مماسوں کے نقاط تماس کو

ملا تا ہے۔

۱۷۔ فرض کرو کہ اس نقطہ کے محدود جس سے مماس کھینچے گئے ہیں

دائرہ کے مرکز سے

میں۔ فرض کرو کہ نقاط تماس کے محدود $م$ ، $ک$ اور $ج$ ہیں اور دائرہ کی مساوات $لا + ما = لا' + م'$ ہے۔

(۸۳)

ماسوں کی مساواتیں حسب دفعہ ۶۹

$$لا + م = لا' + م'$$

$$لا + م = لا' + م'$$

یہ سچی۔ لیکن چونکہ یہ دونوں ماس نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں اس لیے یہ دونوں مساواتیں محدودوں لا، م سے پوری ہوتی ہیں اس لیے

$$لا + م = لا' + م' \quad (۱)$$

$$لا + م = لا' + م' \quad (۲)$$

لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) وہ شرطیں ہیں کہ نقاط (م، ک) در (م، ک) اس خط مستقیم پر واقع ہوں جس کی مساوات

$$لا + ما = لا' + م' \quad (۳)$$

ہے۔

پس (۳) اس خط مستقیم کی مطلوبہ مساوات ہے جو نقطہ (لا، ما) سے پھینچے ہوئے ماسوں کے نقاط تماس میں سے گزرتا ہے۔

اگر دائرہ کی مساوات $لا + ما + گ + لا + ف + م + ج = ۰$ ہو تو ہم ہی طریقہ پر (دفعہ ۷۰ کے نتیجہ کو مانکر) ثابت کر سکتے ہیں کہ اس خط کی مساوات $لا + ما + گ + لا + ف + م + ج = ۰$ ہے۔

۴۔ اگر نقطہ (لا، ما) دائرہ کے باہر ہو تو اس سے پھینچے ہوئے دو ماس حقیقی ہوں گے اور اس لیے محدود $م$ ، $ک$ اور $ج$ حقیقی ہوں گے لیکن نقطہ (لا، ما) دائرہ کے اندر ہو تو یہ دو ماس خیالی ہوں گے لیکن اس میں بھی وہ خط جس کی مساوات (۳) ہے حقیقی خط ہوگا جبکہ لا اور ما حقیقی ہوں۔ اس طرح ایک حقیقی خط ہوتا ہے جو دائرہ کے اندر و بی نقطہ

کہنے ہوئے دو خیالی ماسوں کے خیالی تقاطع تاس کو ملاتا ہے۔
تعریف۔ اگر کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے ماس کھینچے گئے ہوں
 اور ان ماسوں (خیالی یا حقیقی) کے نقاط تاس کو ایک خط مستقیم کے ذریعہ
 ملایا جائے تو اس خط مستقیم کو دائرہ کے لحاظ سے اس نقطہ کا قطبی کہتے ہیں۔
 ایک خط مستقیم ایک دائرہ کو جن نقطوں (حقیقی یا خیالی) پر قطع کرتا ہے
 ان نقطوں پر کھینچے ہوئے ماسوں کے نقطہ تقاطع کو دائرہ کے لحاظ سے
 اس خط کا قطب کہتے ہیں۔

۷۔ فرض کرو کہ کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے دو ماس ت ف
 ت ق ہیں۔ فرض کرو کہ ق، ف کی جانب حرکت کر کے بالآخر ف پر
 اگر منطبق ہوتا ہے تو ت بھی حرکت کر کے بالآخر ف پر آ منطبق ہوگا اور
 ماس ت ف اور ت ق بالآخر ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے
 اور وتر ف ق بھی منطبق ہوگا۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ ت کا قطبی جبکہ
 ت دائرہ پر ہو اس نقطہ پر کے ماس پر منطبق ہوتا ہے۔



یہ دفعہ ۷ کے نتیجہ کے مطابق ہے۔ کیونکہ قطبی کی مساوات اس
 شکل کی ہے جو ماس کی مساوات کی ہے اور اس لیے ایک نقطہ کا قطبی
 جبکہ نقطہ دائرہ پر ہو اس نقطہ پر کا ماس ہوتا ہے

۸۔ اگر ایک نقطہ ف کا قطبی ق میں سے گزرے تو
 ق کا قطبی ف میں سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ ف کے محدود (لا، ما) ہیں اور ق کے (لا، ما) فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات لا + ما = لا' + ما' ہے۔
 (لا، ما) اور (لا، ما) کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب
 لا + ما - لا' - ما' = ۰ (۱)
 لا + ما - لا' - ما' = ۰ (۲)

ہیں۔ اگر ق، ف کے قطبی پر ہے تو اس کے محدود مساوات (۱) کو پورا کرنا چاہئیں اس لیے

$$لا + ما - لا' - ما' = ۰$$

لیکن یہ وہ شرط بھی ہے کہ ف، خط (۲) پر ہو یعنی ق کے قطبی پر اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

اگر ق، ایک ثابت خط مستقیم پر ہو اور ف اس خط کا قطب ہو تو ق کا قطبی، ف میں سے گزرنا چاہیے کیونکہ بموجب فرض ف کا قطبی ق میں سے گزرتا ہے۔

اس کے بالعکس اگر کسی ثابت نقطہ ف میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا جائے اور ق اس خط کا قطب ہو تو چونکہ ف، ق کے قطبی پر ہے اس لیے نقطہ ق ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہونا چاہیے یعنی ف کے قطبی پر۔

اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ مرا پر لیں تو مرا خط (۸۵) ف ق کا قطب ہوگا۔

چونکہ مرا، ف کے قطبی پر ہے اس لیے مرا کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے، اسی طرح وہ ق میں سے بھی گزرتا ہے اور اس لیے اس کو خط ف ق ہونا چاہیے۔

۷۹۔ دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کیلئے ہندسی عمل۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ہے اور ف کوئی نقطہ ہے اور اس کے محدد لاء 'ما' ہیں۔

دائرہ کے لحاظ سے ف کے قطبی کی مساوات

$$r^2 = \frac{f^2}{1 + \cos \theta} \quad (1)$$

ہے۔

اس خط کی مساوات جو دائرہ کے مرکز و اور ف کو ملاتا ہے

$$r^2 = \frac{f^2}{1 - \cos \theta} \quad (2)$$

ہے۔

مساواتوں (۱) اور (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی اس خط پر عمود ہوتا ہے جو اس نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملاتا ہے۔

اگر و سے قطبی پر عمود و ن ہو تو

$$r^2 = \frac{f^2}{1 + \cos \theta} \quad \text{ون}$$

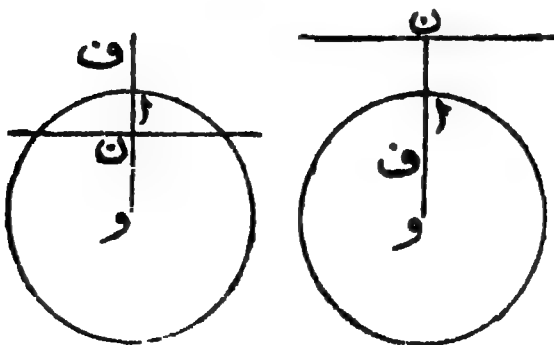
(دفعہ ۳۱)

$$r^2 = \frac{f^2}{1 - \cos \theta} \quad \text{وف}$$

نیز

$$r^2 = \text{ون} \times \text{وف}$$

ۛ



پس قطبی کو حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل عمل حاصل ہوتا ہے۔ (۸۶)
 وف کو بلاؤ اور فرض کرو کہ وہ دائرہ گو (یہ قطع کرتا ہے۔ خط وف باہر
 ایک ایسا نقطہ ن لو کہ وف : و ا = و ا . و ن . ن میں سے
 ایک خط وف پر عمود کھینچو۔

مثال ۱۔ دائرہ لا + با = ۴ کے لحاظ سے۔ ذیل نقطوں کے
 قطبیوں کی مساواتیں لکھو:

$$(1) (3, 2) \quad (2) (2, 3) \quad (3) (1, 4) \quad (4) (4, 1)$$

مثال ۲۔ $2 = 2 + 3 + 4 = 2$ ۔ مساویہ قطب لیں دائرہ
 $لا + با = 5$ ۔

کے معلوم کرو۔
 [اگر لا، با قطب ہے تو دیا ہوا خط وہی ہے جو لا + با = 5 ہے۔
 اس لیے

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{2} = \frac{لا}{2}$$

اس لیے مطلوب قطب $(\frac{5}{4}, \frac{5}{4})$ ہے۔
 مثال ۳۔ حسب ذیل نقطوں کے قطب اس دائرہ کے لحاظ سے
 معلوم کرو جس کی مساوات لا + با = 35 ہے:-

$$(1) 4 + لا + با = 4 = 0 \quad (2) 3 + لا - با = 5 = 0 \quad (3) 4 + لا + با = 1$$

جوابات: (۱) (۳، ۲) (۲) (۲، ۱) (۳) (۳، ۵) (۴) (۵، ۳)

مثال ۴۔ ان نقطوں کے محدود معلوم کرو جہاں خط لا = ۱، دائرہ لا + با = ۵
 کو قطع کرتا ہے۔ ان نقطوں پر کے ماسوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ
 وہ نقطہ (۴، ۴) پر متقاطع ہوتے ہیں۔

$$\text{جواب: } (1, 4) \quad (4, 1)$$

مثال ۵۔ ان نقطوں کے محدود معلوم کرو جہاں خط لا + با = 25
 دائرہ لا + با = 5 کو قطع کرتا ہے اور ان نقطوں پر کے ماسوں کی مساواتیں

مساویات (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر طہ کی کسی مخصوص قیمت کے متناظر کی دو قیمتیں r_1 ، r_2 ہوں تو

اس طرح r_1 کا انحصار طہ پر نہیں ہے۔
(۳) $r_1 = r_2 = \text{غہ} - 1$

اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اگر ایک ثابت نقطہ سے ایک خط مستقیم کھینچا جائے جو دئے ہوئے دائرہ کو قطع کرے تو مقطوعات سے بنا ہوا استیقل رقبہ میں مستقل ہوتا ہے۔

(۴) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مبداء دائرہ کے اندر ہو (اس صورت میں $\text{غہ} > 1$) تو r_1 اور r_2 مختلف العلامت ہونے چاہئیں اور اس لیے ان کو مختلف سمتوں میں کھینچنا چاہئے جیسا کہ ہندسی طور پر واضح ہے۔

علی القوائم دائرے

۸۱۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو دائرے

$LA + MA + 2g + 2f + 2c = 0$ اور $LA' + MA' + 2g' + 2f' + 2c' = 0$

ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں۔

ان دو دائروں کے مرکز علی الترتیب $(-g, -f)$ اور $(-g', -f')$ ہیں اور ان کے نصف قطروں کے مربع علی الترتیب $g^2 + f^2 + c$ اور $g'^2 + f'^2 + c'$ ہیں۔

اب یہ دائرے علی القوائم متقاطع ہوں گے اگر مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کا مربع نصف قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہو پس مطلوبہ شرط یہ ہے کہ

$(g - g')^2 + (f - f')^2 = g^2 + f^2 + c + g'^2 + f'^2 + c'$

۲ گ، گم + ۲ ف، فم - ج، ج = ۰
جو تھویل ہوتی ہے -

متبادل ثبوت :- دائروں کے ایک مشترک نقطہ (لا، با) پر کے

ماسوں کی مساواتیں

لا، لا + ما، ما + گ، (لا + لا) + ف، (ما + ما) + ج = ۰

اور لا، لا + ما، ما + گ، (لا + لا) + ف، (ما + ما) + ج = ۰

ہیں - = ماس علی التوائم ہو چکے اگر

(لا، لا + گ،) (لا، لا + گ،) + (ما، ما + ف،) (ما، ما + ف،) = ۰

یعنی لا، لا + ما، ما + لا، لا + گ، گ + (ما، ما + ف، ف) + گ، گ + ف، ف = ۰ ... (۱)

لیکن چونکہ (لا، با) دونوں دائروں پر ہے اس لیے

لا، لا + ما، ما + گ، گ + لا، لا + ۲ ف، فم + ج، ج = ۰ ... (۲)

لا، لا + ما، ما + گ، گ + لا، لا + ۲ ف، فم + ج، ج = ۰ ... (۳)

(۱) کو ۲ سے ضرب دو اور (۲) اور (۳) کے مجموعہ کو تفریق کرو تو

۲ گ، گم + ۲ ف، فم - ج، ج = ۰

۸۲ - اس ماس کا طول معلوم کرنا جو ایک دیے ہوئے

نقطہ سے ایک دائرہ کا کھینچا گیا ہو -

فرض کرو کہ دیا ہوا نقطہ ت ہے اور دائرہ کا مرکز ج ہے - فرض

کرو کہ ت سے دائرہ کے دو ماسوں میں سے ایک ت ف ہے -

تب ہم جانتے ہیں کہ زاویہ ج ف ت قائمہ زاویہ ہے اس لیے

ت ف = ج ت - ج ف ... (۱)

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

(۲) = ج^۲ - (ب - ا)^۲ - (لا - ا)^۲ + (ما - ب)^۲ - ج^۲ = ۰
ہے اور فرض کرو کہ ت کے محدود لا، ما ہیں تو
ج ت = (لا - ا)^۲ + (ما - ب)^۲
اس لیے (۱) کی رو سے

ت ف = (لا - ا)^۲ + (ما - ب)^۲ - ج^۲ (۳)
اس لیے مساوات (۲) کے دائیں جانبی رکن میں محدودوں لا، ما کو درج
کرنے سے ت ف = یعنی ماس کے طول کا مربع معلوم ہوتا ہے۔

(۸۹) پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ماس = ۰ ایک دائرہ کی مساوات ہو
(جہاں ماس کو اختصاراً لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج کی بجائے لکھا گیا
ہے) اور ماس میں کسی نقطہ کے محدود درج کے جائیں تو نتیجہ اُس ماس کے
طول کے مربع کے مساوی ہوتا ہے جو اُس نقطہ سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو
یا اُس مستطیل (اقلیدس جلد سوم مسئلہ ۳) کے رقبہ کے مساوی جس نے
متصلہ اضلاع اُن وتروں کے مقطوعے ہوں جو نقطہ میں سے کھینچے گئے
ہوں۔ اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہو تو مستطیل کا رقبہ منفی ہوگا اور ماس کا
طول خیالی۔

اگر دائرہ کی مساوات

$$۱ لا + ۲ ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

ہو تو کسی نقطہ سے ماس کے طول کا مربع معلوم کرنے کے لیے اول (تے تقسیم
کرنا چاہئے اور پھر اُس نقطہ کے محدود درج کرنا چاہئے جس سے ماس کھینچا گیا ہے۔
ماسوں کے اُس زوج کی مساوات معلوم کرنا جو کسی نقطہ
سے دائرہ لا + ما = ۰ کے کھینچے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ نقطہ (لا، ما) سے کھینچے ہوئے ماس ت ف اور ت ق

ہیں۔

اب اگر ان میں سے ایک ماس پر کوئی نقطہ سر (لا، ما) ہو (فرض کرو کہ ت ف پر) اور ف ق پر عمود ت ل اور س م کھینچے جائیں تو متشابہ مثلثوں سے

ت ف ا : س ر ف = ت ل : س م ا (۱)
لیکن ف ق کی مساوات

$$لاا + ماما - و = و$$

$$\frac{ت ل}{س م ا} = \frac{(لاا + ماما - و)}{(لاا + ماما - و)}$$

اور دفعہ ۸۲ کی رو سے

$$\frac{ت ف ا}{س ر ف} = \frac{(لاا + ماما - و)}{(لاا + ماما - و)}$$

اس لیے (۱) سے

$$(لاا + ماما - و) (لاا + ماما - و) - (لاا + ماما - و) (لاا + ماما - و) =$$

اس لیے ماسوں میں سے کسی ایک کا کوئی نقطہ طریقی

$$(لاا + ماما - و) (لاا + ماما - و) - (لاا + ماما - و) (لاا + ماما - و) =$$

پر ہے اور اس لیے یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

دو دائروں کی بنیادی محور

۸۳ — اگر ایک دائرہ کی مساوات

$$لاا + ماما + گ + لا + ف + م + ج = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

اور دوسرے دائرہ کی مساوات

$$لاا + ماما + گ + لا + ف + م + ج = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

ہو تو مساوات (۹۰)

لا + ا + گ ۲ + لا + ف ۲ + م + ج = لا + ا + گ ۲ + لا + ف ۲ + م + ج

(۳)

صرف کسی ایسے نقطے کے محدودوں سے پوری ہوگی جو (۱) اور نیز (۲) پر ہو۔
اس لیے مساوات (۳) ان نقطوں میں سے گزرنے والے طریق کو تعبیر
کرتی ہے جو دونوں دائروں میں مشترک ہیں۔

لیکن مساوات (۳)

۲ (گ - گ) (لا + لا) (ف - ف) (م + ج - ج) = ۰ ... (۴)

میں تبدیل ہوتی ہے اور یہ مساوات درجہ اول کی ہے اور اس لیے ایک
خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

پس مساوات (۳) یا (۴) ان نقطوں میں سے گزرنے والے
خط مستقیم کی مساوات ہے جو دائروں (۱) اور (۲) میں مشترک ہیں۔

اگر دو دائرے (۱) اور (۲) ایک دوسرے کو حقیقی نقطوں میں قطع
نکریں تو بھی (۳) یا (۴) سے حاصل شدہ خط مستقیم تمام صورتوں میں حقیقی ہوگا
بشرطیکہ گ، ف، ج، گ، ف، ج حقیقی ہوں۔ اس طرح ہمیں ایک ایسے
حقیقی خط مستقیم کی مثال ملتی ہے جو دو دائروں کے خیالی نقاط تقاطع میں
سے گزرتا ہے۔

مساوات (۳) کا دوسرا ہندسی مفہوم بھی دیا جاسکتا ہے۔

اگر $0 =$ ایک دائرہ کی مساوات ہو جس میں لا، گ، ف، ج کا سر ایک ہو
اور اگر کسی نقطہ کے محدودوں میں درجہ کے جائیں تو نتیجہ اس کے
مربع کے مساوی ہوگا جو اس نقطہ سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو (دفعہ ۴)۔
اب اگر خط مستقیم (۳) پر کسی نقطہ کے محدودوں لا، م، ا، ہوں تو اس مساوات کی
دائیں جانب کا جملہ اس کے مربع کے مساوی ہوگا جو نقطہ (لا، م)
سے دائرہ (۱) کا کھینچا گیا ہے اور بائیں جانب کا جملہ اس کے مربع کے مساوی
کے مساوی ہوگا جو نقطہ (لا، م) سے دائرہ (۲) کا کھینچا گیا ہے۔

پس خط (۳) کے کسی نقطہ سے دو دائروں (۱) اور (۲) کے ماس

کہنے جائیں تو یہ حماس ایک دوسرے کے مساوی ہوں گے۔

تعریف۔ وہ خط مستقیم جو دو دائروں کے نقاطِ تقاطع (حقیقی یا خیالی) میں سے کھینچا گیا ہو ان دائروں کا بنیادی محور کہلاتا ہے۔

یہ قابل ذکر ہے کہ دو دائروں کے بنیادی محور کی یہ تعریف بھی ہو سکتی ہے کہ وہ ان نقطوں کا طریق ہے جن سے ان دو دائروں کے

کھینچے ہوئے حماس طول میں مساوی ہوتے ہیں۔
ان دو دائروں کے مرکزوں کے محدد علی الترتیب 'گ'، 'ف' اور 'گ'، 'ف' ہیں، اس لیے ان کو ملانے والے خط مستقیم کی مساوات

$$\frac{لا + گ}{مح - مح} = \frac{ما + ف}{ف - ف}$$

ہے جو (مب دفعہ ۳۰) خط (۴) پر عمود ہے۔

پس دو دائروں کا بنیادی محور ان کے مرکزوں کو ملانے والے خط پر عمود ہوتا ہے۔

۸۴۔ تین دائروں میں سے دو دو کے تین بنیادی محور ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

اگر تین دائروں کی مساواتیں $س = ۰$ ، $س = ۰$ ، $س = ۰$ ہوں جن میں سے ہر ایک میں لا کا سر ایک ہو تو پہلے اور دوسرے کے بنیادی محور کی مساوات

$$س - س = ۰$$

ہے۔ وہ سرے اور تیسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

$$س - س = ۰$$

ہے اور تیسرے اور پہلے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

$$\text{سن} - \text{سن} = ۰$$

ہے۔ اب یہ ظاہر ہے کہ اگر ان میں سے دو مساوات میں کسی نقطہ کے محدود سے پوری ہوں تو تیسری مساوات بھی ان محدودوں سے پوری ہوگی۔ ان تین بنیادی محوروں کے نقطہ تقاطع کو دائروں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔

ہم محور دائرے

۸۵۔ دائروں کے ایک نظام کی مساوات معلوم کرنا جنہیں

ہر زوج کا بنیادی محور وہی ہو۔

اگر مشترک بنیادی محور کو محور ما فرض کیا جائے تو نظام کے دائروں میں سے کسی دو کی مساوات (جبکہ اس کو معیاری شکل میں لکھا گیا ہو جس میں لا کا لگائی ہو) صرف لا کے سر میں مختلف ہو سکتی ہے۔ اس طرح دائروں کے نظام کی عام مساوات جبکہ ان دائروں میں سے کسی زوج کے بنیادی محور کی مساوات لا = ۰ ہو

$$لا + ما + ۲گ + ۲ف + ۲ج = ۰$$

ہے جہاں ف اور ج تمام دائروں کے لیے وہی ہیں۔

اگر مبداء کو (۰ = ف) پر تبدیل کیا جائے تو مطلوبہ مساوات شکل

$$لا + ما + ۲گ + ۲ج = ۰ \quad (۱)$$

انتیار کرتی ہے جہاں ج تمام دائروں کے لیے وہی ہے اور گ مختلف دائروں کے لیے مختلف ہے۔

بنیادی محور دائروں کو حقیقی نقطوں میں قطع کرے گا اگر ج منفی ہو اور خیالی نقطوں میں قطع کرے گا اگر ج مثبت ہو۔

مساوات (۱) کو شکل

$$(لا + گ) + ما = گ - ج$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ پس اگر گ کو \pm راج کے مساوی لیا جائے تو دائرہ نقطوں (راج \pm) میں سے ایک میں تحویل ہوگا۔ ان نقطہ دائروں کو ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے کہا جاتا ہے۔

جب ج مثبت ہوتا ہے یعنی جب دائرے خود خیالی نقطوں میں منقطع ہوتے ہیں تو انتہائی نقطے حقیقی ہوتے ہیں اور اس کے بالعکس جب دائرے حقیقی نقطوں میں منقطع ہوتے ہیں تو انتہائی نقطے خیالی ہوتے ہیں۔ دفعہ ۸ میں معلوم شدہ شرط سے یہ فوراً مستنبط ہوتا ہے کہ مساواتوں

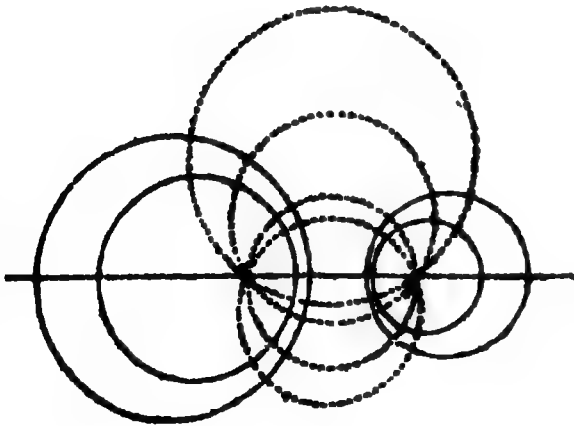
$$لا + ما + ۲ گ - لا + ج = ۰$$

$$لا + ما + ۲ ف - ما - ج = ۰$$

اور سے تعبیر شدہ ہم محور دائروں کے دو نظامات جہاں ج تمام دائروں کیلئے وہی ہے ایسے ہیں کہ ایک نظام کا کوئی دائرہ دوسرے نظام کے تمام دائروں سے علی التوالم قطع کرتا ہے۔

یہ دو علی التوالم نظامات ایسے ہیں کہ ایک نظام کے مشترک نقطے دوسرے نظام کے انتہائی نقطے ہیں۔

شکل ذیل میں



دائروں کے ایک نظام کو پورے خطوں سے اور دوسرے نظام کو نقطہ دائرہ خطوں سے تعبیر کیا گیا ہے۔

(۹۳)

۸۶* - اگر دو دائروں کی مساواتیں $س = .$ اور $س = .$ ہوں تو مساوات $س = .$ لہ $س = .$ کی تمام قیمتوں کیلئے ان تمام دائروں کو تعبیر کرے گی جو $س = .$ اور $س = .$ کے مشترک نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

اگر $س = .$ اور $س = .$ علی الترتیب

(۱) $لا + ما + گ + لا + ف + ج = .$

(۲) $لا + ما + گ + لا + ف + ج = .$

ہوں تو مساوات $س = .$ لہ $س = .$

$لا + ما + گ + لا + ف + ج = .$ لہ $(لا + ما + گ + لا + ف + ج = .)$

(۳) $ج = .$

ہوگی۔ اب مساوات (۳) صرف ایک دائرہ کی مساوات ہے خواہ لہ کی قیمت کچھ ہی ہو۔

نیز اگر کسی نقطہ کے محدد (۱) اور (۲) دونوں کو پورا کریں تو وہ (۳) کو بھی پورا کریں گے۔

پس $س = .$ لہ $س = .$ کی کسی قیمت کے لیے ایک ایسے دائرہ کی مساوات ہے جو $س = .$ اور $س = .$ کے مشترک نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

لہ کو مناسب قیمت دیکر دائرہ (۳) کو کسی دوسرے نقطے میں سے گذارا جاسکتا ہے اس لیے $س = .$ لہ $س = .$ سے وہ تمام دائرے تعبیر ہوتے ہیں جو $س = .$ اور $س = .$ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں مساوات $س = .$ لہ $س = .$ کا ہندسی مفہوم قابل غور ہے۔

اس نقطہ سے جس کے محدد مساوات $س = .$ لہ $س = .$ کو پورا کرتے ہیں دائروں $س = .$ اور $س = .$ کے ماس کمیٹیو تو دفعہ ۸۲ سے معلوم ہوگا

کہ میں = کے ماس کا مربع، میں = کے ماس کے مربع کا لگنا ہے۔
اس لیے سب ذیل مسئلہ مائل ہوتا ہے:
اُس نقطہ کا طریق جو اس طرح حرکت کرے کہ اس سے
دو دیے ہوئے دائروں کے ماس ایک مستقل نسبت میں ہوں
ایک اہم محور دائرہ ہوتا ہے۔

۸۷۔ اگر دو دائروں کے مرکز و و اور نصف قطر ۱ و ۱ ہوں تو
وہ دو نقطے جو خط و و کو داخلا اور غار بنائے ۱: ۱ میں تقسیم کرتے
ہیں ان دو دائروں کے مشابہت کے مرکز کہلاتے ہیں۔
مشابہت کے مرکزوں کے خواص پر بحث کرنے کا بہترین طریقہ
ہندسی طریقہ ہے۔

ان میں سے اہم ترین خواص یہ ہیں (۱) دو دائروں کے مشترک
ماسوں میں سے دو، مشابہت کے ہر مرکز میں سے گذرتے ہیں،
(۲) دو دائروں کے مشابہت کے ایک مرکز میں سے گذرنے والا
کوئی خط مستقیم ان دو دائروں سے مشابہتاً منقطع ہوتا ہے۔

مشائیں

۱۔ اُس ماس کا طول معلوم کرو جو نقطہ (۵، ۲) سے دائرہ لا + ما
۲- لا - ۳ - ۱ - ۱ کا کہینچا گیا ہے۔

نیز ان ماسوں کا طول معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۴) سے دائرہ

۴ لا + ۴ ما - ۳ لا - ۱ - ۱

جواب: ۳، ۲، ۱

کے کہینچے گئے ہیں۔

۲۔ نقطوں (۰، ۳)، (۲، ۱) اور (۱، ۱) میں سے گذرنیوالے

دائرہ کی مساوات معلوم کرو اور سبدا (میں سے گذرنے والے تمام دائروں سے)

قطعات کے مستقل متطیل کی قیمت معلوم کرو۔ جواب : $\frac{1}{2}$

۳۔ دائروں $لا + ما + نا + ۲ + لا + ۳ - ما - ۴ = ۰$ اور $لا + ما - ۲ - لا - ۳ - ما$

۱۔ کے بنیادی محور کی مساوات معلوم کرو۔ جواب : $لا + ما - ۲ = ۰$

۴۔ دائروں $لا + ما + ب + لا + ب - ما - ۴ = ۰$ اور $لا + ما + ب + لا + ب - ۲ - ۳ - ما$

۱۔ $ما = ۰$ کا بنیادی محور معلوم کرو۔ جواب : $لا - ب + ما + \frac{۱}{۲} = ۰$

(۹۵) ۵۔ دائروں $لا + ما + ۱ + ما + ب + ما + ج = ۰$ اور $لا + ما + ب + لا$

$۱ + ما + ج = ۰$ کا بنیادی محور اور مشترک وتر کا طول معلوم کرو۔

جواب : $لا - ما = ۰$ ، $\left\{ \frac{۱}{۲} (۱ + ب) - ۳ - ج \right\}$

۶۔ ثابت کرو کہ تین دائرے

$لا + ما + ۱۲ - لا - ۳ - ما - ۱۲ = ۰$ اور $لا + ۲ + ما + ۸ + ما + ۱۶ = ۰$

$لا + ما + ۱۲ + ما + ۱۲ = ۰$

ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

۷۔ تین دائروں

$لا + ما + ۳ + لا + ۴ = ۰$ اور $لا + ۲ + ما + ۳ + لا + ۵ + ما + ۹ = ۰$

$لا + ما + ۳ = ۰$

۸۔ بنیادی مرکز معلوم کرو۔ جواب : $(۱ - ۲)$

دائروں

$لا + ما = ۱$ اور $(لا - ۱) + (ما - ۳) = ۴$

کے مشترک مماس معلوم کرو۔

خط $لا + م + ما + ن = ۰$ دونوں دائروں کو مس کرے گا اگر

$ن = لا + م$ اور $(ن + ل + م + ۳) = ۴$ (۱ + م)

$ن = ۲$ (۱ + م + ۳)

پس

اگر $ل + م + ۳ - ن = ۰$ تو $(ن + ل + م) = ۲$ اور اسلئے

$$م = ۰ \text{ یا } ۳ل + ۴م = ۰$$

پس جب $م = ۰$ ۔ قول $ن$ اور مساوات $لا + ۱ = ۰$ ہے۔

لیکن جب $۳ل = ۰$ ۔ $۴م$ تو $۳ن = ۵م$ اور مساوات $۳لا - ۶۲ - ۵ = ۰$ ہے۔

ہر اگر $ل + ۳م + ۳ن = ۰$ ۔ قول ۰ ۔ یا $۳ل = ۳م$

پس جب $ل = ۰$ ۔ قوم $ن$ ۔ اور مساوات $ما - ۱ = ۰$ ہے۔

لیکن جب $۳ل = ۳م$ تو $۳ن = ۵م$ اور مساوات $۳لا + ۴م$

$$۵ = ۰ \text{ ہے۔ } [$$

۹۔ ان خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو دائروں

$$لا + ما = ۴ \text{ اور } (لا - ۴) + ما = ۱$$

ردنوں کو مس کرتے ہیں۔ نیز مشابہت کے مرکزوں کے محدود معلوم کرو۔

$$\text{جواب: } ۳لا \pm ۲ما - ۸ = ۰ \text{ اور } لا \pm ۱۵ما - ۸ = ۰$$

$$(۰, ۸) \text{ و } (۰, ۱۵)$$

۱۰۔ اگر نقطہ (ف، گ) سے دائرہ $لا + ما = ۶$ کے تماس کا طول اس

ماس کا دو چند ہو جو نقطہ (ف، گ) سے دائرہ $لا + ما + ۳لا + ۳ما = ۰$ کا ہے تو

$$۲ + گ + ۴ف + ۴گ = ۰$$

۱۱۔ اگر کسی نقطہ سے دائرہ $لا + ما + ۲لا = ۰$ کے تماس کا طول اس مقام

کے طول کا تین گنا ہو جو اسی نقطہ سے دائرہ $لا + ما - ۴ = ۰$ کا ہے تو ثابت کرو

یہ نقطہ دائرہ

$$۴لا + ۴ما - لا - ۱۸ = ۰$$

پر ہونا چاہئے۔

۱۲۔ اس دائرہ کی مسافات معلوم کرو جو دائروں $لا + ما + ۲لا$

$۴لا - ۱۸ = ۰$ اور $لا + ما + ۳لا - ۶ = ۰$ کے نقاط تقاطع میں سے ایک نقطہ

(۲، ۱) میں سے گزرتا ہے۔

$$\text{جواب: } لا + ما + ۴لا - ۵ = ۰$$

۱۳۔ ایک دائرہ کی مسافات معلوم کرو جو $لا + ما - ۴ = ۰$ اور $لا + ما$

۲- لا۔ ۳+ ما۔ ۴= کے نقاط تقاطع میں سے گزرے اور خط لا+ ۲+ ما۔ کو جس کے جواب: لا+ ما۔ لا- ۲+ ما۔

۸۸۔ حسب ذیل مثالوں میں بعض اہم ہیں۔
(۱) ہم نور دائروں کے ایک سلسلہ کے لحاظ سے کسی ثابت نقطہ کے قطبی ایک دوسرے ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور نظام کے انتہائی نقطوں میں سے ایک کا قطبی تمام دائروں کے لیے وہی ہے۔
دائروں کا نظام مساوات

لا+ ما+ ۲+ لا+ ج=۰۔ (۱)
سے ماہل ہوتا ہے جہاں ج تمام دائروں کے لیے وہی ہے (دفعہ ۸۵)۔
نظام کے انتہائی نقطہ (± ج) ہیں۔
فرض کرو کہ ثابت نقطہ کے محدود (ف) ہیں۔ تب (۱) کے لحاظ سے
قطبی کی مساوات

ف لا+ گ+ ما+ ۱ (لا+ ف) + ج=۰۔ (۲)
ہوگی۔

۱ کی قیمت خود کچھ بھی ہو خط مستقیم (۲) ہمیشہ اُس نقطہ میں سے گزرے گا جو ف لا+ گ+ ما+ ج=۰ اور لا+ ف=۰ سے ماہل ہوتا ہے۔
اگر ف=± ج اور گ=۰ تو مساوات (۲) 'ف (لا+ ف)' + ۱ (لا+ ف)=۰ میں تحویل ہوتی ہے اور اس لئے لا+ ف=۰۔
پس انتہائی نقطوں میں سے ایک کا قطبی وہ خط ہے جو دوسرے انتہائی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور بنیادی محور کے متوازی ہے۔

(۲) اگر اب ج کوئی مثلث ہو اور ایک دائرہ کے لحاظ سے تین نقطوں کے قطبیوں سے مثلث (آب) بنے چنانچہ ب ج (کا قطبی ہے) ج (آ) کا قطبی ہے اور (آب) کا قطبی ہے تو تین خطوط مستقیم (آ) ب ب ج ج ایک نقطہ پر ملیں گے۔
فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ} \quad (۱)$$

ہے اور فرض کرو کہ نقطوں (ب، ج کے محدود علی الترتیب لا، ما اور لا، ما
ور لا، ما ہیں۔

ابتداءً خطوط مستقیم ب، ج، ج، (ب کی مساواتیں

$$\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ} = \text{ؤ} \quad (۲)$$

$$\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ} = \text{ؤ} \quad (۳)$$

$$\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ} = \text{ؤ} \quad (۴)$$

ہیں۔

(۲) اور (۳) کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والا ایک خط ہے اور
اس لیے اس کی مساوات (دفعہ ۳۳)

$$\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ} = \text{ؤ} (\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ})$$

میں شامل ہے۔ لیکن یہ خط (۱) میں سے بھی گزرتا ہے جس کے محدود (لا، ما) ہیں۔

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں

$$\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ} = \text{ؤ} (\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ})$$

سے معلوم کرتے ہیں۔

پس (۱) کی مساوات

$$(\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ}) (\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ})$$

$$= (\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ}) (\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ}) \quad (۵)$$

ہے۔

دوسری مساواتیں متشاکل ہونے کی وجہ سے لکھ لی جاسکتی ہیں۔ چنانچہ

وہ ہونگی

$$(\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ}) (\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ})$$

$$= (\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ}) (\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ}) \quad (۶)$$

$$(\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ}) (\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ})$$

$$= (\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ}) (\text{لا} + \text{ما} = \text{ؤ}) \quad (۷)$$

چونکہ تین مساواتیں (۵) (۶) اور (۷) باہم جمع کرنے پر متساویہ معلوم ہوتی ہیں اس لیے ان مساواتوں سے تیسرے شدہ خطوط (۱) (۲) (۳) اور ج ج ایک نقطہ پر ملتے یا نہیں (دفعہ ۳۴)۔

(۳) دو دہیے ہوئے دائروں کے نقاط تقاطع میں سے ایک وہ ہے اور دوسرے سے گزرنے والا کوئی تہذیب ان دائروں کو مرکز علی الترتیب ف و ف پر قطع کرتا ہے۔ ف ق کے وسطی نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۵ کو مساویہ ۱، ۲ اور ۳ میں سے کسی مساوات میں (دفعہ ۸۰)

ر = ۲ (ججم - طه) (عہ) اور ر = ۲ بجم (طه - بہ)

تیسرا۔

تب ط کی کسی مخصوص قیمت کے لیے

وف = ۲ (ججم - طه) (عہ) (۱)

وق = ۲ بجم (طه - بہ) (۲)

اگر ف ق کا وسطی نقطہ ہے تو

ور = ۱ (وف + وق)

∴ ور = (ججم - طه) (عہ) + بجم (طه - بہ)

∴ اس کا طریق

ر = (ججم - طه) (عہ) + بجم (طه - بہ)

= (ججم - طه) (عہ) + بجم (طه - بہ) + (ججم - طه) (عہ) + بجم (طه - بہ)

سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے یہ طریق وہ دائرہ ہے جس کی مساوات

ر = (ججم - طه) (عہ) + بجم (طه - بہ)

ہے جہاں ۱ اور ۲ مساواتوں

(ججم - طه) (عہ) + بجم (طه - بہ) = (ججم - طه) (عہ) + بجم (طه - بہ)

سے معلوم ہوتے ہیں۔

(۳) اگر ایک مثلث (ج ج کے ساتھ دائرہ پر کے کسی نقطہ سے مثلث

کے ضلعوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے پائیں ایک خط مستقیم پروجی ہوں گے۔

نقطہ و کو مبدا اور اس میں سے گزرنے والے قطر کو ابتدائی خط و۔ تب
دائرہ کی مساوات $ر = ۲ \text{ (جم ط)}$ ہوگی۔

فرض کرو کہ نقطوں $ا$ ، $ب$ ، $ج$ کے زاویہ معد علی الترتیب $ع$ ، $ب$ ، $ج$ ہیں
خط $ب ج$ وہ خط ہے جو (۲ جم ب) اور (۲ جم ج) کو ملاتا
ہے۔ $ب ج$ کی قطبی مساوات معلوم کرنے کے لیے عام شکل $ع = رجم ط$ (فہ)
کو (دفعہ ۵) اور $ب اور ج$ کے محدود درجہ کرو۔ اس طرح $ع$ اور $فہ$ کو معلوم
کرنے کے لیے دو مساواتیں حاصل ہونگی یہ مساواتیں

$$ع = ۲ \text{ (جم ب)} \text{ (جم ب - فہ)}$$

$$ع = ۲ \text{ (جم ج)} \text{ (جم ج - فہ)}$$

اور

ہونگی۔ پس $فہ = ب + ج$ اور $ع = ۲ \text{ (جم ب + جم ج)}$ ۔ اس لیے $ب ج$ کی
مساوات

$$۲ \text{ (جم ب + جم ج)} = رجم ط - ب - ج \text{ (۱)}$$

ہے۔

اسی طرح $ج ز$ اور $ا ب$ کی مساواتیں علی الترتیب

$$۲ \text{ (جم ج + جم ع)} = رجم ط - ج - ع \text{ (۲)}$$

$$۲ \text{ (جم ع + جم ب)} = رجم ط - ع - ب \text{ (۳)}$$

ہونگی۔

خطوں (۱)، (۲)، (۳) پر نقطہ و سے عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے
پائین کے معد علی الترتیب (۲ جم ب + جم ج) ، (۲ جم ج + جم ع) ، (۲ جم ع + جم ب) ہوں گے۔ یہ تین نقطے سب کے سب اس خط مستقیم پر ہیں جس کی مساوات
 $۲ \text{ (جم ع + جم ب)} = رجم ط - ع - ب$ (۴) ہے۔

ہے۔

عمودوں کے پائین میں سے گزرنے والے اس خط کو مثلث کے لحاظ سے
نقطہ و کا خط پائین کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ دائرہ پر دو سرانقطہ $د$ ہے اور اس کا زاویہ معد و نہ ہے۔

چار نقطوں (ا، ب، ج، د) میں سے تین تین کو چار طریقوں سے لیا جاسکتا ہے اور اس طرح چار مثلثوں کے جواب میں ۹ کے چار خطوط پائین حاصل ہوں گے۔ ہم نے ان میں سے ایک خط پائین کی مساوات معلوم کی ہے یعنی مساوات (۴)۔ دیگر تین کی مساواتیں تشاکل سے لکھ لی جاسکتی ہیں چنانچہ یہ مساواتیں

۲ ا و جم ب جم جہ جم ضہ = رجم (ط - ب - جہ - ضہ) (۵)
 ۲ ا و جم جہ جم ضہ جم عہ = رجم (ط - جہ - ضہ - عہ) (۶)
 اور ۲ ا و جم ضہ جم عہ جم بہ = رجم (ط - ضہ - عہ - بہ) (۷)

ہوں گی۔

خطوں (۴)، (۵)، (۶) اور (۷) پر نقطہ و سے عمودوں کے پائین کے منہ د (۲ ا و جم عہ جم بہ جم جہ عہ + بہ + جہ) وغیرہ ہوں گے۔ یہ چار نقطے سب کے سب اس خط پر ہیں جس کی مساوات

۲ ا و جم عہ جم بہ جم جہ جم ضہ = رجم (ط - عہ - بہ - جہ - ضہ)

ہے۔

صریحا اس مسئلہ کی توسیع کی جاسکتی ہے۔

(۵) خطوط مستقیم $لا + ۲ لا + ۲ لا + ب ما =$ کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرنے والے خطوں کی مساواتیں معلوم کرنا۔

دیے ہوئے خطوط مستقیم اور کسی دائرہ $لا + ۲ لا + ۲ لا + ب ما =$ کے نقاط تقاطع میں سے جہاں دائرہ کا مرکز ان خطوں کا نقطہ تقاطع ہے متوازی خطوط مستقیم کے دو زوج کھینچے جاسکتے ہیں جن میں سے ہر زوج مطلوبہ نصفوں میں سے ایک کے متوازی ہوگا۔

اب صریحا $لا + ۲ لا + ۲ لا + ب ما =$ (۱) سے دو متوازی خطوط مستقیم خطوط اور دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے اور (۱) سے دو متوازی خطوط مستقیم تعبیر ہوتے ہیں جو

(۱) $لا + ۲ لا + ۲ لا + ب ما =$ (۲) کا دائیں جانبی رکن ایک کامل سے تعبیر شدہ خطوط مستقیم کے متوازی ہیں بشرطیکہ (۲) کا دائیں جانبی رکن ایک کامل

مرتب ہو جس کے لیے یہ شرط ہے کہ

$$(۱+ل) (ب+ل) - (ل+لجم سم) = ۰ \dots (۳)$$

نزید ترین جب شرط (۳) پوری ہوتی ہے تو (۲) سے تعبیر شدہ منطبق خطوط

(۹۹)

زوج

$$\{ (۱+ل) (ل+ل) + (ل+لجم سم) \} = ۰$$

$$\{ (ل+لجم سم) (ل+ل) + (ب+ل) (ل+ل) \} = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

پس مطلوبہ ناصفوں میں سے ایک۔

$$ل+ل+لجم سم+ل (ل+ل+لجم سم) = ۰$$

$$ل+ل+لجم سم+ل (ل+ل+لجم سم) = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ل دو درجی (۳) کی ایک اصل ہے۔

ان آخری دو مساواتوں سے ل کو ساقط کرنے سے ناصفوں کی مطلوبہ

مساوات حاصل ہوتی ہے یعنی

$$(ل+ل+لجم سم) - (ل+ل+لجم سم) (ل+ل+لجم سم) = ۰$$

$$ل (ل+لجم سم) - (ل+لجم سم) (ل+ل+لجم سم) = ۰ \dots (۴)$$

(۶) چار دائروں کے مرکز 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ہیں اور ان میں سے ہر دائرہ

ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ ان کے مستوی میں کسی نقطہ سے

ان چار دائروں کے مماسوں کے مربع 'م' 'م' 'م' 'م' ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$م' ا' ب ج د - م' ا' ج د + م' ا' د ب - م' ا' ب ج = ۰$$

اُس نقطہ کو جس سے مماس کھینچے گئے ہیں بدار قرار دو اور فرض کرو کہ دائرہ

$$ل+ل+لجم سم - ل+لجم سم - ل+لجم سم - ل+لجم سم = ۰$$

دائروں

لآ + ما - رگ لا - ۲ ف + م = ۰، وغیرہ
سے علی القوائم منقطع ہوتا ہے۔

تب
گگ + ف + ف - ج - م = ۰، وغیرہ
گگ + ف + ف - ج - م = ۰، وغیرہ

اس لیے

گ	ف	م
گ	ف	م
گ	ف	م
گ	ف	م

م (ب ج د) - م (ج د ا) + م (د ا ب) - م (ا ب ج) = ۰

کیونکہ (۱) نقطہ (گ، ف) ہے وغیرہ۔
(۲) اگر ایک دائرہ پر کوئی چار نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ہوں اور دائرہ کے
مندی میں و کوئی نقطہ ہو تو

و ا × ب ج د - و ب × ج د ا + و ج × د ا ب
- و د × ا ب ج = ۰

خلیہ ہوا کا مسئلہ اخذ کرو۔

و کو پیدا و قرار دو اور فرض کرو کہ نقطہ 'ا' کے محدد (لا، م) ہیں وغیرہ۔

دائرہ ب ج د

لآ + ما	لا	ما	ا
لآ + ما	لام	لام	ا
لآ + ما	لام	لام	ا
لآ + ما	لام	لام	ا

۱۰۰ ہے۔ اگر یہ دائرہ نقطہ (لام، ما) میں سے گزرے تو

و	ا	لا	ما
وب	ا	لا	ما
وج	ا	لا	ما
ود	ا	لا	ما

پنے و، ج، د۔ وب × ج، د + وج × د، اب

- ود × د، اب ج =

و کے تمام مقامات کے لیے یہ درست ہے۔ اس لیے اگر دائرہ اب ج د کے مستوی میں کوئی چار نقطے 'ق'، 'ر'، 'س' ہوں تو

ف (ا × د)۔ ف ب × د، ف ج × د۔ ف د × د =

ق (ا × د)۔ ق ب × د + ق ج × د۔ ق د × د = 'و' وغیرہ
پس 'د'، 'ہ'، 'م'، 'م' کو ساقط کرنے پر

ف	ا	ب	ج	د
ق	ا	ب	ج	د
ر	ا	ب	ج	د
س	ا	ب	ج	د

جہاں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ایک دائرہ پر ہیں اور 'ف'، 'ق'، 'ر'، 'س' دائرہ کے مستوی میں کوئی چار نقطے ہیں

اب فرض کرو کہ 'ف'، 'ر' پر منطبق ہوتا ہے، 'ق'، 'ب' پر منطبق

ہوتا ہے، وغیرہ تو

(۱۰۱) پس $(1^2 - 2^2) = -3$ بشرطیکہ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

یعنی اگر

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

چوتھے باب پر مثالیں

- ۱۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے ایک ثابت خط مستقیم سے اس کا عمودی فاصلہ ثابت کرو کہ یہ نقطہ ایک دائرہ مرصع کرتا ہے۔
- ۲۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک مربع کے چار ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔
- ۳۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن ثابت نقطوں سے اسکے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۴۔ ۱) اور ب دو ثابت نقطے ہیں اور نقطہ ف اس طرح حرکت کرتا ہے کہ $ف = ۱ = ن \times ف ب$ ۔ ثابت کر دو کہ ف کا طریق ایک دائرہ ہے۔ نیز ثابت کر دو کہ ن کی مختلف قیمتوں کے لیے جو دائرے حاصل ہوتے ہیں سب کے سب ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

۵۔ ایک نقطہ کا طریق معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک مساوی الاضلاع مثلث کے قاعدے سے اس کے فاصلہ کا مربع اسی مستطیل کے مساوی ہوتا ہے جو مثلث کے دیگر ضلعوں سے اس کے فاصلوں سے بنتا ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ خطوط LA و LB $6 + 11r$ و $6 + 11s$ اور LA و LB $5 = 6r + 11s$ سے بننے والے مثلث کے مانط دائرہ کی مساوات
 $LA^2 + LB^2 - LA \cdot LB = 50$

۷۔ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا قطر دائروں

$\therefore = 1 + 6r + 12r^2 + 8r^3 + r^4$

۸۔ ان خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خط لا + ۲ ما - ۳ = ۰ اور (۱۰۲) دائرہ لا + ۲ ما - ۲ = ۰ کے نقاط تقاطع کو مبداء سے ملاتے ہیں اور نشان کرو کہ وہ ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

۹۔ ایک ثابت نقطہ O سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو ایک ثابت خط مستقیم سے نقطہ F پر ملتا ہے۔ اگر خط پر ایک ایسا نقطہ Q لیا جائے کہ مستطیل OQ OF متماثل ہو تو ثابت کرو کہ Q کا لگائی ایک دائرہ ہے۔

۱۰۔ ایک ثابت نقطہ O سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو ایک ثابت

۱۔ ایک ثابت نقطہ W سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو ایک ثابت دائرہ سے F پر ملتا ہے اور خط پر ایک ایسا نقطہ Q لیا گیا ہے کہ مستطیل WQ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ Q کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۱۱۔ چار خطوط مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب لا۔ ۱۔ ۲۔ ۳۔ ۴۔

ذو اربعۃ الاضلاع کے تین وتروں کے سرے (۱-۱) اور (۲-۲) (۱'۲) اور (۱'۳) اور (۱'۴) اور (۲'۳) اور (۲'۴) اور (۳'۴) ہیں۔ اس سے ثابت کرو کہ وہ تین دائرے جن کے قطریہ وتر ہیں ہم محور ہیں۔

[بنیادی محور ۲ لا + ما - ۱۱ = ۰ ہے۔]

۱۲۔ ایک ذواربۃ الاضلاع کے ضلعوں کی مساواتیں علی الترتیب
ما - ۱ = ۰، لا - ۱ = ۰، لا + ۱ = ۰، لا + ۵ = ۰، اور ۳ لا + ما - ۱۳ = ۰ ہیں۔ ان
دائرہوں کی مساواتیں معلوم کرو جو اس ذواربۃ الاضلاع کے وتروں کو قطر مانکر
کھینچے گئے ہوں اور ثابت کرو کہ یہ دائرے ہم محور ہیں۔

[بنیادی محور ۲ لا + ما - ۸ = ۰ ہے۔]

۱۳۔ ثابت کرو کہ دو دیے ہوئے دائروں کی مساواتیں ہمیشہ شکل
لا + ما + لا + لا + ب = ۰، لا + ما + لا + لا + ب = ۰
میں لکھی جاسکتی ہیں اور یہ کہ ان میں سے ایک دائرہ دوسرے کے اندر ہوگا اگر
لا + لا + ب دونوں مثبت ہوں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مرکز سے دو نقطوں کے فاصلے ان
فاصلوں کے متناسب ہوتے ہیں جو ان نقطوں میں سے ہر ایک کے دوسرے
کے قطبی سے ہیں۔

۱۵۔ اگر دو دیے ہوئے دائروں کے مشابہت کے مرکزوں کو ملائیوا
خط پر اس کو قطربان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس دائرہ پر کے
کسی نقطہ سے دیے ہوئے دائروں کے مماس متناظر نصف قطروں کی نسبت
میں ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو کہ اس سے دو ہم مرکز دائروں کے
مماس ان کے نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہوں۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ دائروں لا + ما + لا + لا = ۰، اور لا + ما - لا = ۰
کے مشترک مماس ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔

۱۸۔ خط $\text{لا} = \text{ج}$ دائرہ $\text{لا} + \text{ما} = \text{گ}$ $\text{لا} - \text{ب} = \text{ا}$ ۔ کو نقطوں ف پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر $(\text{ا} - \text{ب})$ سے ف یا ا کے ماس پر عمود کھینچ جائیں تو ان عمودوں کا حاصل ضرب ا کی تمام قیمتوں کے لیے ج کے مساوی ہے۔

۱۹۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک منظم کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۲۰۔ ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتا ہے اور و میں سے گذرنے والے دو خطوط مستقیم کو جو ایک دوسرے کے علی القوام ہیں نقاط ف پر قطع کرتا ہے اور خط ف ق ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ دائرہ کے مرکز کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۱۔ نقاط $(\text{ا} - \text{ب})$ اور $(\text{ب} - \text{ا})$ کو ملانے والے خط کو قطر مانکر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کی قطبی مساوات

$$\text{ر} - \text{ز} = \{ (\text{ا} - \text{ب}) + (\text{ب} - \text{ا}) \} + \text{ا} + \text{ب} = (\text{ا} - \text{ب}) = \text{ا} - \text{ب}$$

۲۲۔ اس دائرہ اور خط مستقیم کے نقاط تقاطع پر رکی قیمتیں معلوم کر نیچے مساوات معلوم کرو جن کی مساواتیں علی الترتیب

$$\text{ر} = \text{ا} + \text{ب} \quad \text{اور} \quad \text{ر} = (\text{ا} - \text{ب}) = \text{ا} - \text{ب}$$

ہیں۔ ع کی قیمت متعین کرو جبکہ خط مستقیم ایک ماس ہو جائے۔

۲۳۔ ایک مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں

$$\text{ا} = \text{ب} + \text{ج} \quad \text{اور} \quad \text{ا} = \text{ب} - \text{ج} \quad \text{اور} \quad \text{ا} = \text{ب} + \text{ج} - \text{ا}$$

ہیں۔ اس کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدود معلوم کرو۔

۲۴۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کے قطبی بلحاظ دو دیے ہوئے دائروں کے ایک دوسرے کے ساتھ معلومہ زاویہ بنائیں۔

(۱۰۳)

۲۵۔ دو دائروں کے بنیادی محور کے کسی نقطہ سے ان دائروں کے تماس کیجئے گئے ہیں اور وہ خطوط جو نقاط تماس کو دائروں کے مرکوزوں سے ملاتے ہیں خارج کئے گئے ہیں تاکہ وہ ایک دوسرے سے ملیں۔ ان کے نقطہ تقاطع کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۶۔ اگر وہ چار نقطے جن میں دو دائرے

$$لا + لا + ب + ما + ج = ۰، لا + لا + ب + ما + ج = ۰$$

خطوط مستقیم

لا + ب + ما + ج = ۰، لا + ب + ما + ج = ۰ سے منقطع ہوتے ہیں ایک دوسرے دائرہ پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ

۱۔	۲۔	۳۔
لا	ب	ج
لا	ب	ج

۲۷۔ دو ثابت نقطوں میں سے دائروں کا ایک نظام کینیا گیا ہے اور ایک دیے ہوئے خط مستقیم کے متوازی ان دائروں کے تماس کیجئے گئے ہیں۔ نقاط تماس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۸۔ اگر تین ہم مرکز دائروں کے مرکز 'ب' 'ج' ہوں اور کسی نقطہ سے ان کے تماس 'م' 'م' 'م' ہوں تو رشتہ

$$ب + ج + م + م + م = ۰$$

کو ثابت کرو۔

۲۹۔ اگر کسی نقطہ سے تین دیے ہوئے دائروں کے تماس طول میں 'م' 'م' 'م' ہوں جہاں دائروں کے مرکز ایک ہی خط مستقیم میں نہیں ہیں تو ثابت کرو کہ کوئی دائرہ یا کوئی خط مستقیم شکل

$$لا + م + ب + ج + م = ۰$$

(ایک مساوات سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

خطوط مستقیم کے لیے 'ا'، 'ب'، 'ج' کے درمیان کون سا رشتہ درست رہتا ہے۔
۳۰۔ ایک دائرہ تین دہے ہوئے دائروں کو ایک ہی زاویہ پر قطع
ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

$$۳۱۔ \text{خط } \frac{لا}{ه} + \frac{ما}{س} - ۱ = ۰ \text{ کے تشبیہوں کا طریق جبکہ قطب ان دائروں}$$

بلحاظ سے لیے گئے ہوں جو قائم محوروں کو مس کرتے ہیں مساواتوں

$$(ه - لا - ک) (ما - ک لا) + (ک - ه) (ک - لا) = ۰$$

ع حاصل ہوتا ہے۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ وہ تمام دائرے جو دو ثابت دائروں کو مس کرتے

ہیں دو دوسرے ثابت دائروں میں سے ایک کے علی القوائم ہوتے ہیں۔

۳۳۔ اگر دو دائرے علی القوائم تقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے

مشترک قطر پر نقطوں کے جوڑوں کی لامتناہی تعداد معلوم کیجا سکتی ہے ایسے کہ

ان میں سے کسی ایک نقطہ کا قطبی بلحاظ ایک دائرہ کے وہی ہو جو دوسرے

نقطہ کا قطبی بلحاظ دوسرے دائرہ کے ہے۔ نیز ثابت کرو کہ نقطوں کے کسی ایسے

زوج کا درمیانی فاصلہ دو دائروں کے نقاط تقاطع میں سے ایک پر قائم زاویہ

ثابت ہے۔

۳۴۔ اگر دو دائروں کی مساواتیں جن کے نصف قطر 'ا' و 'ب' میں سے

۱ = ۰ ہوں تو دائرے

$$\frac{س}{ا} = \frac{س}{ب}$$

ان القوائم تقاطع ہوں گے۔

۳۵۔ دو باہم علی القوائم خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو

ان میں سے ہر ایک دو دائروں

$$(لا - ا) + ا = ما = با، (لا + ا) + ا = ما = ج$$

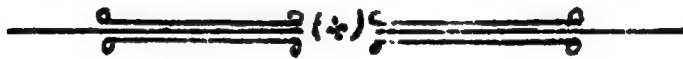
میں سے ایک کو مس کرے۔ نیز ثابت کرو کہ ان خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کے
تامصف ہمیشہ دو دوسرے ثابت دائروں میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتے ہیں۔
۳۶۔ ایک مثلث کے راس علی الترتیب (۰، ۰)، (۲۰، ۴۸) اور (۶۳، ۰)
ہیں۔ ثابت کرو کہ نو نقطی دائرہ کی مساوات

$$x^2 + y^2 - 11x - 5y - 30 = 0$$

ہے اور اندرونی دائرہ کی مساوات

$$x^2 + y^2 - 9x - 18y - 20 = 0$$

ثابت کرو کہ یہ دو دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔



متفرق مثلہ (۱)

(۱۰۶)

۱۔ ثابت کرو کہ مبدا، اُس مثلث کے اندر ہے جس کے راس (۱، ۲) اور (۲، ۳) ہیں۔

۲۔ ایک مربع کا ایک راس نقطہ (۳، ۳) پر ہے اور ایک وتر خط لا + ۲ = ۲۰ پر ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز (۱۲/۵، ۱۶/۵) ہے اور وہ دو راس جو دیے ہوئے وتر پر ہیں (۱۶/۵، ۱۳/۵) اور (۵/۵، ۱۹/۵) ہیں۔

۳۔ ایک دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو نقطہ (۰، ۰) میں سے گذرتا ہے اور خط لا = ج سے طول ۲ قطع کرتا ہے۔

جواب: لا + ۲ ج = لا + ج + ل
۴۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا نصف قطر ۳ ہے اور جو دائرہ لا + لا = ۲ - لا - لا = ۱۲ کو داخل نقطہ (۱، ۱) پر مس کرتا ہے۔
جواب: لا + لا = ۵ - لا - لا = ۱۳ - لا - لا = ۳۲

۵۔ اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے ضلع اُن تین خطوں پر ہیں جنکی مساواتیں

$$لا - لا = ۱ + لا، لا + لا = ۰، اور لا - لا = ۲ + لا = ۰$$

جواب: ۲۵/۸

۶۔ اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو لا + لا + لا = ۱ + لا + لا = ۰ اور لا + لا = ۳ کے نقطہ تقاطع کو لا + لا + لا = ۱ - لا = ۰ اور لا + لا = ۵ کے نقطہ

تقاطع سے ملتا ہے۔ جواب: $۲ + لا + ما = ۴$ ۔
 ۷۔ ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا نصف قطر ۵ ہے اور جو دائرہ
 $لا + ما - لا - لا - ما = ۲۰$ کو خارجاً نقطہ (۵، ۵) پر مس کرتا ہے۔
 جواب: $لا + ما - لا - لا - ما = ۱۲۰ + ۱۶$ ۔
 ۸۔ اس مثلث کے حاطہ دائرہ اور اندرونی دائرہ کی مساواتیں معلوم
 کرو جو تین خطوں $لا (۳ + لا - ما - ۱۲)$ سے بننا ہے اور ثابت کرو کہ دائرہ کا
 بنیادی محور $لا + ما + ۱ = ۰$ ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو نقطہ (۳، ۴) میں سے گزرتے ہیں اور خط
 $لا + ما - ۱۰ = ۰$ کے ساتھ ۵۴ کا زاویہ بناتے ہیں $لا - ۳ - ۵ + ما = ۱۱$ اور
 $لا + ما - ۲۴ = ۰$ ہیں۔

۱۰۔ ان دو خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خطوط
 $لا - لا - لا - ما + لا + لا - ما - ۳۵ = ۰$

کے ساتھ ایک ایسا متوازی الاضلاع بنائیں جس کے وتر مبداء پر متقاطع ہوں۔
 جواب: $لا - لا - لا - ما - لا - لا - ما - ۳۵ = ۰$ ۔

۱۱۔ اگر نقطہ (۰، ۰) سے دائرہ $لا + ما + گ + لا + ف + ما + ج = ۰$
 کے ماس و ف، وقی ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ وقی کی مساوات
 $لا + ما + گ + لا + ف + ما = ۰$ ہے۔

۱۲۔ ان دو ماسوں کی مساوات معلوم کرو جو مبداء سے دائرہ

$$لا + ما + ۱۰ + (لا + ما) + ۴۰ = ۰$$

کے کھینچے جاسکتے ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرو

جواب: مس $\frac{۴}{۳}$

۱۳۔ اس مستطیل کے دتروں کی مساواتیں معلوم کرو جو خطوط

$$۱ (لا - ۳) + ب + ما = ۰، ۱ (لا - ۴) + ب + ما = ۰$$

ب لا۔ ۱ (۳۔ ۱) = ۰ اور ب لا۔ ۱ (۲۔ ۱) = ۰ سے بنتا ہے۔
جواب: (۱۔ ۱) (ب) + ۱ (ب + ۱) = ۲ = ۱

(۱ + ۱) (ب) لا۔ ۱ (ب۔ ۱) = ۱
۱۴۔ ۱۳ لا۔ ۱۲۔ ۱۱ = ۰ اور لا۔ ۱۲۔ ۱۱ = ۵ کے نقطہ تقاطع میں
گزرنے والے وہ خطوط معلوم کرو جو مہدار سے فاصلہ ۵ پر ہیں۔

جواب: ۱۳ + ۱۲ = ۲۵۔ ۱۳ = ۱۲۔ ۱۱ = ۲۵۔ ۱۳ = ۲۵
۱۵۔ ثابت کرو کہ دواڑے

$$\begin{aligned} \text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ ج} &= ۰ \\ \text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ + ۲ \text{ ب} + ۲ \text{ ج} &= ۰ \end{aligned}$$

ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اگر $\frac{1}{\text{ج}} = \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{لا}}$
۱۶۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا مرکز عمودی جس کے راس (۱ ج م ع) (۱ ج ب ع) (۱ ج م ب) اور (۱ ج م ع) ہیں نقطہ
(۱ ج م ع) (۱ ج ب ع) ہے۔
پس ثابت کرو کہ کسی مثلث کا مرکز ہندسی، حاطہ مرکز اور مرکز عمودی کو
ملانے والے خط کو نسبت ۱:۲ میں تقسیم کرتا ہے۔

۱۷۔ ایک مثلث کے ضلع ۱۲، ۱۳، ۱۴ = ۱۵۔ ۱۲ = ۱۵۔ ۱۳ = ۱۵ اور (۱۰۸)
۱۵ = ۱۵ ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے اندرونی دائرہ اور تین باہنی دائروں کے
مرکز علی الترتیب (۱، ۸)، (۲، ۳)، (۳، ۴)، (۴، ۵) اور (۵، ۱۲) ہیں۔
۱۸۔ ثابت کرو کہ مساواتوں

$$۱۲ \text{ لا}^۲ + ۱۲ \text{ ما}^۲ + ۱۲ \text{ لا} + ۱۲ \text{ ج} = ۰ \text{ اور } ۱۲ \text{ لا}^۲ + ۱۲ \text{ ما}^۲ + ۱۲ \text{ لا} + ۱۲ \text{ ج} = ۱$$

سے تعبیر شدہ خطوط مستقیم ایک مربع کے ضلعوں پر ہیں۔
۱۹۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر نقطوں (۱ م، ۲ م) (۲ م، ۳ م) (۳ م، ۴ م) (۴ م، ۵ م) کو ملانے والا خط مستقیم ہے م کی تمام قیمتوں کے لیے لا + ۱ = ۰ کو مس کرتا ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ چار نقطے $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$ ، $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$ ، $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$ اور $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$ ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اگر m, n, p, q مساوی ہو۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

$ab + (a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)$ دو خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبداء سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔

۲۲۔ اس مسئلے کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے اضلاع مساوی ہوں۔
 $(a + b)^2 - c^2 = 0$ اور $(a - b)^2 - c^2 = 0$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۳۔ ثابت کرو کہ دو دائروں $a^2 + b^2 = r^2$ اور $a^2 + b^2 = R^2$ کے نقاط تقاطع ان کے مرکز اور محدودوں کا مبداء ایک دائرہ پر ہیں۔

۲۴۔ $a^2 + b^2 = r^2$ اور $a^2 + b^2 = R^2$ کے مشترک مماس معلوم کرو۔

جواب: $a = r$ ، $b = R$ اور $a = R$ ، $b = r$ ۔



پانچواں باب

قطع مکانی

(۱۰۹)

۸۹۔ تعریفیں۔ محروطی تراش یا محروطی ایسے نقطہ کا طر

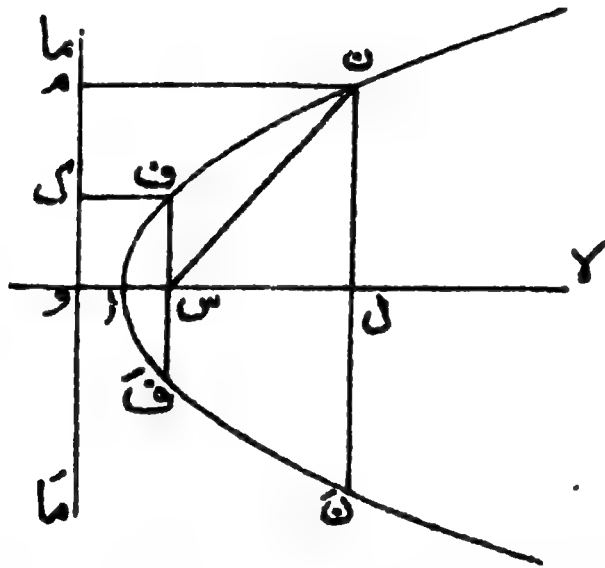
ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خط مستقیم سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے۔ ثابت نقطہ کو ماسکہ، ثابت خط مستقیم کو مرتب اور مستقل نسبت کو خروج المرکز کہتے ہیں۔

آئندہ یہ ثابت کیا جائے گا کہ اگر ایک قائم مستدیر محروطہ کو کسی مستوی سے قطع کیا جائے تو تمام صورتوں میں ایک محروطی تراش اوپر کی تعریف کی بموجب حاصل ہوگی۔ چنانچہ اولاً ان ٹخنیوں کے خواص کو محروطی تراش سمجھ کر ہی معلوم کیا گیا تھا۔

اب ہم ان میں سے سادہ ترین ٹخنی کی مساوات معلوم کریں گے اور اس کے چند خواص پر بحث کریں گے۔ یہ ٹخنی وہ ہے جس میں خروج المرکز اکائی کے مساوی ہوتا ہے۔ اس کو قطع مکانی یا صرف مکانی کہتے ہیں۔

۹۰۔ مکانی کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ $س$ ماسکہ اور $ما$ مامرتب ہے۔ $س$ و $ما$ مآپر
عمود کھینچو اور فرض کرو کہ $و$ $س = ۱۲$ فرض کرو کہ $و$ $س$ محور لا ہے
اور $و$ مآ محور $ما$ ۔
فرض کرو کہ منحنی پر کوئی نقطہ $ن$ ہے اور اس کے محدود ($لا$ ، $ما$) ہیں۔
محوروں پر $ن$ $ل$ ، $ن$ مآ عمود کھینچو (حسب شکل) اور $س$ $ن$ کو ملاؤ۔
تب بموجب تعریف $س$ $ن = ن$ $ن$ مآ
اس لیے $ن$ مآ $س$ $ن = ن$ $ن$ $ل$ + $س$ $ل$
یعنی $لا = ما + (۱۲ - لا)$
یا $ما = ۱۲ (لا - ۱)$ (۱)
یہ منحنی کی مطلوبہ مساوات ہے۔



منحنی محور لا کو ایک نقطہ $ا$ پر قطع کرتا ہے جہاں $ما = ۰$ اور ($ا$) کی رو سے
جبکہ $ما = ۰$ تو $لا = ۱$ یعنی $و = ۱$ ۔
نقطہ $ا$ کو مکانی کا $ر$ اس کہتے ہیں۔
اگر ہم مبدأ کو $ا$ پر منتقل کریں اور محوروں کی سمتوں کو نہ بدلیں

تو مساوات (۱) ہو جائے گی (دفعہ ۴)

$$\begin{aligned} \text{ما} = ۱۲ \text{ لا} \dots \dots \dots (۲) \\ \text{ماسکہ نقطہ (۱۰۰) ہے اور مرتب خط} \\ ۰ = ۱ + ۱ \end{aligned}$$

ہے۔ نیز

$$\text{س} = \text{ن} = \text{م} = \text{و} = ۱ + ۱ = ۱ + ۱$$

۹۱۔ چونکہ مکانی کی مساوات $\text{ما} = ۱۲ \text{ لا}$ ہے اور ما ایک مثبت مقدار ہے اس لیے لا کو ہمیشہ مثبت ہونا چاہیے اور اس لیے منحنی گزرتا ہوگا۔ (۱۱)

لا کی مثبت جانب واقع ہوگا۔
 لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے صریحاً ما کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار مساوی ہیں لیکن ایک مثبت ہے اور دوسری منفی۔ اس لیے منحنی کے تمام وتر جو محور لا پر عمود ہوں اس سے تعریف ہوتے ہیں اور منحنی کے وہ حصے جو محور ما کی مثبت اور منفی جانبوں پر ہیں ہر لحاظ سے مساوی ہیں۔

جب لا بڑھتا ہے تو ما بھی بڑھتا ہے اور لا اور ما کے بڑھنے پر کوئی حد نہیں ہے اس لیے محور لا کی مثبت جانب منحنی کی کوئی حد نہیں ہے۔ وہ خط جو ماسکہ میں سے گزرتا ہے اور مرتب پر عمود ہے مکانی کا محور کہلاتا ہے۔

وہ وتر جو ماسکہ میں سے گزرتا ہے اور محور پر عمود ہے وتر خاص کہلاتا ہے

$$\text{دفعہ ۹۰ کی شکل میں س} = \text{ف} = \text{ک} = \text{و} = \text{س} = ۱۲$$

اس لیے وتر خاص کا کل طول ۱۲ ہے۔

۹۲۔ ہم معلوم کر چکے ہیں کہ مکانی پر تمام نقطوں کے لیے $\text{ما} = ۱۲ \text{ لا} = ۰$ ۔ منحنی کے اندر تمام نقطوں کے لیے $\text{ما} = ۱۲ \text{ لا}$ منفی ہے۔ کیونکہ اگر ق کوئی ایسا نقطہ ہو اور ق میں سے محور کے عمود وار ایک خطا کھینچا جائے جو منحنی سے نقطہ ف پر ملے اور محور سے نقطہ ل پر تو ق کی نسبت محور سے قریب ہوگا اور اس لیے $\text{ل} > \text{ق}$ ۔ لیکن ن منحنی پر

اس لیے ل ن۔ م و ل ل۔ اور اس لیے ل ق۔ م و ل ل
منفی ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ منفی کے باہر تمام نقطوں کے لیے
ما۔ م و لا مثبت ہے۔

پس اگر ایک مکانی کی مساوات ما۔ م و لا۔ ہو اور اگر ہم اس
مساوات کی دائیں جانبی رکن میں کسی نقطہ کے محدود درج کریں تو نتیجہ مثبت
ہوگا اگر نقطہ منفی کے باہر ہے، منفی ہوگا اگر نقطہ منفی کے اندر ہے اور صفر
ہوگا اگر نقطہ منفی پر ہے۔

۹۳۔ ان نقطوں کے محدود جو خط مستقیم ما = م لا + ج اور قطع مکانی
ما = م و لا میں مشترک ہیں ان دونوں مساواتوں کو پورا کرنے چاہئیں۔
پس مشترک نقطہ پر رشتہ

(۱۲)

(م لا + ج) = م و لا (۱)
ماصل ہوتا ہے۔ اس لیے مشترک نقطوں کے فعلے مساوات (۱) سے ماصل
ہوتے ہیں جس کو شکل

م لا + (م و ج - م و ل) = م و ل (۲)
میں لکھا جاسکتا ہے۔

اب چونکہ مساوات (۲) ایک دو درجی مساوات ہے اس لیے ہم دیکھتے
ہیں کہ ہر خط مستقیم ایک مکانی سے دو نقطوں پر ملتا ہے جو حقیقی، منطبق، یا
خیالی ہو سکتے ہیں۔

جب 'م' بہت چھوٹا ہو تو مساوات (۲) کی ایک اصل بہت بڑی ہوگی
اور جب 'م' صفر کے مساوی ہو تو ایک اصل لا انتہا بڑی ہوگی۔ اس لیے
ہر وہ خط مستقیم جو مکانی کے محور کے متوازی ہو مکانی سے ایسے دو نقطوں
لیگا جن میں سے ایک محدود فاصلہ پر ہوگا اور دوسرا اس سے لامتناہی فاصلہ پر

۹۴۔ وہ شرط معلوم کرو کہ خط ما = م لا + ج 'مکانی' ما۔ م و لا۔

کوس کرے۔

حسب دفعہ سابق اُن نقطوں کے فصلے جو خاستقیم اور مکانی میں مشترک ہیں مساوات

$$U_1 r = (C + U_1 r)$$

یعنی $= 'C + 1(12 - C) + 'L$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

سے حاصل ہو لے ہیں۔
 اگر خط ماس ہے یعنی اگر وہ سکا فی کو دو منبج نقطوں پر قطع کرتا ہے تو
 مساوات کی جلیں ایک دوسرے کے مساوی ہوتی چاہیں۔ اسکے لیے
 شرط ہے

$$\frac{1}{2}(10 - 2r) = 2r$$

جو م ج = ۱ یا ج = $\frac{1}{م}$ میں تحویل ہوتی ہے۔

پس خواہ ام کچھ بھی ہو خط

$$\frac{1}{r} + u r = b$$

سکافی ما = ۴۷ لاکھ سو کڑے گا۔

مثال ۱۔ $x + 1 = 6$ کافی مآ۔ $x = 5$ کو س کرتا ہے۔

مثال ۲۔ - خط $6 = 2 + \frac{1}{4}$ مکافی $2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$ کو مس کرتا ہے۔

۹۵۔ اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو ایک (۱۱۳)

مکانی ذیبر کے دو دے ہوئے نقطوں میں سے گزرے
 نیز اس کے کسی نقطہ پر تماس کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مکانی کی مساوات

$$U_1 r = 1$$

ہے اور فرض کرو کہ اس پر دو نقطوں کے محدود (لا، ما) اور (لام، ما) ہیں۔

مساوات (ما - ما) (ما - ما) = ما - ما ولا (۱)

کو مختصر کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ وہ پہلے درجہ کی مساوات ہے اور اس لیے وہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔ اگر اس میں لا = لا اور ما = ما درج کیا جائے تو دائیں جانبی رکن تمامًا معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن اس وجہ سے معدوم ہوتا ہے کہ (لا، ما) مکانی پر ہے۔

اس لیے نقطہ (لا، ما) خط مستقیم (۱) پر ہے اور اسی طرح نقطہ (لا، ما) بھی اس خط پر ہے۔

پس مطلوبہ خط کی مساوات (۱) ہے اور یہ مساوات

(ما + ما) (ما + ما) - ما ولا - ما لام = ۰ (۲)

میں تحول ہوتی ہے۔

(لا، ما) پر ماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۲) میں

صرف ما = ما درج کرنا ہوگا چنانچہ مطلوبہ مساوات

۲ ما ما - ما ولا - ما = ۰

ما = ما ولا اس لیے

ہے یا چونکہ

ما ما = ۲ (لا + لا) (۳)

دوسرا ثبوت :- (لا، ما) اور (لام، ما) میں سے گزرنے والے

خط کی مساوات [حسب دفعہ ۲۴]

$$۰ = \begin{vmatrix} ۱ & ما & لا \\ ۱ & ما & لا \\ ۱ & ما & لام \end{vmatrix}$$

ہے اور اس لیے

$$\begin{array}{c|c|c} ۱ & ۱ & ۱ \\ \hline ۱ & ۱ & ۱ \\ \hline ۱ & ۱ & ۱ \end{array}$$

اس آخری مقطع کو پھیلاؤ اور مام۔ مام سے تقسیم کرو تب حسب سابق وتر کی

ساوات

$$۱۱۱ + ۱۱۱ = ۱۱۱ + ۱۱۱ = ۱۱۱$$

مائل ہوگی۔

نتیجہ صریح :- نقطہ (۰، ۰) پر ماس لا = ہے یعنی اس پر کا

ماس محور کے عمود وار ہوتا ہے۔

۹۶ — ہم نے دو مختلف طریقوں (دفعات ۹۴ اور ۹۵) سے کافی کے ماس کی مساوات کی دو شکلیں مائل کی ہیں۔ ان میں سے کسی ایک شکل کو دوسرے سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ فرض کرو کہ ہم جانتے ہیں کہ (نا، نا) پر کے ماس کی مساوات

$$۱۱۱ = ۱۱۱ (۱ + ۱)$$

$$۱۱۱ + ۱۱۱ = ۱۱۱$$

تب =

اگر یہ وہی خط ہو جو مساوات

$$۱۱۱ = ۱۱۱ + ۱۱۱$$

ت حاصل ہوتا ہے تو

$$۱۱۱ = ۱۱۱ \text{ اور } ۱۱۱ = ۱۱۱$$

اس لیے م ج = ۱، جیسا کہ دفعہ ۹۴ میں حاصل ہوا تھا۔ سوالات کے حل کرنے میں ماس کی مساوات کی وہ شکل لینی چاہیے جو سہولت بخش معلوم ہو۔

مثال ۱۔ ایک مکانی کے دو تماسوں کے نقطہ تقاطع کا معین ان کے
کے نقاط تماس کے معینوں کا وسط حسابی ہوتا ہے۔

نقاط (لا، ما) اور (لا، ما) پر تماسوں کی مساواتیں

$$ما = لا + ۲$$

$$ما = لا + ۲$$

تفریق سے ان کے مشترک نقطہ کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$ما - لا = (ما - لا) = ۲ - ۲ = ۰$$

$$\frac{1}{ما} = \frac{1}{لا}$$

$$\frac{1}{ما} = \frac{1}{لا}$$

$$ما = لا$$

تب معلوم ہو گا کہ
مثال ۲۔ ایک مکانی کے دو تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم
کر جبکہ تماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں۔
فرض کر دوہرے دو تماسوں کی مساواتیں

$$ما = لا + \frac{1}{م} \quad (۱)$$

$$ما = لا + \frac{1}{م} \quad (۲)$$

ہیں۔ یہ تماس چونکہ علی القوائم ہیں اس لیے $م = م = ۱$ ۔ پس دوسری مساوات
لکھی جاسکتی ہے

$$ما = لا - \frac{1}{م} \quad (۳)$$

ان کا مشترک نقطہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں صرف (۳) کو (۱) میں سے
تفریق کرنا ہو گا چنانچہ

(۱۱۵)

$$لا = ۰$$

$$لا + ۱ = ۰$$

اور اس لیے

پس مطلوبہ طریق کی مساوات $لا + ۱ = ۰$ ہے اور یہ (بموجب دفعہ ۹۰)

مرتب کی مساوات ہے۔

۹۷۔ ایک مکانی کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔

مکانی ما^۲ - ۱۴ لا = ۰ کے نقطہ (لا، ما) پر حماس کی مساوات

(دفعہ ۹۵)

$$ما + ۲ = ۱۴ (لا + لا) \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔

عماد وہ خط ہے جو (لا، ما) میں سے گزرتا ہے اور حماس پر عمود ہے۔

اس لیے اس کی مساوات (دفعہ ۳۰)

$$(ما - لا) + ۱۲ = ۱۴ (لا - لا) \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔

چونکہ $ما + ۱۴ لا = ۰$ اس لیے اوپر کی مساوات کو شکل

$$۸ (ما - لا) + (ما - لا) + ۱۴ (لا - لا) = ۰ \dots \dots \dots (۳)$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس کو لکھ سکے ہیں

$$ما = - \frac{ما}{۱۲} + لا + \frac{ما}{۸} \dots \dots \dots (۴)$$

اگر ہم $م = - \frac{ما}{۱۲}$ رکھیں تو $ما = ۱۲ م$ اور $ما = - \frac{ما}{۸} = ۱۴ م$

اس لیے مساوات (۴) ہو جاتی ہے

$$ما = ۱۴ م - ۱۲ م - ۱۴ م \dots \dots \dots (۵)$$

عماد کی مساوات کی یہ شکل بعض اوقات مفید ہوتی ہے۔

۹۸۔ اب ہم مکانی کے چند ہندسی خواص ثابت کریں گے۔

مساوی ہیں۔

اس لیے زاویہ س میں ن = زاویہ س میں م ن = ایک زاویہ قائمہ۔ (ض)
پھر چونکہ ہر نقطہ (۱، ۱) ہے اور ہر نقطہ (۱، ۱) ہے اس لیے
خط میں ہر کی مساوات

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{۱ + ۱}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

ہے۔ یہ صریحاً نقطہ ن پر کے ماس پر جو مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے
عمود ہے

میں م، ن ت پر عمود ہے' (ص)
چونکہ میں م، ن ت پر عمود ہے اور ن ت زاویہ میں ن ہر (۱۱۴)
کی تنصیف کرتا ہے اس لیے وہ میں م کی تنصیف کرے گا۔ پس اگر میں م
اور ن ت کا نقطہ تقاطع مے ہو تو میں مے = مے۔ لیکن
میں ۱ = او۔ اس لیے او، و م کے متوازی ہے اور اس لیے
وہ مکافی کے راس پر ماس ہے۔ پس وہ خط جو مکافی کے مانسکہ میں
سے گذرے اور کسی ماس ن ت پر عمود ہو اس ماس سے
راس پر کے ماس پر ملتا ہے۔
ہم اس آخری مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر ثابت کر سکتے ہیں۔
فرض کرو کہ مکافی کے کسی ماس کی مساوات

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{۱}{م} + لا = م$$

ہے۔ اس خط کی مساوات جو ماسکہ (۱، ۱) میں سے گذرے اور (۳) پر عمود ہو

$$م = - \frac{۱}{م} (۱ - لا)$$

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{۱}{م} + \frac{لا}{م} = م$$

یا

ہے۔

خطوط (۳) اور (۴) سرٹھا وہاں ملتے ہیں جہاں $\text{لا} = ۰$ ۔
نقطہ ن (لا، ما) پر کے عماد کی مساوات
 $۱۰ (ما - لا) + (لا - لا) = ۰$

ہے [دفعہ ۹]۔

نقطہ گ پر $\text{ما} = ۰$ اور اس لیے

$$۱۲ (ما + لا) + (لا - لا) = ۰$$

$$۱۲ = لا - لا = (گ - ل) = ل - ل = گ$$

$$۱۲ = ل - ل = گ - ل = ل - ل = گ$$

مثالیں

۱۔ مکانی $\text{ما} - ۱۲ لا = ۰$ کے وتر خاص کے سروں پر کے عمادوں کی
اور عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو۔ جواب: $لا \mp ما + ۱ = ۰$ ۔

$$ما \pm لا - ۱۳ = ۰$$

۲۔ وہ نقطے معلوم کرو جہاں خط $\text{ما} = لا - ۱$ مکانی $\text{ما} - ۱۲ لا = ۰$ ۔

کو قطع کرتا ہے۔ جواب: $(۱۲، ۱)$ اور $(\frac{۱}{۱۲}، \frac{۱}{۹})$ ۔

۳۔ ثابت کرو کہ مکانی $\text{ما} - ۱۲ لا = ۰$ کے نقطہ (لا، ما) پر کا عماد

مکانی کے نقطہ $(\frac{۱}{لا}، \frac{۱}{ما})$ پر کے عماد پر عمود ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ خط $\text{ما} = لا + \frac{۱}{۴}$ مکانی $\text{ما} - ۱۲ لا = ۰$ کو

منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

ثابت کرو کہ وہ $لا ۲۰ + ما ۲۰ = ۱$ کو بھی منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

۵۔ ایک خط مستقیم، لا + ما = ۲ اور ما = ۸ و لا دونوں کو مس کرتا ہے۔
ثابت کرو کہ اس کی مساوات $ما = ۱۲ + لا$ ہے۔
۶۔ ثابت کرو کہ خط $لا + ما = ۱۳$ ، منحنی
 $ما - لا - ۸ = ۱۲ + ما = ۰$

کو مس کرتا ہے۔
۷۔ ثابت کرو کہ مساوات لا + ما + لا + ۲ = ۰، ایک مکانی کو
تعبیر کرتی ہے جس کا راس نقطہ (۲، ۲) پر ہے اور جس کا وتر خاص ۲ ہے
اور جس کا محور محور ما کے متوازی ہے۔
۸۔ ثابت کرو کہ وہ تمام مکانی جن کے محور محور ما کے متوازی ہیں شکل
لا + ۲ + لا + ۲ ب ما + ج = ۰

کی مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں۔
۹۔ حسب ذیل مکانیوں میں سے ہر ایک کے راس کے محدود اور ترخانہ
طول معلوم کرو۔

(۱) $ما = ۱۰ + لا$ (۲) $لا - ۳ + لا + ۲ = ۰$
(۳) $(۲ - ما) = ۵ + لا$ (۴) $۳ لا + لا + ۱۲ - ما = ۰$
جواب: (۱) $(۱ - ۲ - ۰)$ (۲) $(۲ - ۲)$ (۳) $(۲ - ۲)$ (۴) $(۲ - ۲)$
۱۰۔ مثال ۹ کے مکانیوں میں سے ہر ایک کے ماسک کے محدود اور مرتب کی
مساوات معلوم کرو۔

جواب (۱) $(۰ - ۳ - ۰)$ (۲) $(۲ - ۳ - ۰)$ (۳) $(۲ - ۱۱ - ۰)$ (۴) $(۲ - ۵ - ۰)$
۱۱۔ اس مکانی کی مساوات لکھو جس کا ماسک مبدا پر ہے اور جس کا مرتب
خط ۲ - لا - ما = ۰ ہے ثابت کرو کہ خط $ما = ۱۲ - لا$ ، اس مکانی کو مس کرتا ہے۔

۱۲۔ اگر ایک مکانی کے محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے کوئی قریب و ن
کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے معینوں کا مستطیل، رقبہ میں مستقل ہوگا۔
نیز ثابت کرو کہ ضلعوں کا حاصل ضرب مستقل ہوگا۔

۱۳۔ ماسوں $ما = م + لا + \frac{1}{م}$ اور $ما = \frac{1}{م} + \frac{1}{لا}$ کے نقطہ تقاطع کے
عدد معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے جبکہ م م
مستقل ہو۔ نیز ثابت کرو کہ اگر $م + ۱ = ۰$ تو یہ خط مرتب ہے۔
۱۴۔ ثابت کرو کہ م کی تمام قیمتوں کے لیے خط $ما = م (لا + ۱) + \frac{1}{م}$ ،
مکانی $ما = ۲ (لا + ۱)$ کو مس کرے گا۔

(۱۱۹)

۱۵۔ دو خطوط مستقیم باہم علی القوائم ہیں اور ان میں سے ایک، مکانی
 $ما = ۲ (لا + ۱)$ کو مس کرتا ہے اور دوسرا، $ما = ۲ (لا + ۱)$ کو۔ ثابت کرو کہ
خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع خط $لا + ۱ = ۰$ پر ہوگا۔

۱۶۔ اگر ایک مکانی کے کسی ماس پر محور پر کے دو نقطوں سے جو ماس کے
سے مساوی فاصلوں پر ہوں عمود کھینچے جائیں تو ان کے مربعوں کا فرق مستقل ہوگا۔

۱۷۔ دو خطوط مستقیم اف اور اق کو ایک مکانی کے راس میں سے
ایک دوسرے کے علی القوائم کھینچا گیا ہے اور یہ خطوط منحنی سے نقطوں ف اور
ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط ف ق محور کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

۱۸۔ اگر دائرہ لا + ما + (لا + ب + ما + ج) = ۰، مکانی ما
- $ما = لا = ۰$ کو چار نقطوں پر قطع کرے تو ان نقطوں کے معینوں کا جبری مجموعہ منفی ہوگا۔
[۱۶ سے ضرب دو اور $ما$ لاکر بجائے $ما$ درج کرو۔ تب معین

مساوات

$ما + ۱۶ + ما + ۲ (ما + ۱۶ + ب + ما + ج) = ۰$
سے حاصل ہوں گے۔ ان چار معینوں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ مساوات میں ما
کی رقم نہیں ہے]
۱۹۔ اگر مکانی ما - $ما = لا = ۰$ کا ماس محور سے ت پر اور ۱ پر کے

ماس سے ما پر لے اور استیلا ت ا ماق کی تکمیل کی جائے تو ثابت کردہ ق کا طریق مکانی مآ + لا = م ہے۔

۲۰۔ اگر ایک مکانی پر تین نقطے ف ا ق اس ہوں جن کے مابین سلسلہ ہندسیہ میں تو ثابت کردہ کہ ف ا ماس کے مابین پر نہیں۔
۲۱۔ ثابت کردہ کہ اس مثلث کا رقبہ جو مکانی مآ - لا = م میں بنایا

گیا ہو

$$\frac{1}{2} (م - مآ) (م - م) (م - مآ)$$

ہے جہاں مآ، م، م ماسوں کے متعین ہیں۔

۹۹۔ کسی نقطہ سے ایک مکانی پر دو ماس کھینچے جاسکتے ہیں جو حقیقی، منطوق، یا خیالی ہونگے بموجب اس کے کہ نقطہ مکانی کے باہر، اس کے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

وہ خط جس کی مساوات

$$م = مآ + لا + \frac{1}{2} \dots \dots \dots (۱)$$

ہے مکانی مآ = م لا کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ بھی ہو (صفحہ ۹۴)۔

(۱۲۰) خط (۱) مخصوص نقطہ (لا، مآ) میں سے گزرے گا اگر

$$مآ = م لا + \frac{1}{2}$$

مآ - لا - م مآ + لا = م ہے۔ (۲)۔

مساوات (۲) ایک دو درجی مساوات ہے اور اس سے مکانی کے ان ماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، مآ) میں سے گزریں گی۔ لیکن چونکہ کسی دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں اس لیے

کسی نقطہ (لا، ما) میں سے دو تماس گذریں گے۔
 (۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہوں گی بموجب اس کے کہ
 لا۔ ۱۲ لا مثبت، صفر، یا منفی ہو۔ یعنی [دفعہ ۹۲] بموجب اسکے کہ
 (لا، ما) مکانی کے باہر، مکانی کے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔
 ۱۰۰۔ اس خط کی مساوات معلوم کرنا جو ان دو تماسوں کے
 نقاط تماس میں سے گزرے جو کسی نقطہ سے ایک مکانی پر
 کھینچے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ (لا، ما) اس نقطہ کے محدود ہیں جس سے تماس کھینچے گئے ہیں
 فرض کرو کہ تماسوں کے نقاط تماس کے محدود (ما، ک) اور (لا، ک)
 ہیں۔

$$\begin{aligned} & (ما، ک) اور (لا، ک) پر کے تماسوں کی مساواتیں \\ & \text{ماک} = ۱۲ (لا + ما) \\ & \text{ماک} = ۱۲ (لا + لا) \end{aligned}$$

ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ (لا، ما) ان دو خطوں پر ہے۔

$$\text{ماک} = ۱۲ (لا + ما) \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{ماک} = ۱۲ (لا + لا) \dots \dots \dots (۲)$$

لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) وہ شرطیں ہیں کہ نقاط (ما، ک)
 اور (لا، ک) اس خط مستقیم پر واقع ہوں جس کی مساوات

$$\text{ما} = ۱۲ (لا + لا) \dots \dots \dots (۳)$$

ہے۔

پس (۳) اس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو نقطہ (لا، ما) سے
 کھینچے ہوئے تماسوں کے نقاط تماس میں سے گذرتا ہے۔

اگر کسی نقطہ n سے ایک مکانی کے ماس کیسے جائیں تو ان کے نقاط ماس کو ملانے والے خط کو ہم مکانی کے لحاظ سے نقطہ n کا قطبی کہیں گے۔

[دفعہ ۰.۶ دیکھو]۔

۱.۱۔ اگر ایک مکانی کے لحاظ سے نقطہ f کا قطبی نقطہ q میں سے گزرے تو نقطہ q کا قطبی f میں سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ f کے محدد (لا، ما) ہیں اور q کے (لا، آ)۔

مکانی ما۔ ۱۲ = لا۔ کے لحاظ سے نقطہ f کے قطبی کی مساوی

$$ما = لا + لا$$

ہے۔ اگر یہ خط نقطہ (لا، آ) میں سے گزرتا ہے تو ماسل ہونا چاہیے

$$ما = لا + لا$$

اس نتیجہ کے تشاکل سے ظاہر ہے کہ یہ دو شرط بھی ہے کہ q کا قطبی

f میں سے گزرے۔

ٹھیک اسی طریقہ پر جو دفعہ ۰.۸ میں اختیار کیا گیا ہے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر دو نقطوں f اور q کے قطبی نقطہ ماس پر ملیں تو سر خط f کا قطب ہوگا۔

ماسک (و) کا قطبی لا + ۱ =۔ ہے اور اس لیے ماسک کا قطبی مرتب ہے۔

اگر مرتب پر کوئی نقطہ q ہو تو q ماسک کے قطبی پر ہوگا اور

اس لیے q کا قطبی f میں سے گزرے گا۔ پس مرتب پر سے کسی نقطہ سے ایک مکانی کے ماس کیسے جائیں تو نقاط ماس کو ملانے والا خط ماسک میں سے گزرے گا۔

۱.۲۔ مکانی کے متوازی و تروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے جو مکانی کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔

نقطہ پر ملتا ہے جن کا فاصلہ اس سے محدود ہوتا ہے۔ وہ نقطہ جہاں قطر منحنی کو قطع کرتا ہے قطر کا سر اگھلاتا ہے۔

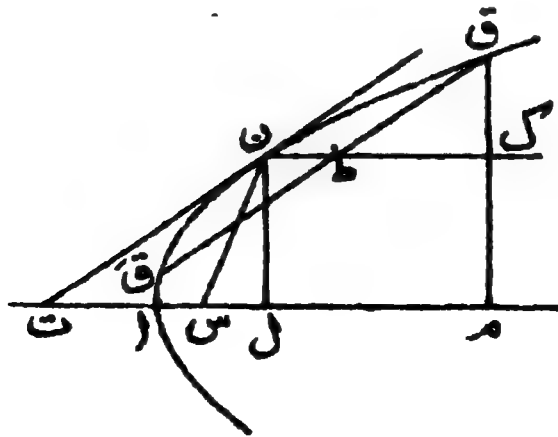
۱۰۳۔ ایک قطر کے سرے پر کا ماس اُن وتروں کے متوازی ہوتا ہے جنکی وہ تنصیف کرتا ہے۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ مکانی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطے سب کے سب ایک قطر پر واقع ہوتے ہیں۔ پس متوازی ماس یعنی اُس متوازی وتر پر غور کرنے سے جو منحنی کو متعلق نقطوں پر قطع کرتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ متوازی وتروں کے نظام کا قطر اس ماس کے نقطہ تماس میں سے گذرتا ہے جو وتروں کے متوازی ہے۔

۱۰۴۔ مکانی کی مساوات معلوم کرنا جبکہ کسی قطر اور اس کے سرے پر کے ماس کو محور قرار دیا جائے۔

فرض کرو کہ قطر کا سران ہے اور فرض کرو کہ ن پر کا ماس محور کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ تب

ل ن = ۱۲ مم طہ [دفعہ ۱۰۲ (۳)]



$$: \text{ال} = \frac{\text{ن ل}}{۱۴} = ۱ \text{ مم طہ}$$

فرض کرو کہ نئے محوروں کے حوالے سے ق کے محدود (لا، ما) ہیں۔
ق مرکز مکانی کے محور پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ وہ 'قطر ن ط کو گ پر
قطع کرتا ہے۔

$$\text{تب مرق} = \text{ل ن} + \text{گ ق} = ۲ \text{ مم طہ} + \text{ما جب طہ} \dots (۱)$$

$$\text{ا م} = \text{ا ل} + \text{ل م} = \text{ا ل} + \text{ن ط} + \text{ط گ}$$

$$(۲) \dots \dots \dots = ۱ \text{ مم طہ} + \text{لا} + \text{ما جم طہ}$$

$$\text{لیکن ق م} = ۱۴ \times \text{ا م}$$

اس لیے (۱) اور (۲) سے

$$(۲) \text{ مم طہ} + \text{ما جب طہ} = ۱۴ (۱ \text{ مم طہ} + \text{لا} + \text{ما جم طہ})$$

$$\text{یا ما جب طہ} = ۱۴ \text{ لا} \dots \dots \dots (۳)$$

$$\text{لیکن ا ل} = ۱ \text{ مم طہ} \text{ ایسے سن} = ۱ + \text{ا ل} = \frac{۱}{\text{جب طہ}}$$

اس لیے سن کی بجائے $\frac{۱}{\text{جب طہ}}$ رکھنے سے منحنی کی مساوات

$$\text{ما} = ۱۴ \text{ لا} \dots \dots \dots (۴)$$

ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ محوروں کو خواہ کسی طرح تبدیل کیا جائے مساوات
ما - لا = ۱۴ لا کی شکل

(ل لا + م ما + ن) + ل لا + م ما + ن = ۰
ہوگی (دیکھو تیسرا باب) اور اس لیے کسی مکانی کی مساوات میں جو خواہ کسی

محوروں کے حوالے سے ہو دوسرے درجہ کی رقیں ایک کابل مربع

بناتی ہیں۔

اس کے بالکس شکل

$$(ل + لا + م + م + ن) + (ل + لا + م + م + ن) =$$

نی کوئی مساوات جس میں دوسرے درجہ کی رقمیں ایک کاٹاں مریج بناتی ہیں ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی کے کسی نقطہ سے خط $ل + لا + م + م + ن =$ پر کا عمود ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو اسی نقطہ سے $ل + لا + م + م + ن =$ پر کھینچا گیا ہو اور اس لیے یہ قیوت نکلتا ہے کہ اگر ان خطوں کو لا اور ما کے نئے محور قرار دیا جائے تو منحنی کی مساوات کی شکل $ما = م + لا$ ہو جاتی ہے۔

اس طرح مساوات $(ل + لا + م + م + ن) + (ل + لا + م + م + ن) =$ ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ایک قطر $ل + لا + م + م + ن =$ ہے اور اس کے سرے پر کا ماس $ل + لا + م + م + ن =$ ہے۔
۱.۵۔ اگر ایک مکانی کی مساوات کسی قطر اور اس ماس کے حوالے سے جو قطر کے سرے پر کھینچا گیا ہو $ما = م + لا$ ہو تو خط $ما = م + لا$ کی تمام قیمتوں کے لیے اس کا ایک ماس ہو گا، کسی نقطہ $(لا، ما)$ پر اس کے ماس کی مساوات $ما - لا = (لا + لا) =$ ہوگی، مکانی کے لحاظ سے نقطہ $(لا، ما)$ کے قطبی کی مساوات $ما - لا = (لا + لا) =$ ہوگی اور خط $ما = م + لا$ کے متوازی دتروں کے وسطی نقطوں کا طریق $ما = \frac{لا}{2}$ ہو گا۔
ان مسئلوں کے لیے نئی تحقیق کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ دفعات

۹۴، ۹۵، ۱۰۰، اور ۱۰۲ برابر درست رہتے ہیں خواہ محاور علی القوا کم ہوں یا نہ ہوں۔

(۱) مکانی کے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنا جبکہ ماس ایک دوسرے کے ساتھ ایک دیا ہوا زاویہ بنائیں۔

خط $MA = M + LA$ ، مکانی $MA = M + LA$ کا ماس ہے خواہ M کی قیمت کچھ ہی ہو [دفعہ ۹۴]۔

اگر (LA, MA) کو معلومہ فرض کیا جائے تو اس مساوات سے ان ماسوں کی سمتیں معلوم ہونگی جو اس نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔ چنانچہ سمتوں کو معلوم کرنیکے لیے مساوات ہوگی

$MA = M + LA$ اور اگر اس دو درجی مساوات کی اصلیں M اور $M + LA$ ہوں تو (۱۲۵)

$$MA = M + LA \quad \text{اور} \quad MA = M + LA$$

$$\frac{MA - M}{LA} = \frac{MA - M}{LA}$$

لیکن اگر دو ماس ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ θ بنائیں تو

$$\frac{MA - M}{LA} = \frac{MA - M}{LA}$$

$$\frac{MA - M}{LA} = \frac{MA - M}{LA}$$

اس لیے مطلوبہ طریق کی مساوات

$$MA = M + LA - (M + LA) = 0$$

(۲) اس عمود کے پائین کا طریق معلوم کرنا جو ایک ثابت نقطہ سے مکانی کے کسی ماس پر کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ مکانی کی مساوات $MA = M + LA$ ہے اور ثابت نقطہ کے

محد (ک، ح) ہیں۔

مکانی کے کسی ماس کی مساوات

$$م = لا + \frac{1}{م} \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔ اس خط کی مساوات جو (ک، ح) میں سے گزرتا ہے اور خط (۱) پر عمود

$$ما - ک = -\frac{۱}{م} (لا - ح) \dots \dots \dots (۲)$$

ہے۔

طریق کو معلوم کرنے کے لیے م کو مساواتوں (۱) اور (۲) سے سا ق کرنا ہو گا۔ چنانچہ (۲) کی رو سے

$$م = -\frac{لا - ح}{ما - ک}$$

اور اس لیے (۱) میں درج کرنے سے

$$ما + \frac{لا - ح}{ما - ک} = لا + \frac{۱}{ما - ک}$$

$$یا \quad ما (ما - ک) (لا - ح) + (لا - ح) = (ما - ک) + ۱ \dots \dots \dots (۳)$$

اس لیے طریق تیسرے درجہ کا ایک منحنی ہے۔

(۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ و خود ہمیشہ طریق پر رہتا ہے۔ اگر نقطہ و مکانی کے باہر ہو تو اس سے کوئی شکل پیدا نہیں ہوتی کیونکہ ایسی صورت میں و میں سے دو حقیقی ماس کھینچے جاسکتے ہیں اور و سے ان ماسوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان کا پائین خود نقطہ و ہو گا۔ جب نقطہ و مکانی کے اندر ہوتا ہے تو و سے کھینچے ہوئے ماس خیالی ہوتے ہیں اور اس لیے و سے ان پر کھینچے ہوئے عمود بھی خیالی ہوتے ہیں لیکن وہ سب نقطہ و میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے و طریق پر ایک نقطہ ہے۔

اگر $ح = لا$ تو $ک = ما$ یعنی جب و مکانی کے ماسک پر ہوتا ہے تو

(۱۲۶) مساوات (۳) تحویل ہو کر لا { ما + (لا - لا) } = ہو جاتی ہے اور اس لیے کہی

نقطہ دائرہ ما + (لا - لا) = اور خط مستقیم لا = میں تحویل ہوتا ہے۔

(۳) اس مثلث کا مرکز عمودی جو مکانی کے تین ماسوں

سے بنے مرتب پر ہوتا ہے۔

نرخ کرو کہ مثلث کے اضلاع کی مساواتیں

$$ما = م + لا + \frac{1}{م} ، ما = م + لا + \frac{1}{م} ، ما = م + لا + \frac{1}{م}$$

میں دوسرے اور تیسرے اضلاع کا نقطہ تقاطع

$$\left(\frac{1}{م} + \frac{1}{م} ، \frac{1}{م} \right)$$

ہے۔ اس خط کی مساوات جو اس نقطہ میں سے گزرتا ہے اور پہلے ضلع پر عمود ہے

$$ما - \frac{1}{م} - \frac{1}{م} = \frac{1}{م} - (لا - \frac{1}{م})$$

ہے۔ اب یہ خط مرتب لا = کو اس نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کا منہیں

$$\left(\frac{1}{م} + \frac{1}{م} + \frac{1}{م} + \frac{1}{م} \right)$$

ہے۔ اس نتیجہ کے تشاکل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دوسرے عمود بھی مرتب کو
اسی نقطہ پر قطع کرتے ہیں جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

(۴) دو عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنا جو ایک

دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

وہ خط جس کی مساوات

$$ما = م - لا - ۲م - ۳م \dots (۱)$$

ہے مکانی م^۱۔ م^۲ لا = کا ایک عماد ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔
 اگر نقطہ (لا، م) کو معلومہ فرض کیا جائے تو مساوات (۱) سے اُن
 عمادوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو اس نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔
 اگر (۱) کی اصلیں م^۱، م^۲، م^۳ ہوں تو

$$(۲) \dots \dots \dots \frac{۱}{۱} = ۲, ۲, ۲$$

لیکن اگر عمادوں میں سے دو (فرض کرو وہ جو م^۱، م^۲ سے حاصل ہوتے ہیں) علی القواطم ہوں تو

$$۱, ۲, ۲ = ۱ \text{ اور اس لیے } (۲) \text{ سے } م = \frac{۱}{۱}$$

لیکن م^۳ (۱) کی ایک اصل ہے

$$\frac{۲}{۱} - ۲ - \frac{۱}{۱} = ۱$$

اس طرح م^۱ = ۱ (لا - ۱) مطلوبہ طریق کی مساوات ہے۔

۱۰۶۔ ”عماد نقطے“۔ مکانی م^۱۔ م^۲ لا = کے کسی نقطہ

(لا، م) پر کے عماد کی مساوات

$$۱, ۲ (م - م) + م (لا - لا) = ۰ \dots \dots (۱)$$

ہے۔ اگر خط (۱) نقطہ (م، ک) میں سے گزرے تو

$$۱, ۲ (ک - م) + م (لا - لا) = ۰ \dots \dots (۲)$$

مساوات (۲) سے اُن نقطوں کے معین حاصل ہوتے ہیں جن پر کے
 عماد مخصوص نقطہ (م، ک) میں سے گزرتے ہیں۔ یہ مساوات
 ایک کعبی مساوات ہے اور اس لیے کسی نقطہ میں سے مکانی کے تین
 عماد (جن میں سے کم از کم ایک حقیقی ہونا چاہیے) کھینچے جاسکتے ہیں۔
 چونکہ مساوات (۲) میں م کی کوئی رقم شامل نہیں ہے اس لیے

اگر اس کی اصلیں 'ما'، 'ما'، 'ما' ہوں تو

اب ہم جانتے ہیں کہ مکانی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے لیے ان میں سے کسی وتر کے سروں پر کے دو معینوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ [دفعہ ۱۰۲]۔ اس لیے ان نقطوں پر کے عماد ایک ثابت نقطہ کے عماد پر ملتے ہیں جس کے معین کو عمادوں کے معینوں کے مجموعہ میں جمع کرنے پر صفر حاصل ہوتا ہے۔

پس ان عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق جو ایک مکانی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے سروں پر گھنچے گئے ہوں ایک خط مستقیم ہے جو منحنی کا ایک عماد ہے۔

اگر 'ق'، 'ق'، 'ق' پر کے عماد (ہ، ک) پر ہیں تو 'ق'، 'ق' کے معین مساوات

$$۱۴ + ۱۴ = ۱۲ - ۱۲ - ۸ - ۸ = ۰ \dots (۴)$$

کی اصلیں ہیں

اب فرض کرو کہ دائرہ 'ق'، 'ق'، 'ق'

$$۱۴ + ۱۴ = ۱۲ - ۱۲ - ۸ - ۸ = ۰$$

ہے۔ ۱۶ سے ضرب دو اور ۴ لاکر بجائے 'ما' رکھو تو دائرہ اور مکانی کے نقاط تقاطع کے معین مساوات

$$۱۶ + ۱۶ = ۸ + ۸ = ۳۲ - ۳۲ - ۱۶ - ۱۶ = ۰ \dots (۵)$$

کی اصلیں ہیں۔

پس 'ما' + 'ما' + 'ما' + 'ما' = ۰۔ لیکن (۴) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$۱۴ + ۱۴ = ۱۲ - ۱۲ - ۸ - ۸ = ۰$$

نقطوں 'ق'، 'ق'، 'ق' کے لیے 'ما' + 'ما' + 'ما' + 'ما' = ۰ اور اس لیے دائرہ 'ق'، 'ق'، 'ق' کی تمام

قیمتوں کے لیے مکانی کے اس میں سے گذرتا ہے۔
(۱۲۸) پس ج = ۰ اور پھر (۴) سے 'ف' 'ق' 'س' کے معین مساوات
۱۸ + ۱۸ (گ + ۱۲) + ۳۲ + ۱۸ = ۰ (۶)
کی اصلیں ہیں۔

(۴) اور (۶) کا مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ
۱۸ = ۰ (گ + ۱۲) اور ۳۲ = ۰ - گ
اس طرح وہ دائرہ جو ان تین نقطوں میں سے گذرتا ہے جن پر کے
عماد نقطہ (۳۲، گ) میں سے گذرتے ہیں
۱۸ + ۱۸ - (گ + ۱۲) - لا - ۱۸ = ۰

ہے۔
۱۰ مکانی ۱۸ - ۱۸ = لا = ۰ پر کے کسی نقطہ کے دونوں محدودوں کو ایک
متغیر کی رقوم میں بیان کرنا اکثر مفید ہوتا ہے۔
سادہ ترین طریقہ لا کو ماکہ رقوم میں بیان کرنے کا ہے۔

نقطہ (۱۸، ۱۸) صریحاً ۱۸ - ۱۸ = لا = ۰ پر ہے اور اگر اس کو
نقطہ ۱۸ کہا جائے تو ہم نے حسب ذیل مساواتیں علی الترتیب (۱) و تر
۱۸، ۱۸ کے لیے (۲) ۱۸ پر کے ۱۸ کے لیے اور (۳) ۱۸ اور ۱۸ پر کے
۱۸ کے نقطہ تقاطع سے لیے معلوم کی ہیں:

$$(۱) ۱۸ (۱۸ + ۱۸) - ۱۸ - لا = ۱۸، ۱۸ = ۰$$

$$(۲) ۱۸ - ۱۸ - لا = ۱۸، ۱۸ = ۰$$

$$(۳) ۱۸ - لا = ۱۸، ۱۸ اور ۱۸ = ۱۸ + ۱۸$$

دوسرا طریقہ جو اکثر استعمال کیا جاتا ہے لا = ۱۸ اور ۱۸ = ۱۸
رکھنے کا ہے۔

نقطہ (۱۸، ۱۸) صریحاً ۱۸ - ۱۸ = لا = ۰ پر ہے اور اگر اس کو
نقطہ ۱۸ کہا جائے تو ہم و تر ۱۸، ۱۸ وغیرہ کی مساواتیں دفعہ ۹۵ وغیرہ کے

طریقہ پر معلوم کر سکتے ہیں (یا اوپر کی مساواتوں میں m کی بجائے r وضع کر کے)۔ چنانچہ یہ مساواتیں

$$(1) \quad m^2 (x^2 + y^2) - r^2 - 2r(x^2 + y^2) = 0$$

$$(2) \quad m^2 x^2 - r^2 - 2r(x^2 + y^2) = 0$$

$$(3) \quad r^2 = 2r(x^2 + y^2) \text{ اور } m^2 = (x^2 + y^2)$$

ہیں۔

مثال ۱۔ اگر ایک دائرہ کا قطر ایک مکانی کا ایسا وتر ہو جس کے سروں کے معینوں کا فرق وتر خاص کے طول کا دگنا ہے تو ثابت کرو کہ دائرہ مکانی کو مس کرے گا۔

فرض کرو کہ وتر کے سرے m ، m ہیں تو $m^2 = 8r$ ۔

دائرہ کی مساوات [دفعہ ۶۶ مثال ۲]

$$0 = (m^2 - r^2) + (r^2 - r^2) + (r^2 - r^2)$$

ہے۔ یہ دائرہ مکانی کو ان نقطوں پر قطع کرتا ہے جن کے معین

$$16r^2 = (m^2 - r^2) + (r^2 - r^2) + (r^2 - r^2) = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح دوسرے دو نقاط تقاطع کے معین مساوات

$$16r^2 = (m^2 + r^2) + (m^2 + r^2) + (m^2 + r^2) = 0$$

$$0 = m^2 + m^2 + (m^2 + r^2) + m^2 + 16r^2 = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس آخری مساوات کی اصلیں مساوی ہو چکی اگر

$$(m^2 + r^2) = m^2 + m^2 + 16r^2$$

$$(m^2 - r^2) = (m^2 + r^2)$$

یعنی اگر

مثال ۲۔ مکانیوں $m^2 = 4r^2$ اور $m^2 = 8r^2$ میں سے

کسی ایک میں مثلثوں کی لاتعداد ہی تعداد گنی جاسکتی ہے جن کے ضلع دوسرے مکانی کو مس کریں۔

فرض کرو کہ ما۔ م۔ و لا۔ ہر کوئی تین نقطے ما، ما، ما میں ایسے کہ خطوط ما، ما اور ما، ما میں سے ہر ایک مکانی لا۔ م۔ ب۔ ما۔ کو مس کر سکے۔ تب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ خط ما، ما میں بھی اس مکانی کو مس کرتا ہے۔
ما، ما کو ملانے والا خط

$$ما (ما + ما) - ما و لا - ما ما =$$

ہے۔ یہ خط دوسرے مکانی کو مس کرتا ہے اور اس لیے مساوات

$$(ما + ما) لا - ۱۶ و ب لا - م ب ما ما =$$

کی اصلیں مساوی ہیں اور اس لیے

$$ما ما (ما + ما) + ۱۶ و ب = \dots (۱)$$

$$ما ما (ما + ما) + ۱۶ و ب = \dots (۲)$$

تفریق کرنے اور ما (ما - ما) سے تقسیم کرنے پر جہاں ما (ما - ما) صفر نہیں ہے حاصل ہوتا ہے

$$ما + ما + ما = \dots (۳)$$

ما کو (۱) اور (۳) سے ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$ما ما (ما + ما) + ۱۶ و ب =$$

جس سے ثابت ہے کہ ما، ما کو ملانے والا خط بھی لا۔ م۔ ب۔ ما کو مس کرتا ہے۔
مثال ۳۔ مکانی ما۔ م۔ و لا۔ میں کھینچے ہوئے مساوی الاضلاع

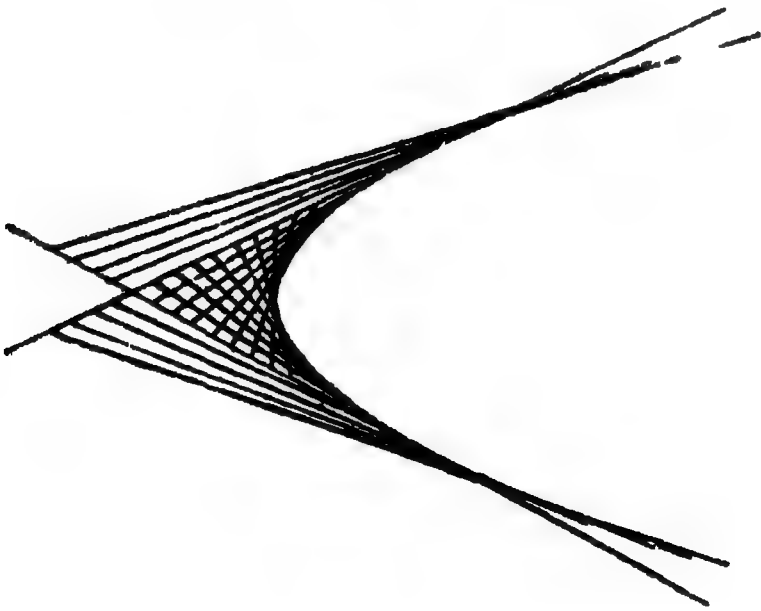
مثلثوں کے مرکوزوں کا طریق مکانی ما۔ م۔ و لا۔ ۲۱ و لا۔ م۔ ب۔ ہے۔

مساوی الاضلاع مثلث میں مرکز ہندسی مرکز عمودی پر منطبق ہوتا ہے۔
اب اس مثلث کا مرکز ہندسی جس کے راس نقطے ع، ع، ع ہیں

کر سکتا ہے۔ اس منحنی کو متحرک نقطہ کا طریق کہتے ہیں۔
 اسی طرح اگر ایک خط مستقیم کی مساوات کے دو مستقلوں میں کوئی
 نقطہ ہو تو خط ہر طرح حرکت کرنے میں آزاد نہیں ہوگا لیکن وہ ایسے لاتعداد
 محل اختیار کر سکتا ہے جو سب کے سب ایک خاص منحنی کے مماس ہوں گے۔
 اس منحنی کو متحرک خط کا لٹاف کہتے ہیں۔

مثلاً اگر مساوات $l + m + n = 1$ کے مستقلوں l اور m میں
 $n = 1 - l - m$ ہو تو خط مستقیم $l + m + n = 1$ اس طرح حرکت
 کرے گا کہ نقطہ $(0, 0)$ سے اس کا عمودی فاصلہ ہمیشہ 1 کے مساوی ہوگا
 اور اس لیے یہ خط اپنے تمام ممکن محلوں میں دائرہ $l^2 + m^2 = 1$ کو مس کرنا
 چاہیے۔

حسب ذیل شکل میں ایک خط مستقیم کے مختلف محل دکھائے گئے
 ہیں جو محوروں پر ایسے مقطوعے قطع کرتا ہے جن کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔



اب اگر t اور t' کسی منحنی کے دو متصل مماس ہوں

اور اگر ماس ت ق بدرجہ ت ف کی طرف حرکت کر کے با تا آخر
ت ف پر منطبق ہو جائے تو ماسوں کا نقطہ تقاطع نقطہ ف کے
قریب اور قریب تر حرکت کرے گا اور بالآخر اس پر اگر منطبق ہو جائیگا۔
اس طرح دو منطبق ماسوں کا نقطہ تقاطع اس منحنی پر ہوتا ہے جس کو سب
ماس مس کرتے ہیں۔ نیز وہ دو ماس جو کسی نقطہ سے ایک منحنی کے کچھ
مابین منطبق ہوں گے اگر نقطہ منحنی پر ہو۔



اب خطوط مستقیم کے اس نظام پر خور کرو جو مساوات

$$\frac{لا}{ل} + \frac{ما}{ل} = ۱ \text{ یا } ۲ = (لا - ل) + (ل - لا) = ۰ \quad (۱)$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ل مستقل ہے۔

چونکہ (۱) دو درجی مساوات ہے اس لیے اس کی دو قیمتیں لا اور ما
اسی معلومہ قیمتوں کے جواب میں حاصل ہوں گی۔ اس طرح کسی دے ہو
نقطہ میں سے نظام کے دو خطوط مستقیم کھینچے جاسکتے ہیں۔ جب یہ دو خطوط
طبق ہوتے ہیں تو نقطہ (لا، ما) کو اس منحنی پر ہونا چاہیے جس کو تمام
خط مس کرتے ہیں۔

پس اس منحنی کی مساوات جس کو نظام کے تمام خطوط مس کرتے
ہیں شرط لکھ لینے سے حاصل ہوگی کہ دو درجی (۱) کی دو اصلیں مساوی
ب (۱) کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر

$$۲ ل - لا = (لا - ل) \quad (۲)$$

جو [صفحہ ۱۰۴] ایک مکانی کی مساوات ہے۔
یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے کہ مکانی (۲) محوروں کو نقطوں
(ل،) اور (ل،) پر مس کرتا ہے۔
اس طرح وہ تمام خطوط جو صفحہ (۱۸۶) کی شکل میں کھینچے گئے ہیں ایک
مکانی کو مس کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ خط مستقیم $ما = م + لا + \frac{۱}{م}$ کا لاف معلوم کرو۔
مساوات کو لکھا جاسکتا ہے

(۱۳۳)

$م + لا = م + ما + \frac{۱}{م} = \dots \dots \dots (۱)$
چونکہ (۱) دو درجی مساوات ہے اس لیے لا اور ما کی کسی معلومہ قیمتوں کے
جواب میں م کی دو قیمتیں ہیں۔ پس نظام کے دو خطوط کسی نقطہ (لا، ما) میں سے
گذرتے ہیں۔ جب م کی دو قیمتیں مساوی ہوتی ہیں تو خطوط منطبق ہوتے ہیں اور
(لا، ما) مطلوبہ لاف پر ہوتا ہے۔
اب وہ شرط کہ (لا، ما) کی دو اصلیں مساوی ہوں یہ ہے کہ
 $ما - لا = ۲$

اور یہ مطلوبہ لاف ہے۔

مثال ۲۔ خط $لا = لا + جم + ب + ما + ج = ۰$ کا لاف معلوم کرو۔
اس مساوات کو لکھا جاسکتا ہے

$$لا (جم - ج) + (ج - لا) + ۲ + ب + ما + ج = ۰$$

$$لا + ج + ۲ + ب + ما + ج = ۰$$

یا

$$جہاں ت = مس - \frac{۱}{م}$$

اس طرح نظام کے دو خطوط کسی نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں۔ یہ
خطوط منطبق ہوں گے اگر

$$(لا + ج) (ج - لا) - ب + ما = ۰$$

اس لیے نغاف ہے $\text{لا} + \text{با} = \text{جا}$
 مثال (۳)۔ $\text{خط ل} + \text{م} + \text{ا} = \text{کالغاف شرط ل} + \text{ب} + \text{م} = \text{ج}$ ۔
 کے ساتھ معلوم کرو۔

$\text{ل} + \text{ا} + \text{م} + \text{ا} = \text{ا}$ اور $\text{ل} + \text{ب} + \text{م} = \text{ج}$ ۔ سے
 $\text{ل} + \text{ب} + \text{م} = \text{ج}$ (ل + لا + م + ا) =

ل کی دو قیمتوں سے نظام کے ان دو خطوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو کسی
 نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔

یہ دو خطوط منطبق ہوں گے اگر ل کا مندرجہ صدرہ دو درجہ دو مساوی اصلیں
 رکھے جس کے لیے یہ شرط ہے کہ

$$(ا + ج لا) (ب + ج ما) = ج لا ما$$

اس لیے مطلوبہ طریق $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} + \frac{ا}{ج} = ۰$ ہے۔

مثال (۴)۔ مکانی ما۔ م و لا = ۰ پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن لی
 ہے مکانی کا ماس (اے اور تسکیل ل ن م کی پیمائش کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ
 ل کا لغاف ما + لا = ۰ ہے۔

مثال (۵)۔ ثابت کرو کہ اگر ان مقطوعوں کا مجموعہ جو ایک متحرک خط
 محوروں پر قطع کرتا ہے مستقل رہے تو خط ایک مکانی کو لف کرے گا۔

مثال (۶)۔ ایک خط مستقیم کا لغاف معلوم کرو جو محوروں کو علی الترتیب
 ف، ق پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ مثلثا و ف ق کا رقبہ مستقل رہتا ہے۔
 مثال ۷۔ ایک مکانی کے ایسے وتر کا لغاف جس کے بیروں پر کے
 مینوں کا فرق مستقل رہے مساوی مکانی ہوتا ہے۔

مثال ۸۔ ایک مکانی کے وتر ن ق، ن م معلوم خطوط مستقیم کے

متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ ق س مساوی مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۹۔ ایک کثیر الاضلاع کو ایک مکانی میں بنایا گیا ہے اور اس کثیر الاضلاع کے تمام اضلاع $إلا$ ایک کے معلومہ خطوط مستقیم کے متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر اضلاع کی تعداد جفت ہے تو باقی ضلع بھی ایک ثابت خط مستقیم کے متوازی ہو گا لیکن اگر اضلاع کی تعداد طاق ہے تو باقی ضلع ایک مکانی کو لف کرے گا۔

مثال ۱۰۔ اگر دو ثابت نقطوں سے ایک متحرک خط پر عمود کھینچے جائیں اور ان عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط ایک مکانی کو لف کرے گا۔

مثال ۱۱۔ مکانی ۲۔ ۱۴ = لا۔ کے کسی نقطہ ن پر کا عمود محور کو لگ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو گ میں سے گذرتا ہے اور ن پر کے ماس کے متوازی ہے ہم ماسکی مکانی ۱۴ + ۱۴ (لا - ۱۲) = کو لف کرتا ہے۔

مثال ۱۲۔ ثابت کرو کہ ایک خط ف ق کا لفاف جو ایک مکانی کے کسی نقطہ ف میں سے اس طرح کھینچا گیا ہو کہ ف میں سے گذرنے والا قطر ف ق اور ف پر کے ماس کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے دو ملر مکانی مثال ۱۳۔ ایک دائرہ کے ایک وتر کا نقطہ وسطی ایک ثابت خط مستقیم پر ہے۔ ثابت کرو کہ یہ وتر ایک مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۱۴۔ ایک مکانی کا ایک متغیر ماس ایک ثابت ماس کو نقطہ ن پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو ن میں سے گذرتا ہے اور متغیر ماس پر عمود ہے ایک مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۱۵۔ ایک دے ہوئے خط پر کے کسی نقطہ ن میں سے خط ن ق اس طرح کھینچا گیا ہے کہ وہ ایک دے ہوئے مکانی کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق کا لفاف ایک دوسرا مکانی ہے۔

مثال ۱۶۔ ایک دے ہوئے خط پر کے کسی نقطہ ن میں سے خط ن ق اس طرح کھینچا گیا ہے کہ وہ ایک دے ہوئے مکانی کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی پر

عمود ہے۔ ثابت کرو کہ ق کا لٹاف ایک دوسرا مکانی ہے۔

مثال ۱۷۔ ایک خط کا لٹاف معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر دو نقطوں (۰، ۱) (۰، ۱) سے اس خط پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے مجموعہ ۲ ج کے مساوی ہوتا ہے۔

جواب: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

مثال ۱۸۔ ثابت کرو کہ وہ خط مستقیم جو دو دئے ہوئے دائروں کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ دائروں کے وتر مساوی ہیں ایک مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۱۹۔ و ۱، و ۲ دو ثابت خط ہیں اور ۱ ایک ثابت نقطہ ہے۔ کوئی دائرہ جو و اور ۱ میں سے گزرتا ہے و ۲ کو ملے ترتیب (۱۳۵)

ف، ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف، ق ایک ثابت مکانی کا مقام ہے۔

مثال ۲۰۔ ایک خط جو نقطہ ن میں سے گزرتا ہے اور (مکانی م) کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی پر عمود ہے ثابت نقطہ (م) میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا قطبی مکانی

(لا - ۱۲ + ۱۳) = م = ۱۳

کو لف کرتا ہے۔

مثال ۲۱۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کا قطبی جبکہ دائرہ دو دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے دو مکافوں میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتا ہے۔

مثال ۲۲۔ ایک خط مستقیم دو دئے ہوئے خطوط و ۱، و ۲ کو نقطوں ف، ق پر قطع کرتا ہے اور ف، ق کا نقطہ وسطی ایک دئے ہوئے خط پر ہے۔ ثابت کرو کہ ف، ق ایک مکانی کو لف کرتا ہے۔

مثال ۲۳۔ ف، ق اور ف، س مکانی م - ۱۳ = لا۔ کے وتر ہیں جو م = کو ملے ترتیب نقطوں (۰، ۱) (۰، ۱) پر قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ ق، س مکانی (۱۳ + ۱۴) = م = ۱۴ ج، ج لا کو لف کرتا ہے

مثال ۲۴۔ $ما = لا$ کا ایک وتر متوازی ماسکی وتر کے طول کا ک گنا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر مکانی $ما = لا$ (لا + لا) کو مس کرتا ہے جہاں $ا = ا$ (۱-ک)۔

مثال ۲۵۔ مکانی $ما = لا$ کے نقطوں 'ف' 'ق' 'س' پر کے عماد خط $ما = ک$ پر کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث 'ف' 'ق' 'س' کے اضلاع مکانی $لا = ک$ $ما = ک$ کو مس کرتے ہیں۔

پانچویں باب مثالیں

۱۔ ایک مکانی کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی پر نقطہ سے عمود کھینچا گیا ہے جو قطبی سے نقطہ ص پر ملتا ہے اور محور کو گ پر قطع کرتا ہے۔ قطبی محور کو ت پر قطع کرتا ہے اور و میں سے گزرنے والا معین منحنی کون ت پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقاط 'ف' 'مر' 'گ' 'ن' سب کے سب ایک دائرہ پر ہیں جس کا مرکز س ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ دو مکانی $ما = لا$ $لا = ب$ کا ایک دوسرے کو زاویہ

$$\text{مس} \frac{ا \frac{1}{2} ب \frac{1}{2}}{(ا \frac{1}{2} + ب \frac{1}{2})}$$

پر قطع کریں گے۔

۳۔ اگر ایک مکانی کا ایک ماسکی وتر ن س ق ہو اور ن ا مرتب سے ص پر ملے تو ثابت کرو کہ ص ق مکانی کے محور کے متوازی ہو گا۔

۴۔ ثابت کرو کہ اگر مکانی پر کے دو نقطوں کے معین ایک مستقل نسبت میں ہوں تو ان نقطوں پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک

مکانی ہے۔

۵۔ نقطہ ن سے مکانی ما۔ ۴ لا۔ کے دو ماس کھینچے گئے ہیں اور یہ ماس محور لا کے ساتھ زاوئے طہ، طہ بنائے ہیں۔ ن کا طریق معلوم کرو (۱) جبکہ مس طہ + مس طہ مستقل ہو اور (۲) جبکہ مس طہ + مس طہ مستقل ہو۔

۶۔ ایک مکانی کے ان دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو جو ایک دوسرے کے ساتھ ۵ کا زاویہ بناتے ہیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مکانی کے دو ماس کسی ثابت ماس پر ایک مستقل طول قطع کریں تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دوسرا مساوی مکانی ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ ایک مکانی کے دو ماس جو علی الترتیب محور اور مرتب کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں لیکن علی القوام نہیں ہیں دترناہج تقاطع ہوتے ہیں۔

۹۔ ایک مکانی کے وتر خاص پر کے کسی نقطہ سے اس کے سروں کے ماسوں پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو ان عمودوں کے پائین کو ملاتا ہے مکانی کو مس کرتا ہے۔

۱۰۔ اگر خط لا + لا + لا۔ پر کے ایک نقطہ سے مکانی ما۔ ۴ لا۔ پر ماس کھینچے جائیں تو ان کے وتر ماس کے محاذی را اس پر ایک قائمہ زاویہ بنے گا۔

۱۱۔ ایک مکانی کے لحاظ سے ت کے قطبی پر ت سے عمود مت ل کھینچا گیا ہے جو محور سے ص پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ت ل ت مستقل ہو تو ت کا طریق ایک مکانی ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ اگر ت ل : ت مستقل ہو تو ت کا طریق ایک مکانی ہوگا۔

۱۲۔ دو مساوی مکافیوں کے محور متوازی ہیں اور ان کے راں پر کا ماس مشترک ہے۔ خطوط مستقیم کسی ایک محور کے متوازی

کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ منحنیوں کے درمیان ان خطوط کے جو حصے منقطع ہوتے ہیں ان کے نقاط وسطی کا طریق ایک مساوی مکانی ہے۔

۱۳۔ دو مکانی ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اور ان کے محور متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ان مکانیوں کے دو نقطوں پر کے تماس ان کے مشترک تماس پر متقاطع ہوں تو ان کے نقاط تماس کو ملانے والا خط محور کے متوازی ہوگا۔

۱۴۔ دو مکانیوں کا محور وہی ہے۔ ایک مکانی کے نقطوں سے دوسرے مکانی کے تماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے مکانی کے وتر تماس کے وسطی نقطے ایک ثابت مکانی پر واقع ہوتے ہیں۔

(۱۳۷)

۱۵۔ ایک مکانی کا ایک وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر کے نقطہ وسطی کا طریق ایک مکانی ہے۔

۱۶۔ ایک وتر ن کا نقطہ وسطی ایک ثابت خط مستقیم پر ہے جو ایک مکانی کے محور پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ وتر کے قطب کا طریق دوسرا مکانی ہے۔

۱۷۔ اگر ایک مکانی کے جس کا اس Δ ہے دو تماس Δ ف اور Δ ق ہوں اور اگر خطوط Δ ف، Δ ت، Δ ق (ممدودہ بہ ضرورت) مرتب کو علی الترتیب Δ ف، Δ ت، اور Δ ق پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ Δ ف، Δ ت، Δ ق۔

۱۸۔ اگر کسی نقطہ Δ میں سے ایک مکانی کا قطر کسی وتر سے Δ ق پر ملے اور اس وتر کے سروں پر کے تماس قطر سے Δ ق، Δ ق پر ملیں تو ثابت کرو کہ Δ ف، Δ ق، Δ ق۔

۱۹۔ ایک مثلث کا اس ثابت ہے، قاعدہ کا طول مستقل ہے اور قاعدہ ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث کے مائل دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ دائرہ

$$\Delta^2 + \Delta^2 + \Delta^2 = \Delta^2$$

کے لحاظ سے دائرہ

$$لا + ا - ۲ - لا - ۳ = ۰$$

پر کے کسی نقطہ کا قلبی مکانی

$$ا + ۲ - لا = ۰$$

کو مس کرے گا۔

۲۱ - ن میں ن ایک مکانی کا ایک ماسکی وتر ہے، ن

کا نقطہ وسطی ط ہے اور ط و، ن پر عمود ہے، ر محور کو و پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ م ن اور م ن کے درمیان م و اور ط و صابی اور ہندسی اوسط ہیں۔

۲۲ - ایک مکانی کے تین ماسکی وتر ف، ق، س ق،

م م میں رہیں، ق م اس قطر سے جو ف میں سے گزرتا ہے (پر ملتا ہے) م ف اس قطر سے جو ق میں سے گزرتا ہے ب پر ملتا ہے، اور ف ق اس قطر سے جو ر میں سے گزرتا ہے ج پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ تین نقطے ا، ب، ج ایک خط مستقیم پر ہیں جو م میں سے گزرتا ہے۔

۲۳ - ایک مکانی کے متوازی وتروں کے نظام میں سے ایک (۱۳۸)

وتر ن ہے اور ن کا پر و ایک ایسا نقطہ ہے کہ مستطیل ن و

و ن مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ و کا طریق ایک مکانی ہے۔

۲۴ - ایک مکانی کے نقطہ و میں سے گزرنے والے قطر پر دو نقطے

ن، ن لے گئے ہیں ایسے کہ و ن و ن مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ

اگر نقاط ن، ن سے مکانی کے ماس کینچے جائیں تو ماسوں کے چار نقاط

تقاطع دو ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہوں گے جو و کے ماس کے متوازی

اور اس سے مساوی فاصلہ پر واقع ہوں گے۔

۲۵ - اگر ایک ذوار بعت الاضلاع ایک مکانی کے گرد کھینچا جائے

تو اس کے وتروں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا خط مکانی کے محور

کے متوازی ہوگا۔

۲۶۔ اگر ایک مکانی کے ایک ماسکی وتر پر کسی نقطہ سے دو ماس
کھینچ جائیں تو یہ ماس ان ماسوں کے ساتھ مساوی میلان رکھیں گے جو ماسکی
وتر کے سروں پر کھینچے گئے ہوں۔

۲۷۔ اگر ایک مکانی کے دو ماس ایک ثابت خط مستقیم کے ساتھ
مساوی زاوے بنائیں تو ثابت کرو کہ وتر ماس ایک ثابت نقطہ میں سے گذرنا
چاہئے۔

۲۸۔ دو مکانی ایک مشترک ماس رکھتے ہیں اور ان کے محور مختل
سمتوں میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ان میں سے ایک مکانی کے وتر دوسرے کو
مس کرتے ہوئے کھینچے جائیں تو ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریقی ایک
دوسرا مکانی ہوگا۔

۲۹۔ ایک مکانی کے ایسے وتر کے نقطہ وسطی کا طریقی معلوم کرو جسکے
محاذی راس پر قائمہ زاویہ بنے۔

۳۰۔ مکانی ۱، ۲، ۳ کے عماد وتروں کے وسطی نقطوں کا طریقی

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3}{12} = 12 - 12 = 0$$

۳۱۔ ایک مکانی کا ایک وتر ف ق ہے جو ف پر عماد ہے،
اق کو راس ۱ سے کھینچا گیا ہے اور ف میں سے ایک خط، اق کے
متوازی کھینچا گیا ہے جو محور سے کا پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ۱ سرا، ف کے
ماسکی فاصلہ کا وگنا ہے۔

۳۲۔ ایک مکانی کے متوازی وتر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان
وتروں کے سروں پر کھینچے ہوئے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریقی ایک خط مستقیم
ہے، نیز عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریقی بھی ایک خط مستقیم ہے اور وتروں کی
مختلف سمتوں کے لیے ان دو خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریقی ایک مکانی ہے۔

۳۳۔ اگر ایک مکانی کے دو نقطوں پر کے عماد متوازی ہوں
تو ان نقطوں کو ملانے والا خط محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے گا۔

۳۴۔ اگر ایک مکانی کے دو نقطوں پر کے عماد محور کے ساتھ زاویہ ۹۰ درجہ پر مائل ہوں اور بس ط س ف = ۲ تو ثابت کرو کہ وہ مکانی پر قطع ہوں گے۔

۳۵۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق جس سے دو ایسے عماد کھینچے جاسکیں کہ محور کے ساتھ ان کے زاویے متساوی ہوں ایک مکانی ہوگا۔

۳۶۔ ایک نقطہ ن سے مکانی کے عماد کھینچے گئے ہیں اور ان میں سے دو عماد ایک دے ہوئے خط کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک مکانی ہے۔

۳۷۔ ایک مکانی کے نقطہ ن پر کا عماد محور سے گ پر ملتا ہے ن گ کو ۵ تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ گ ۵ = ۱ ن گ۔ ثابت کرو کہ نقطہ ھ میں سے گزرنے والے مکانی کے دوسرے دو عماد ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

۳۸۔ ایک مکانی کے تین نقطوں ف، ق، س پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ س ن + س ق + س ر + س ا = ۱

۳۹۔ جہاں س ماسک ہے اور اس پر کے ماس پر و سے عمود و م ہے

۴۰۔ ایک مکانی کے کوئی تین خاص متقل رقبہ کا ایک مثلث بنائیں گے اگر محور کے ساتھ ان میلانوں کے ماس کسی دے ہوئے سلسلہ موسیقیہ میں ہوں۔

۴۱۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو ایک مکانی کے تین عمادوں سے بنتا ہے

$$\frac{1}{4} (م - ا) (م - ر) (م - ہ) (م - ۱) (م - ۲ + م - ۳)$$

۴۲۔ اگر ایک مکانی کا ایک ماس دو دے ہوئے متوازی خطوط مستقیم کو ف، ق پر قطع کرے تو ف، ق سے منحنی کے دوسرے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع

کبا طریق ایک مکانی ہوگا۔

۴۲۔ اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث ایک مکانی کے گرد کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مثلث کے کسی راس سے ماسکے تک کھینچے جائیں متقابل کے ضلع کے نقطہ تماس میں سے گزریں گے۔

۴۳۔ $MA = a$ اور $(LA + ج)$ پر کے کسی نقطہ سے $MA = a$ اور LA کے تماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط تماس پر اس مکانی کے عماد ایک ثابت خط مستقیم پر مشتمل ہوتے ہیں۔

۴۴۔ مکانی $MA = a$ اور $LA = 0$ کے ثابت نقطہ (LA, MA) میں سے وتر کھینچے گئے ہیں جو علی التوالم ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے دوسرے سروں کو ملانے والا خط ثابت نقطہ (LA, MA) میں سے گزرتا ہے۔ (۱۲۰)

۴۵۔ اگر ایک ثابت نقطہ میں سے ایک مکانی کا کوئی وتر کھینچا جائے اور وتر کے سروں پر عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق دوسرا مکانی ہے۔

۴۶۔ اگر ایک نقطہ سے مکانی $MA = a$ اور LA کے تین عماد محدود ایسے نقطوں پر قطع کریں جن کے فاصلے راس سے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ نقطہ منحنی $MA = a$ اور $(LA - ۱۲)$ پر واقع ہے۔

۴۷۔ $MA = a$ اور $LA = 0$ کے عماد و تروں کے قلیوں کا طریق $(LA + ۱۲)$ ہے۔

۴۸۔ ایک مکانی کے کسی دو ماسکی و تروں کو قطر مان کر دو دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا مشترک وتر مکانی کے راس میں سے گزرتا ہے۔

۴۹۔ ایک دیے ہوئے مکانی کے دو تماس محور کے ساتھ ایسے زاویے بناتے ہیں کہ ان کے نصفوں کے تماسوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ہم ماسکی مکانی ہے۔

۵۰۔ اگر وہ دائرہ جو ایک مکانی کے وتر FF پر اس کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو مکانی کو مکر نقطوں MA میں سے قطع کرے تو ثابت کرو کہ FF

۵۷۔ ت سے ایک مکانی کے ماس ت ف اور ت ق ہیں اور کسی دوسرے ماس پرف ت ق سے عمود طول میں علی الترتیب ع، ع، ع ہیں۔ ثابت کرو کہ ع، ع، ع = ع، ع۔

۵۸۔ و سے ایک مکانی کے ماس و ا اور و ب ہیں اور متناظر عماد ا ف ب ف ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف ایک ثابت خط پر واقع ہو جو محور پر عمود ہے تو و ایک مکانی کو مرسم کرے گا۔ و کا طریق معلوم کرو اگر ف ایک ثابت قطر پر واقع ہو۔

۵۹۔ مکانی م^۲۔ ۱۲ لا = کے نقطہ ف پر کا عماد ف گ ہے جہاں گ محور پر ہے۔ گ ف کو باہر وار نقطہ ق تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ف ق = گ ف۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک مکانی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ف اور ق جن مکانیوں پر واقع ہیں ان کے نقطوں ف اور ق پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق

$$م^۲ (۱۲ + لا) = ۱۲ + لا = ۱۲$$

۶۰۔ مکانی م^۲۔ ۱۲ لا = کا ایک وتر ثابت نقطہ (ع، ب) میں سے گذرتا ہے اور اس کے ہر سرے میں سے ایک خط مستقیم دوسرے سرے پر کے ماس کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان دو خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق مکانی

$$م^۲ - ۶ = م = ۱۲ (لا - ۳ع)$$

۶۱۔ اگر م^۲۔ ۱۲ لا = کے نقطوں ف ق، ق، ق، ق کے عماد نقطہ (ع، ب) پر ملیں تو مثلث ف ق ق کا مرکز عمودی (ع، ب) ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ ف ق کا مرکز ہندی $\left\{ \frac{۲}{۳} (لا - ۱۲) : ۰ \right\}$ ہے۔

۶۲۔ کسی نقطہ (ع، ب) سے مکانی م^۲۔ ۱۲ لا = کے تین عماد کھینچے

دو اضلاع 'ا'۔ 'ب' (لا + ج) = کو مس کرتے ہیں۔ تیسرے ضلع کا لفظ معلوم کرو۔

۴۰۔ 'ا'۔ 'ب' لا = کے نقطوں 'ق'، 'س' پر کے عماد مکانی سے نقطہ (۱۳۳)

ف پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) مثلث 'ف' 'ق' 'س' کے مرکز عمودی کا طریق مکانی 'ا' = (لا + ج) ہے اور (۲) حلقہ دائرہ کے مرکز کا طریق

مکانی 'ب' = (لا + ج) ہے۔

۴۱۔ اگر 'ا'۔ 'ب' لا = پر کے کسی نقطہ سے مکانی 'ا'۔ 'ب' لا =

کے حاس کھینچے جائیں تو نقاط تماس پر کے عماد منحنی 'ا' (ج۔ 'ب' لا + ج) اور (لا۔ 'ب' لا + ج) پر ملیں گے۔

۴۲۔ مکانی 'ا'۔ 'ب' لا = کا کوئی وتر ثابت نقطہ (نقطہ 'ب')

میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا مرکز ہندسی جو دو عمود اور اس کے

بیروں پر کے حاسوں سے بنتا ہے مکانی 'ب'۔ 'ا'۔ 'ب' لا + ج =

کو مرکز کرتا ہے۔

۴۳۔ مکانی 'ا'۔ 'ب' لا = میں مثلث 'ف' 'ق' 'س' بنایا گیا ہے

اور 'ف' 'ق' 'س' علی الترتیب نقاط (ج۔ 'ب' لا) (ج۔ 'ب' لا) میں سے

گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' 'س' دائرہ لا + ج۔ 'ب' لا = کو مس

کرتا ہے۔

۴۴۔ 'ا'۔ 'ب' لا = کا کوئی حاس خطوط 'ا'۔ 'ب' (لا۔ ج) = اور

'ا'۔ 'ب' (لا۔ ج) کو علی الترتیب 'ف' 'ق' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' سے

مکانی کے دوسرے حاس اس منحنی پر متقاطع ہوتے ہیں جس کی مساوات

$$(ا-م) (م-ج) = (ج-م) (م-ا) \quad (ا-م) (م-ب) = (ب-م) (م-ا)$$

ہے۔

۴۵۔ ثابت کرو کہ 'ا'۔ 'ب' لا = میں ایسے بیسٹار مثلث کھینچے جاسکتے ہیں

جو لا۔ 'ب' لا = کے لحاظ سے خود قطبی ہوں۔ نیز ثابت کرو کہ مثلثوں کے

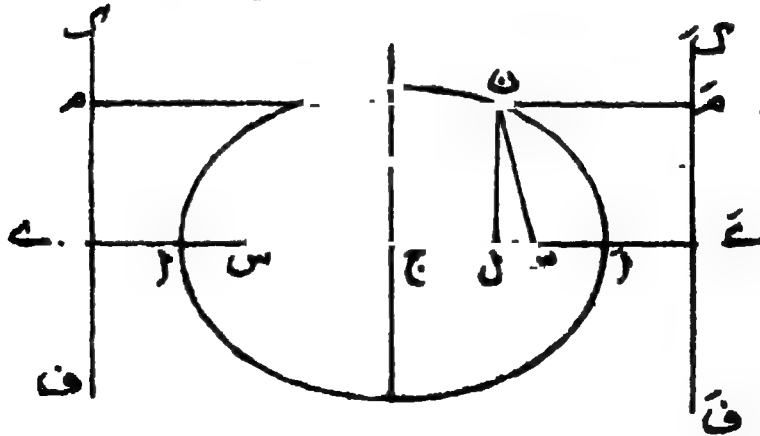
ہندسی مرکزوں کا طریق 'ا'۔ 'ب' لا = ہے۔

بہشتابا قطع ناقص

(۱۳۳)

تعریف۔ قطع ناقص ایک نقطہ کا طریقہ ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خط سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے جو اکائی سے کم ہوتی ہے۔ ثابت نقطہ کو ماسکہ اور ثابت خط کو مرتب کہتے ہیں۔

۱۰۹۔ ناقص کی مساوات معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ 'س' ماسکہ اور 'ف' مرتب ہے۔

سے 'م' مرتب پر عمود کھینچو۔
سے 'س' کو 'ا' پر اس طرح تقسیم کرو کہ 'ا': 'س' = 'د' ہو
نسبت = 'ز': 'ا' (فرض کرو)۔

سے 'س' محدودہ میں ایک ایسا نقطہ 'ا' ہو گا کہ

س: 'ا' = 'ا': 'ز'۔

فرض کرو کہ 'ا' کا نقطہ وسطی ج ہے اور 'ا' = 'ا' = 'ا'۔

تب 'ا' س = 'ز' x 'س' = 'ا' اور 'س' = 'ا' = 'ز' x 'س' = 'ا'۔

∴ 'ا' س + 'س' = 'ا' = 'ز' (س + 'ا' = 'ا')۔

∴ 'ا' ج = 'ا' ج = 'ز' x 'س' = 'ج'۔

∴ 'س' ج = 'ج' = $\frac{1}{2}$ (۱)

تیر 'س' = 'ا' = 'س' = 'ز' (س = 'ا' = 'ا')۔

یا 'ا' = 'ا' = 'س' = 'ز' x 'ا' = 'ا'۔

∴ 'س' ج = 'ج' = 'ز' x 'ا' = 'ا' = 'ا' (۲)

اب فرض کرو کہ 'ج' کو مبداء 'ج' کو محور 'لا' اور 'ج' کے

عمود وار ایک خط کو محور ماقبال دیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ منحنی پر کوئی نقطہ 'ن' ہے اور 'ا' کے محدود (لا، ما) ہیں۔

تب شکل میں

س: 'ن' = 'ز' x 'ن' = 'ا'۔

∴ 'س' ل + 'ل' = 'ن' = 'ز' x 'س' = 'ل'۔

اب 'س' ل = 'س' ج + 'ج' ل = 'ا' ل + 'ا' ل = 'ا' ل۔

اور 'س' ل = 'س' ج + 'ج' ل = 'ا' ل + $\frac{1}{2}$ ل = 'ا' ل + $\frac{1}{2}$ ل۔

∴ (ا' ل + لا) + 'ا' ل = 'ا' ل = 'ز' (لا + $\frac{1}{2}$ ل)۔

یا 'ا' ل + لا (ا' ل - ز' ل) = (ا' ل - ز' ل)۔

یا (۳) $\frac{1}{2} = \frac{لا}{(ا' ل - ز' ل)} + \frac{ا' ل}{(ا' ل - ز' ل)}$

لا = رکھنے سے $MA = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - z^2}$ حاصل ہوتا ہے جس سے محور مایر کے وہ مقطوعے حاصل ہوتے ہیں جو منحنی قطع کرتا ہے۔ اگر ان طولوں کو \pm ب لکھا جائے تو

ب^۲ = $\frac{1}{4} (4a^2 - z^2)$ (۴)
اور مساوات (۳) شکل

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (۵)$$

اختیار کرتی ہے۔
وتر خاص وہ وتر ہے جو ماسکے میں سے گزرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہوتا ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے مساوات (۵) میں لا = - ز رکھنا چاہئے۔

$$\text{تب } MA = b^2 (1 - \frac{z^2}{a^2}) = \frac{b^2}{a^2} \quad (۴) \text{ سے}$$

اس لیے نیم وتر خاص کا طول $\frac{b^2}{a}$ ہے۔

۱۱۰۔ مساوات (۵) [دفعہ ۱۰۹] میں مای کی قیمت ب سے بڑی نہیں ہو سکتی کیونکہ اگر ایسا ہو تو لا منفی ہوگا، اسی طرح لا سے بڑا نہیں ہو سکتا۔ پس قطع ناقص ایک ایسا منحنی ہے جو تمام سمتوں میں محدود ہوتا ہے۔

اگر لا عدداً ۱ سے کم ہو تو مای مثبت ہوگا اور لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے مای دو مساوی اور مختلف علامت قیمتیں حاصل ہونگی۔ اس لیے محور لا منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

اسی طرح اگر مای عدداً ۱ سے کم ہو تو لا مثبت ہوگا اور مای کی کسی مخصوص قیمت کے لیے لا کی دو قیمتیں حاصل ہونگی جو مساوی اور

مختلف ابعلامت ہوں گی۔ اس لیے محور مانحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر محور لا پر نقطے سے ایسے لیے جائیں کہ ج سے ج = س ج اور ج سے ج = ج تو نقطہ سے بھی منحنی کا ماسکہ ہوگا اور سے سے گزرنیوالا وہ خط جو ج سے پر عمود ہو متناظر مرتب ہوگا۔

اگر منحنی پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو مجدد (لا، ما) مساوی $\frac{لا}{ما} + \frac{ما}{لا} = ۲$ کو پورا کریں گے اور یہ ظاہر ہے کہ ایسی صورت میں مجدد (لا، ما) بھی مساوی کو پورا کریں گے اور اس لیے نقطہ (لا، ما) بھی منحنی پر ہوگا۔ لیکن نقطے (لا، ما) اور (لا، ما) مرکز میں سے گزرنے والے ایک خط مستقیم ہیں اور مبادا سے مساوی فاصلوں پر ہیں۔ پس مبادا پر اس و ترکی تنصیف کرتا ہے جو اس میں سے گزرتا ہے اور اس لیے اس کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں۔

وہ وتر جو ماسکوں میں سے گزرتا ہے محور اعظم کہلاتا ہے اور وہ وتر جو مرکز میں سے گزرتا ہے محور اعظم پر عمود ہوتا ہے محور اصغر کہلاتا ہے۔

۱۱۱۔ ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلے معلوم کرنا۔ (۱۴۷)

دفعہ ۱۰۹ کی شکل میں چونکہ س ن = ز x ن م اس لیے

$$س ن = ز x ل = ز (س ج + ج ل) = ز (ل + \frac{ل}{ز}) = ل + ز لا$$

$$نیز س ن = ز x ل = ز (ج ل - ج ل) = ل - ز لا$$

$$س ن + س ن = ۲ ل$$

بعض اوقات ناقص کی یہ تعریف کی جاتی ہے کہ وہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

اس تعریف سے منحنی کی مساوات معلوم کرنا۔
فرض کرو کہ مستقل محور ۱۲ ہے۔ فرض کرو کہ دو ثابت نقطوں کے درمیان
فاصلہ ۱۲ ہے۔

ایں ثابت نقطوں کو ملائے والے خط کے وسطی نقطہ کو مبداء قرار دو۔
فرض کرو کہ یہ خط اور اس کے عمود وار دو سر خط محاور لا اور ما ہیں۔ تب
دی ہوئی شرط سے

$$12 = \sqrt{(12 - z)^2 + a^2} + \sqrt{(12 + z)^2 + a^2}$$

اس کو منطبق بنانے سے $a + (12 - z) = (12 + z)$ اور یہ وہی مساوات ہے جو سابق میں حاصل ہو چکی ہے۔
۱۱۲۔ ناقص کی قطبی مساوات جبکہ مرکز کو قطب کے طور پر

لیا جائے مساوات $\frac{a}{r} + \frac{a}{p} = 1$ میں لا کی بجائے رجم ط اور
ما کی بجائے رجب ط لکھنے سے حاصل ہوگی۔ اس لیے یہ مساوات

$$\frac{r}{a} + \frac{p}{a} = 1$$

$$\text{یا } \frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{a} \dots \dots (1)$$

ہے۔ اس مساوات کو شکل

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} - \frac{1}{p} \dots \dots (2)$$

میں لکھا جاسکتا ہے اب چونکہ $\frac{1}{p}$ مثبت ہے ہم مساوات (۲)

سے دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{r}$ کی کم سے کم قیمت $\frac{1}{a}$ ہے اور $\frac{1}{r}$ بڑھتا ہے۔ (۱۲۸)

طہ صفر سے $\frac{۱}{۲}$ تک بڑھتا ہے۔ نیز $\frac{۱}{۲}$ کی بڑی سے بڑی قیمت
 $\frac{۱}{۲}$ ہے۔ اس لیے سمتی نصف قطر $\frac{۱}{۲}$ سے ب تک گھٹتا ہے جیسے طہ
 صفر سے $\frac{۱}{۲}$ تک بڑھتا ہے۔
 ہم معلوم کر چکے ہیں کہ ناقص پر کے تمام نقطوں کے لیے

$$0 = 1 - \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲}$$

اس طریقہ پر جو دفعہ ۹۲ میں اختیار کیا گیا تھا یہ ثابت کیا جاسکتا
 ہے کہ اگر منحنی کے اندر کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو $\frac{۲}{۲}$
 $1 - \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲}$ منفی ہوگا اور اگر منحنی کے باہر کسی نقطہ کے محدد (لا، ما)
 ہوں تو $1 - \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲}$ مثبت ہوگا۔

۱۱۴۔ ایک ناقص اور ایک معلومہ خط مستقیم کے نقاط
 تقاطع معلوم کرنا اور وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خط
 ایک ناقص کو مس کرے۔

[نوٹ: ہم آئندہ ناقص کی مساوات کو ہمیشہ $1 = \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲}$
 لینگے والا ہے کہ اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔]
 فرض کر دو کہ خط مستقیم کی مساوات
 $ما = م لا + ج$ (۱)

ان نقطوں پر جو خط مستقیم اور ناقص میں مشترک ہیں دونوں رشتے پورے ہوتے ہیں۔ پس مشترک نقطوں پر

$$1 = \frac{لا^2}{ب^2} + \frac{(م^2 + ج^2)}{ب^2}$$

$$یا \quad لا^2 (ب^2 + م^2) + ۲م ج لا + لا^4 + ج^2 = ۰ \dots (۲)$$

یہ ایک دو درجی مساوات ہے اور ہر دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں حقیقی، منطبق، یا خیالی۔
پس لا کی دو قیمتیں ہیں اور ان کے جواب میں ما کی دو قیمتیں مساوی (۱) سے حاصل ہوتی ہیں۔

مساوات (۲) کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہونگی اگر

$$لا (ج - ب) (ب^2 + م^2) = م^2 ج لا$$

یعنی اگر $ج = لا^2 + م^2 + ب^2$
لا کی دو قیمتیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو (۱) کی رو سے
ما کی دو قیمتیں بھی ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہئیں۔
پس وہ دو نقطے جنہیں ناقص خط مستقیم سے منقطع ہوتا ہے منطبق ہوں گے اگر

$$ج = \sqrt{لا^2 + م^2 + ب^2}$$

اس لیے وہ خط جس کی مساوات

$$ما = لا + \sqrt{لا^2 + م^2 + ب^2} \dots \dots \dots (۳)$$

ہے م کی تمام قیمتوں کے لیے ناقص کو مس کرے گا۔
چونکہ (۳) میں علامت جذر کے قبل مثبت یا منفی کوئی علامت

رکھی جاسکتی ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ m کی ہر قیمت کے لیے ناقص کے دو m اس ہیں یعنی کسی دے ہوئے خط مستقیم کے متوازی دو m اس ہوتے ہیں۔ یہ دو m اس ناقص کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر ہوتے ہیں۔

۱۱۵۔ ناقص پر کے دو نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات معلوم کرنا اور کسی نقطہ پر کے m اس کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ناقص پر کے دو نقطوں کے محدد (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔

$$\text{مساوات} \quad \frac{(لا-لا')(لا-لا')}{r_1} + \frac{(ما-ما')(ما-ما')}{r_2} =$$

$$(1) \quad \dots\dots\dots 1 - \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} =$$

مختصر کرنے پر پہلے درجہ کی مساوات ہے اور اس لیے وہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

اس مساوات میں اگر لا کی بجائے لا اور ما کی بجائے ما رکھا جائے تو دائیں جانبی رکن متماثل معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن بھی معدوم ہوتا ہے کیونکہ نقطہ (لا، ما) ناقص پر ہے۔

پس نقطہ (لا، ما) خط (۱) پر ہے اور اسی طرح (لا، ما) بھی اس خط پر ہے۔

اس لیے مساوات (۱) اس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گزرتا ہے۔

یہ مساوات شکل

$$(2) \quad \dots\dots\dots 1 + \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} = \frac{(لا+لا')(لا+لا')}{r_1} + \frac{(ما+ما')(ما+ما')}{r_2}$$

(۱۵۰)

میں لکھی جاسکتی ہے۔

(لا، ما) پر کے ماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات
(۲) میں لا = لا اور ما = ما رکھنا چاہئے چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$(۳) \dots\dots\dots '۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

نتیجہ صریح ۱۔ محور اعظم کے سروں کے محدود علی الترتیب (۱، ۰) اور (۰، ۱) ہیں اور (۳) سے ان نقطوں پر کے ماس لا = لا اور لا = لا ہیں۔

پس محور اعظم کے سروں پر کے ماس محور اصغر کے متوازی ہیں۔
اسی طرح محور اصغر کے سروں پر کے ماس محور اعظم کے متوازی ہیں۔
نتیجہ صریح ۲۔ نقطہ (لا، ما) پر کا ماس نقطہ (لا، لا) پر کے ماس کے متوازی ہوتا ہے اور یہ دو نقطے ایک خط مستقیم پر ہوتے ہیں جو مرکز میں سے گذرتا ہے۔

پس ناقص کے مرکز میں سے گذرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے ماس ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

۱۱۶۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ خط ل لا + م ما + ن = ۰ ناقص کو

مس کرے۔

$$(۱) \dots\dots\dots '۰ = ل لا + م ما + ن$$

$$(۲) \dots\dots\dots '۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

کو جہاں قطع کرتا ہے ان نقطوں کو مبداء سے ملانے والے خطوں کی مساوات [دفعہ ۳۸]

$$(۳) \dots\dots\dots '۰ = \left(\frac{لا + م ما}{ن} \right) - \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

۴۔ اگر خط مستقیم (۲) ناقص کو منطبق نقطوں پر قطع کرے تو مساوات
(۳) منطبق خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔ اس لیے (۳) کا دائیں جانبی
رکن ایک کامل مربع ہونا چاہیے، اس کے لیے شرط

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{n}$$

ہے۔ اس لیے مطلوبہ شرط ہے

۱ + ۲ = ۳ + ۴ = ۵ (۳)
نتیجہ صریح۔ خط لاجم عہ + مابج عہ = ع۔ ناقص کو
مس کرے گا اگر

۱ + ۲ = ۳ + ۴ = ۵ (۵)

۱۱۔ ناقص کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔

ناقص کے کسی نقطہ (لا، ما) پر کے ماس کی مساوات

$$1 = \frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب}$$

ہے۔ عماد وہ خط ہے جو نقطہ (لا، ما) میں سے گذر کر ماس پر عمود ہوتا ہے
اس لیے اس کی مساوات [دفعہ ۳۰]

$$\frac{(لا - لا)}{ا} = \frac{ما - ما}{ب}$$

۴۔

مثالیں

۱۔ حسب ذیل ناقصوں کے خروج المرکز اور ماسوں کے محدود معلوم کرو۔

$$(۱) ۲\lambda^2 + ۳\mu^2 - ۱ = ۰, (۲) ۸(۱-\lambda)^2 + ۶(۱+\lambda)^2 - ۱ = ۰$$

$$\text{جواب: } \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(1 - \frac{1}{13} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

۲۔ مثال کے ناقصوں کے وتر خاص کے طول معلوم کرو۔

$$\text{جواب: } \frac{2}{3\sqrt{2}} \text{ اور } \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$۳۔ \text{ثابت کرو کہ خط } \lambda = ۱ + \frac{5}{4}\sqrt{2} \text{، ناقص } ۲\lambda^2 + ۳\mu^2 = ۱ \text{ کو مس}$$

کرتا ہے۔

$$۴۔ \text{ثابت کرو کہ خط } ۳\mu = ۱ - \lambda \text{، منحنی } ۳\lambda^2 - ۲\lambda - ۱ = ۰ \text{ کو دو}$$

نقطوں پر جو محور μ سے مساوی فاصلوں پر ہیں قطع کرتا ہے۔

$$۵۔ \text{نقطہ } (۱, ۲) \text{ ناقص } ۲\lambda^2 + ۳\mu^2 - ۱۲ = ۰ \text{ کے باہر ہے یا اندر؟}$$

$$۶۔ \frac{\lambda^2}{۲} + \frac{\mu^2}{۲} = ۱ \text{ کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محور (۱۵۲)}$$

لا کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتے ہیں۔

$$۷۔ ۲\lambda^2 + ۳\mu^2 = ۶ \text{ کے وتر خاص کے سروں پر کے (۱) مماسوں کی}$$

مساواتیں اور (۲) عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

$$\text{چار نقطے } (1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{2}) \text{ ہیں۔}$$

$$۸۔ \frac{\lambda^2}{۲} + \frac{\mu^2}{۲} = ۱ \text{ کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو}$$

جو محور پر مساوی متطوعے قطع کرتے ہیں۔

$$\text{جواب: } \lambda \pm \mu \pm \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = ۰$$

$$۹۔ \text{ثابت کرو کہ مساوات } ۴\lambda^2 + ۲\mu^2 = ۶ \text{ لایک ناقص کو تعبیر}$$

کرتی ہے جس کا خروج مرکز $\frac{1}{2}$ ہے اور ثابت کرو کہ مبدا محور اصغر کے ایک

سرے پر ہے۔
۱۰۔ اس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ $(-1, 1)$ مرتب
۲۰۔ ۳۔ ۵۔ اور خروج مرکز $\frac{5}{4}$ ہے۔

جواب: ۲۰۔ $20x^2 + 24x + 2 = (1-x)^2$

۱۱۔ اگر ایک ناقص کے وتر خاص کے سرے پر کا عماد محور اصغر کے
ایک سرے میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ نخی کا خروج مرکز مساوات z^2
۲۔ ۱۔ سے ملتا ہے۔

۱۲۔ اگر کسی نخی mn کو خارج کیا جائے اور وہ mn میں سے گزرتو
وتر خاص کے سرے پر کے مماس سے q پر ملے تو ثابت کرو کہ q کا مماس فاصلہ
 mn کے مساوی ہے۔

۱۳۔ معلوم طول کے ایک خط مستقیم کے سرے، دو ثابت خطوط مستقیم
و $و$ پر ہیں جو علی التوالی $م$ ہیں۔ ثابت کرو کہ خط $یر$ کے کسی نقطہ $ج$ کا طریق
ایک ناقص ہے جس کے نیم محور علی الترتیب $ج$ (اور $ج$ کے مساوی ہیں
۱۴۔ ایک ناقص کا کوئی مماس محور اعظم کے سرے پر کے مماسوں سے
نقاط $ت$ پر منقطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر $ت$
ہے ماسکوں میں سے گزرے گا۔

[کیونکہ $\frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} = 1$ ، خط $لا = و$ کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں

$$ما = \frac{ب^2}{ا} (1 - \frac{لا}{و}) \text{ اور خط } لا = و \text{ کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں } ما = \frac{ب^2}{ا} (1 + \frac{لا}{و})$$

پس وہ دائرہ جس کا قطر $ت$ ہے

$$= (1-لا)(1+لا) + (1-ما)\{\frac{ب^2}{ا}(1-\frac{لا}{و})\} - (1+ما)\{\frac{ب^2}{ا}(1+\frac{لا}{و})\} = 0$$

ہے جو ما = کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں

$$لا - ا^۱ + ا^۲ = \frac{ب^۲}{۲ا} (۱ - \frac{لا}{ا}) = ۰$$

یعنی لا - ا^۱ + ا^۲ = ب^۲۔ کیونکہ (لا، ا) ناقص پر ہے۔

۱۱۸۔ کسی نقطہ سے ایک قطع ناقص کے دو مماس کھینچے جاسکتے

(۱۵۳)

ہیں جو حقیقی، منطبق، یا خیالی ہوں گے بموجب اس کے کہ نقطہ

منحنی کے باہر اس کے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

وہ خط جس کی مساوات

$$ما = لا + ا^۱ + ا^۲ = ب^۲ \dots \dots (۱)$$

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ [دفعہ ۱۱۸]۔
خط (۱) خصوص نقطہ (لا، ا) میں سے گزرے گا اگر

$$ما = لا + ا^۱ + ا^۲ = ب^۲$$

یعنی اگر (ما - لا) - ا^۱ - ا^۲ = ب^۲۔

$$م^۲ (لا - ا^۱) - ۲م لا + ما - ب^۲ = ۰ \dots (۲)$$

مساوات (۲) م میں ایک دو درجی مساوات ہے اور اس سے ناقص کے اُن مماسوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، ا) میں سے گزرتے ہیں۔ چونکہ دو درجی مساوات کی اصلیں دو ہوتی ہیں اس لیے دو مماس نقطہ (لا، ا) میں سے گزریں گے۔
مساوات (۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہیں بموجب اسکے کہ
(لا - ا^۱) (ما - ب^۲) - لا ا^۲

منفی، صفر، یا مثبت ہو، یا بموجب اس کے کہ $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ ۔ مثبت، صفر، یا منفی ہو۔ یعنی بموجب اس کے کہ نقطہ (لا، ما) ناقص کے باہر، اسکے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

۱۱۹۔ کسی نقطہ سے ایک ناقص کے دو تماس کھینچے گئے ہیں۔ ان تماسوں کے نقاط تماس کو ملانے والے خط کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ لا، ما اس نقطہ کے محدود ہیں جس سے تماس کھینچے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ تماسوں کے نقاط تماس کے محدود (ع، ک) اور (ع، ک) ہیں۔

(۱۵۴)

$$۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

$$۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

اور

ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ (لا، ما) ان دونوں تماسوں پر ہے۔

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

اور

لیکن (۱) اور (۲) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ (ع، ک) اور (ع، ک) دونوں اس خط مستقیم پر ہیں جس کی مساوات

$$(۳) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

ہے۔ پس (۳) اس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو (لا، ما) سے کھینچے ہوئے
ماسوں کے نقاط تماس کو ملاتا ہے
اگر کسی نقطہ ن سے ایک ناقص کے دو ماس کھینچ جائیں تو
ان ماسوں کے نقاط تماس کو ملانے والے خط کو ناقص کے لحاظ سے نقطہ
ن کا قطبی کہا جاتا ہے۔

۱۲۰۔ اگر ایک ناقص کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی نقطہ ق
میں سے گزرے تو نقطہ ق کا قطبی ن میں سے گزرے گا۔
اس کو ٹھیک اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے جیسا کہ دفعہ ۸ میں
ثابت کیا گیا تھا۔

۱۲۱۔ ایک ناقص کے ایسے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا
طریق معلوم کرنا جو باہم علی القوائم ہوں۔
وہ خط جس کی مساوات

$$m = m_1 + m_2 \quad \text{یا} \quad m = m_1 + m_2 \quad (1)$$

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔
اگر ہم لا اور ما کو معلومہ فرض کریں تو اس مساوات سے ان
ماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔
اس مساوات کو منطبق بنانے پر وہ

(۱۵۵)

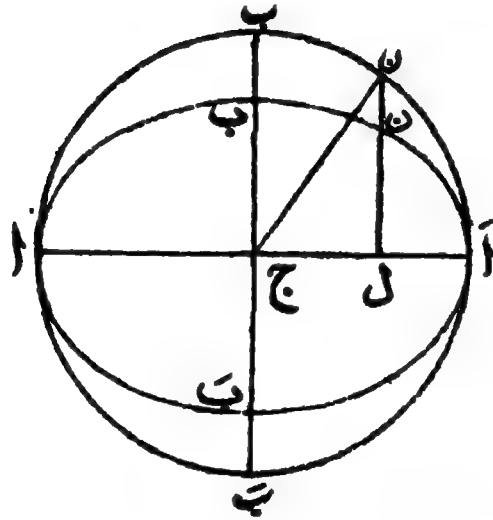
$$m_1 (لا - لا_1) - m_2 (لا - لا_2) = 0 \quad (2)$$

ہو جاتی ہے جسے
فرض کرو کہ (۲) کی اصلیں م اور م ہیں تب اگر ماس علی القوائم
ہیں تو $m_1 = m_2 = 1$ اور اس لیے

$$1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \dots \dots \dots (3)$$

اس لیے مطلوبہ طریق ایک دائرہ ہے۔
 اس دائرہ کو ناقص کا مرتبہ دائرہ کہتے ہیں۔
 ۱۲۲۔ وہ دائرہ جو ایک ناقص کے محور اعظم پر اس کو قطر مان کر
 کھینچا گیا ہو امدادی دائرہ کہلاتا ہے۔



$$1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \dots \dots \dots (2)$$

ہوگی۔
 اس لیے اگر ناقص کے کسی معین N کو خارج کیا جائے اور
 وہ امدادی دائرہ سے N پر ملے تو (۱) اور (۲) سے

(۱۵۶)

$$\frac{ل ن}{ب} = ۱ - \frac{ج ل}{۱} = \frac{ل ن}{۱}$$

$$\frac{ل ن}{ب} = \frac{ب}{۱}$$

پس ناقص کے اور دائرہ کے معین ایک دوسرے کے ساتھ مستقل نسبت رکھتے ہیں۔

زاویہ ۱ ج ن کو نقطہ ن کا خارج المرکز زاویہ کہتے ہیں۔
دائرہ کے نقطہ ن کو ناقص کے نقطہ ن کا جواب کہتے ہیں۔
اگر زاویہ ۱ ج ن نہ ہو تو ن کے محدود حجم فہ ۱ جب فہ ہوں گے اور ن کے محدود حجم فہ ۲ ب جب فہ ہوں گے۔

۱۲۳۔ دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے دئے گئے ہیں۔
ان کو ملانے والے خط کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ان دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے طہ ۱، طہ ۲،
تب ان کے محدود علی الترتیب ۱ حجم طہ ۱، ب جب طہ ۱ اور ۱ حجم طہ ۲
ب جب طہ ۲ ہیں۔

پس ان کو ملانے والے خط کی مساوات

$$[دفعہ ۲۴] \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

ہے۔

$$\frac{۱}{۱} (ج ب طہ ۱ - ج ب طہ ۲) + \frac{۱}{ب} (ج ب طہ ۱ - ج ب طہ ۲) = ۰$$

اس کو جب ۱ (طہ ۱ - طہ ۲) سے تقسیم کرنے پر مساوات

$$\frac{لا}{ا} جم \frac{ا}{ب} (طه + طه) + \frac{ا}{ب} جب \frac{ا}{ب} (طه + طه) = جم \frac{ا}{ب} (طه - طه) \dots (۱)$$

ماصل ہوتی ہے جو مطلوبہ مساوات ہے۔
طہ پر کے ماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۱)
میں طہ = طہ رکھنا ہو گا چنانچہ ماصل ہوتا ہے

$$\frac{لا}{ا} جم طه + \frac{ا}{ب} جب طه = ا \dots \dots \dots (۲)$$

۱۲۴۔ دفعہ سابق کی مساوات (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ناقص
دونقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ مستقل ہو اور ۲۷۰ کے
مساوی ہو تو ان نقطوں کو ملانے والا وتر ہمیشہ خط

(۱۵۷)

$$\frac{لا}{ا} جم عه + \frac{ا}{ب} جب عه = ا$$

کے متوازی ہوتا ہے۔ یعنی وتر ہمیشہ اس نقطہ پر کے ماس کے متوازی
ہوتا ہے جس کا خارج المرکز زاویہ عہ ہے۔

اس کے بالعکس ایک ناقص کے متوازی وتروں کے
نظام کے لیے کسی وتر کے سروں کے خارج المرکز زاویوں کا
مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

۱۲۵۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات

اس نقطہ کے خارج المرکز زاویہ کی رقوم میں معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ناقص کے نقطہ ن کا خارج المرکز زاویہ طہ ہے۔
ن پر کے ماس کی مساوات (دفعہ ۱۲۳)

$$\frac{لا}{ا} جم طه + \frac{ا}{ب} جب طه = ا$$

ہے۔ اس خط کی مساوات جو نقطہ (ا، جم طہ) ب جب طہ) میں سے گذرتا ہے اور ماس پر عمود ہے [دفعہ ۳۰ کی بموجب]

$$(لا - ا، جم طہ) - \frac{1}{جم طہ} - (ما - ب جب طہ) \frac{ب}{جم طہ} = ۰$$

$$یا \quad \frac{لا}{جم طہ} - \frac{ب}{جم طہ} = \frac{ما}{جم طہ} - \frac{ا}{جم طہ}$$

ہے۔ اگر طہ، طہ پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع (لا، ما) ہو تو

$$\frac{لا}{جم طہ} + \frac{ما}{جم طہ} = \frac{ا}{جم طہ} + \frac{ب}{جم طہ}$$

$$اور \quad \frac{لا}{جم طہ} + \frac{ما}{جم طہ} = \frac{ا}{جم طہ} + \frac{ب}{جم طہ}$$

$$پس \quad \frac{لا}{جم طہ} = \frac{ا}{جم طہ} - \frac{ب}{جم طہ} = \frac{ما}{جم طہ} - \frac{ب}{جم طہ}$$

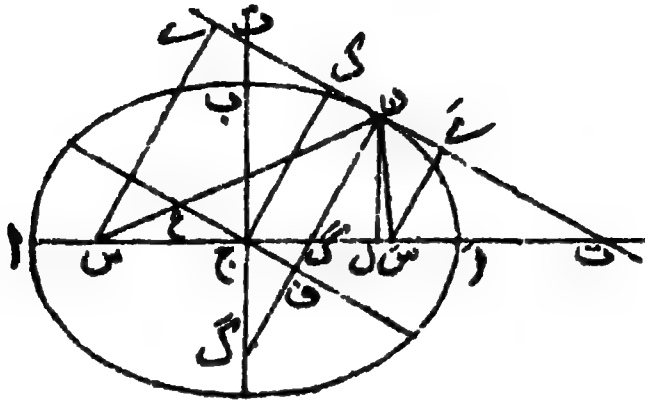
$$اور \quad \frac{ما}{جم طہ} = \frac{ا}{جم طہ} - \frac{ب}{جم طہ} = \frac{لا}{جم طہ} - \frac{ب}{جم طہ}$$

[یا چونکہ وتر (طہ، طہ) نقطہ (لا، ما) کا قطبی ہے اس لیے دفعہ ۱۲۳ کی مساوات (ا، ا) وہی ہے جو

$$۰ = ۱ - \frac{لا}{جم طہ} + \frac{ما}{جم طہ}$$

ہے۔ پس اوپر کا نتیجہ فوراً لکھ لیا جاسکتا ہے]

طہ، طہ پر کے عمودوں کے نقطہ تقاطع کے عمود



نیز چونکہ
 $\frac{\sin \text{گ}}{\sin \text{س}} = \frac{\sin \text{ج} + \text{جگ}}{\sin \text{ز} + \text{زلا}} = \frac{\sin \text{ز} - \text{زلا}}{\sin \text{ا}}$
 اس لیے ن گ، زاویہ س ن س کی تنصیف کرتا ہے..... (ضہ)

پھر چونکہ $\text{ن گ} = \text{گ ل} + \text{ل ن} = (\text{ج ل} - \text{ج گ}) + \text{ل ن}$

$$\therefore \text{ن گ} = \text{ما} + \text{لا} (1 - \text{ز}^2)$$

$$\text{ن گ} = \text{ب}^2 \sqrt{\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}}$$

$$\text{اسی طرح ن گ} = \text{ا} \sqrt{\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ا}^2}{\text{ا}^2}}$$

$$\text{ن ف} = \text{گ ج} = \frac{1}{\left(\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ا}^2}{\text{ا}^2}\right)} \quad \text{اور} \quad (140)$$

ن ف ب ن گ = ب^۲، اور ن ف ب ن گ = و^۲.... (صہ)
وہ خط جس کی مساوات

$$م + لا = \sqrt{و^۲ + م^۲ + ب^۲} \dots\dots\dots (۳)$$

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ پس اگر اس خط پر
ماسکوں سے عمود سے 'س' کے کھینچے جائیں تو [دفعہ ۳۱]

$$\frac{م + لا + \sqrt{و^۲ + م^۲ + ب^۲}}{م + لا} = \frac{م + لا + \sqrt{و^۲ + م^۲ + ب^۲}}{م + لا} \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots (طہ) \dots\dots\dots$$

پھر اس خط کی مساوات جو م میں سے گزرتا ہے اور (۳) پر عمود ہے
م + لا + لا = و^۲.... (۴)

ہے۔

(۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع سے کا طریق معلوم کرنے کے لیے م کو
ان دو مساواتوں سے ساقط کرنا چاہئے۔ یہ مساواتیں شکل

$$م + لا = \sqrt{و^۲ + م^۲ + ب^۲} \text{ اور } م + لا + لا = و^۲$$

میں لکھی جاسکتی ہیں۔ ان مساواتوں کی طرفین کا مربع لیکر جمع کر دو حاصل ہوگا

$$(لا + ما)(لا + ما) = (و + م + ب + ب^۲ + و^۲ + م^۲ + ب^۲) = (و + م + ب^۲ + و^۲ + م^۲ + ب^۲)$$

اس لیے سے کا طریق امدادی دائرہ ہے جس کی مساوات

$$لا + ما = و^۲ \dots\dots\dots (ظہ)$$

ہے۔

پس یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر ہم یہ فرض کرتے کہ س سے عمود کھینچا گیا ہے۔

۱۲۷۔ فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ ہے اور فرض کرو کہ ن کا قطبی ق ق ہے۔ فرض کرو کہ ق ق محوروں سے ت ت پر ملتا ہے۔ س س سے ج ج اور ن و کو ق ق پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ ن و محوروں سے گ گ پر ملتا ہے۔ تب اگر ن کے محدوداً م م ہوں تو ق ق کی مساوات [دفعہ ۱۱۹]

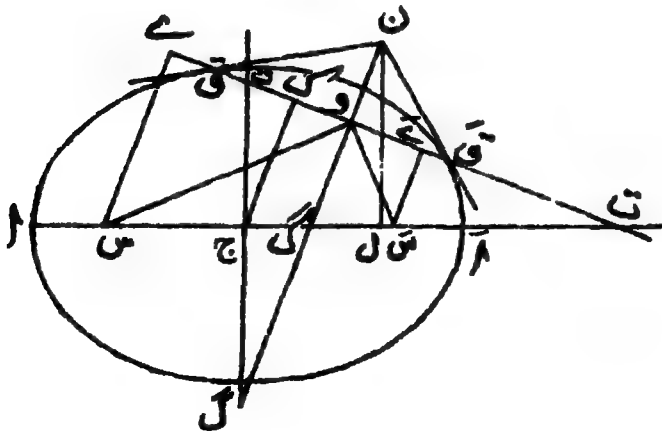
$$(۱) \dots\dots\dots = \frac{لا\alpha}{وا} + \frac{ما\alpha}{با} = ۱$$

(۱۶۱) ہوگی۔ اس لیے ن و گ کی مساوات [دفعہ ۱۳]

$$(۲) \dots\dots\dots = \frac{لا - لا'}{وا} = \frac{ما - ما'}{با}$$

ہوگی۔

(۱) اور (۲) سے پچھلی دفعہ کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ
(ع) ج ل × ج ت = ج ا' (ب) ل ن × ج ت = ج ب'
(ج) ج گ = ز × ج ل اور (ض) گ ج × ن گ = ب'



مثالیں

- ۱۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص کا ماسکہ متناظر مرتب کا قطب ہوتا ہے۔
- ۲۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے ایک ماس پر مرکز سے عمود گزارا جائے تو عمود کے پائین کے طریق کی مساوات $z = \frac{1}{2} \text{جم} ط + ب$ جب $ا$ ہوگی۔
- ۳۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص کے کوئی دو قطر جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں لیے جائیں تو ان کے مربعوں کے مکافیوں کا مجموعہ مستقل ہوگا۔
[دیکھو دفعہ ۱۱۲]۔
- ۴۔ اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث کو ایک ناقص میں بنا دیا جائے تو ثابت کرو کہ منبعلوں کے متوازی قطروں کے مکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوگا۔
- ۵۔ ایک ناقص دو خطوط مستقیم کے درمیان جو باہم علی القوائم ہیں پھیلنا (۱۶۲) ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔ [دیکھو دفعہ ۱۲۱]۔
- ۶۔ اگر ایک ناقص کے محور اصغر پر دو ایسے نقطے $س$ لیے جائیں کہ $س ج = ج ح = ج ح$ جہاں ج مرکز اور $س$ ماسکہ ہے تو ثابت کرو کہ ناقص کے کسی ماس پر $س$ اور $ح$ سے عمودوں کا مجموعہ مستقل ہے۔
- ۷۔ ایک ناقص کے دو نقطوں کے خارج المركز زاویوں کا فرق مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ان نقطوں پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔
[اگر $ذ + ح$ اور $ف$ پر کے ماس (لا'ما) پر ملیں تو $\frac{لا}{1} = \text{جم} ذ$ قطعاً]
- ۸۔ جب $ذ$ قطعاً $ح$ طریق مائل کرنے کے لیے $ذ$ کو ساقل کرو۔
۸۔ ایک نقطہ $ن$ کا قطبی محور اصغر کو $ت$ پر قطع کرتا ہے اور $ن$ سے قطبی پر کا عمود قطبی کو $و$ پر قطع کرتا ہے اور محور اصغر کو $گ$ پر۔ ثابت کرو کہ $ت$ و $و$ $گ$ میں سے گزرنے والا دائرہ ماسکوں میں سے گزرے گا۔

اُس وتر کی مساوات جو نقطوں طہ، اور طہ، کو ملاتا ہے

$$\frac{لا}{۲} جم = \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) + \frac{۱}{۲} جب = \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) = جم \quad (۱)$$

ہے۔ اگر یہ وتر نا۔ م۔ لا = ۰ کے متوازی ہے تو

$$م = - \frac{ب}{۲} مم = \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) \quad (۱)$$

لیکن اگر وتر کا نقطہ وسطی (لا، نا) ہے تو

$$لا^۲ = (جم طہ + جب طہ) = ۲ جم = ۲ (جم طہ + طہ طہ) = ۲ (جم طہ + طہ طہ)$$

$$لا^۲ = ۲ (جم طہ + جب طہ) = ۲ جب = ۲ (طہ + طہ) = ۲ (جم طہ + طہ طہ)$$

$$پس \quad \frac{لا}{۲} = \frac{ب}{۲} مس = \frac{۱}{۲} (طہ + طہ)$$

$$= - \frac{ب^۲}{۲م} \quad (۱)$$

اس لیے اُن تمام وتروں کے نقاط وسطی کا طریق جو خط نا = م لاکے متوازی ہیں وہ خط مستقیم ہے جس کی مساوات

$$لا = - \frac{ب^۲}{۲م} \quad (۲)$$

ہے۔ (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ تمام قطر (دفعہ ۱۰۲، تعریف)

مرکز میں سے گزرتے ہیں۔ مساوات (۲) کو شکل نا = م لایں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$م = - \frac{ب^۲}{۲م} \quad (۳)$$

رشتہ (۳) کے تشاکل سے یہ ظاہر ہے کہ وہ تمام وتر جو $ما = م$ لاکے متوازی ہیں خط $ما = م$ لاسے تنصیف ہوتے ہیں۔
پس اگر ناقص کا ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی و ترو کی تنصیف کرے تو یہ دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی و ترو کی تنصیف کرے گا۔

تعریف: دو قطر مزدوج کہلاتے ہیں جبکہ ہر ایک دوسرے کے متوازی و ترو کی تنصیف کرے۔

۱۲۹۔ کسی قطر کے ایک سرے پر کا ماس اُن و ترو کے

متوازی ہوتا ہے جو اس قطر سے تنصیف ہوتے ہیں۔
متوازی و ترو کے نظام کے تمام نقاط وسطی ایک قطر پر ہوتے ہیں۔
اس لیے متوازی ماسوں پر یعنی اُن متوازی و ترو پر جو ناقص کو منطبق نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔ غور کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ متوازی و ترو نظام کے نقاط وسطی کا قطر اُن ماسوں کے نقاط ماس میں سے گذرتا ہے جو و ترو کے متوازی ہیں۔

مثال ۱۔ ناقص کے ایک قطر کے کسی نقطہ کا قطبی مزدوج

قطر کے متوازی ہوتا ہے۔
کیونکہ (لا، ما) میں سے گذرنے والا قطر
لا ما۔ ما لا =

اور (لا، ما) کا قطبی

$$\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$$

۴۔ یہ مساواتیں شرط م م = $\frac{ب}{و}$ کو پورا کرتی ہیں کیونکہ

$$م = \frac{ب}{و} \quad \text{اور} \quad م = \frac{ب}{و} - \frac{ب}{و}$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ناقص کے ایک وتر کا وسطی نقطہ (لا، ما) ہے تو

یہ وتر نقطہ (لا، ما) کے قطبی کے متوازی ہے۔

اس لیے اس وتر کی مساوات جس کا نقطہ وسطی (لا، ما) ہے

$$(لا - لا) \frac{لا}{و} + (ما - ما) \frac{ما}{ب} = ۰$$

۵۔ مثال ۲۔ اگر ایک ناقص کے وتر ایک ثابت نقطہ میں سے

گزرے تو ان کے نقاط وسطی دوسرے ناقص پر ہوں گے۔

وہ وتر جس کا نقطہ وسطی (لا، ما) ہے

$$(لا - لا) \frac{لا}{و} + (ما - ما) \frac{ما}{ب} = ۰ \quad \text{[مثال (۱)]}$$

۶۔ اگر یہ وتر نقطہ (ک، ح) میں سے گزرے تو

$$(ح - لا) \frac{لا}{و} + (ک - ما) \frac{ما}{ب} = ۰$$

اور اس طرح نقطہ (لا، ما) ناقص

$$= \frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} - \frac{لا}{و} - \frac{ک}{ب}$$

۷۔ مثال ۳۔ ناقص پر کے ان دو نقطوں کو ملانے والا خط جنکے

خارج المکرز زاویوں کا فرق مستقل ہو دوسرے ناقص کو لف کرتا ہے۔

نقطوں ط، اور ط کو ملانے والے خط کی مساوات جبکہ ط = ط = ۲ = ع
حسب ذیل ہے

$$\frac{لا}{۲} - جم = \frac{۱}{۲} (ط + ط) + \frac{۱}{۲} جب \frac{۱}{۲} (ط + ط) = جم = ع$$

اس خط کا لغاف (ط + ط) کی مختلف قیمتوں کے لیے

$$\frac{لا}{۲} + \frac{۱}{۲} = جم = ع \quad [شال ۲ صفحہ]$$

مثال ۴۔ اگر ایک ناقص میں ایک مثلث بنایا جائے
اور اس کے دو اضلاع معلومہ خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو تیسرے
ضلع کا لغاف ایک دوسرا ناقص ہوگا۔

فرض کرو کہ ف، ق، س کے خارج المکرز زاویے ط، ط، ط ہیں۔
تب اگر ف، ق اور ف، س معلومہ خطوں کے متوازی ہوں تو
ط + ط = مستقل = ۲ = ع اور ط + ط = مستقل = ۲ = ع

پس ط - ط = ۲ = ع - ع
اس لیے بموجب مثال ۲، ق، س کا لغاف

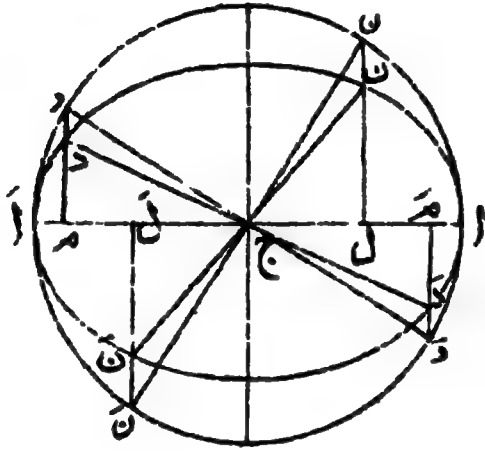
$$\frac{لا}{۲} + \frac{۱}{۲} = جم = ع - ع$$

۱۳۰۔ فرض کرو کہ مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سرے ن، د
ہیں۔ فرض کرو کہ ن کے محدود لا، م اور د کے محدود لا، م ہیں۔ ج، ن
اور ج، د کی مساواتیں

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{e} \text{ اور } \frac{b}{a} = \frac{1}{e}$$

ہیں، اس لیے دفعہ ۱۲۸ (۵) کی رو سے $\frac{b}{a} = \frac{1}{e}$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \dots \dots \dots (1)$$



اگر ن اور د کے خارج المركز زاویے فہ، فہ ہوں تو لا = وجم فہ،
 ما = ب جب فہ لا = وجم فہ، ما = ب جب فہ۔ ان قیمتوں کو (۱) میں
 درج کرنے سے

$$\text{جم فہ جم فہ} + \text{جب فہ جب فہ} =$$

$$\text{فہ} - \text{فہ} = \frac{a}{e}$$

(۱۶۶) پس ایک ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں پر کے
 نقطوں کے خارج المركز زاویوں کا فرق ایک قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔
 اگر ناقص کے قطروں ن ج ن اور د ج د کے جواب میں
 امدادی دائرہ کے قطر ن ج ن، د ج د ہوں تو ن ج ن اور د ج د

اہم علی القوائم ہوں گے۔ اس لیے دائرہ کے محدودوں کو نوران یا ن کے محدودوں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۱۳۱۔ ثابت کرو کہ دو مزدوج نیم قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سرے 'ن' 'د' ہیں۔
فرض کرو کہ 'ن' کا خارج المرکز زاویہ 'فہ' ہے تو 'د' کا خارج المرکز زاویہ

فہ $\pm \frac{\pi}{4}$ ہوگا (دفعہ ۱۳۰)۔

ن کے محدود 'ا' جم فہ 'ب جب فہ اور د کے محدود 'ا' جم (فہ $\pm \frac{\pi}{4}$)

ب جب (فہ $\pm \frac{\pi}{4}$) ہوں گے۔

$$ج ن' = ا' جم فہ + ب' جب فہ$$

$$ج د' = ا' جم (فہ \pm \frac{\pi}{4}) + ب' جب (فہ \pm \frac{\pi}{4})$$

$$ج ن' + ج د' = ا' + ب'$$

۱۳۲۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ایک ناقص کو مزدوج

قطروں کے سروں پر مس کرے مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مزدوج قطر 'ن' 'ج' 'د' 'ج' ہیں۔ اس متوازی الاضلاع

کا رقبہ جو ناقص کو 'ن' 'د' 'د' پر مس کرتا ہے 'ج' 'ن' 'ج' 'د' جب 'ن' 'ج' 'د' یا 'ج' 'د' 'ج' 'ف' ہے جہاں 'ج' 'ف' 'ج' سے 'ن' پر کے ماس

عمود ہے۔
اب اگر 'ن' کا خارج المرکز زاویہ 'فہ' ہو تو 'د' کا خارج المرکز زاویہ

فہ $\pm \frac{\pi}{4}$ ہوگا۔

$$ج د = ا جم + ب جب (ف \pm \frac{ا}{ب})$$

$$یا ج د = ا جب + ب جم (ف \pm \frac{ا}{ب}) \dots \dots (۱)$$

ن پر کے ماس کی مساوات (دفعہ ۱۲۳)

(۱۲۴)

$$\frac{ا}{ب} جم + ب جب = ا$$

$$ج ف = \frac{ا}{جم + ب جب}$$

$$یا ج ف = \frac{ا}{ا جب + ب جم} \dots \dots (۲)$$

ہے۔

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ متوازی الاضلاع کا رقبہ م و ب

کے مساوی ہے۔

۱۳۳۔ اگر مزدوج نیم قطروں کے ایک زوج کے طول ر، ر اور ان کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو

$$ر جب طہ = ا ب [دفعہ ۱۳۲]$$

اس لیے جب طہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ ر بڑے سے بڑا ہو۔

اب دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے، اس لیے ان کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ قطر ایک دوسرے کے مساوی ہوں۔

پس دو مزدوج قطروں کا درمیانی مادہ زاویہ کم سے کم ہوتا ہے

جبکہ مزدوج قطر باہم مساوی ہوں۔

۱۳۴۔ فرض کرو کہ دو مزدوج قطروں کے سروں ن، ن کے خارج لکڑز زاویے ف، ف \pm پ ہیں۔

تب ج ن ا = ا جم فہ + ب ا جب ا فہ
 اور ج د ا = ا جب ا فہ + ب ا جم ا فہ
 ج ن ا - ج د ا = (ا - ب) جم ا فہ
 پس ج ن = ج د جبکہ فہ = $\frac{11}{14}$ یا $\frac{11}{14}$
 اس لیے مساوی مزدوج قطروں کے مساواتیں

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

میں۔ پس ایک ناقص کے مساوی مزدوج قطر اُس سطح کے
 وتروں پر متوں میں منطبق ہوتے ہیں جو ناقص کے محوروں کے
 سروں پر کے ماسوں سے بنتا ہے۔

۱۳۵۔ تعریف۔ وہ دو خطوط مستقیم جو ایک ناقص پر کے کسی
 نقطہ سے کسی قطر کے سروں تک کھینچے جائیں مکملی وتر کہلاتے ہیں۔
 فرض کرو کہ ناقص کے نقطہ ق کو قطر ن ج ن کے سروں
 ن، ن سے مکملی وتر مائل کئے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ ق ن کا
 نقطہ وسطی ط ہے اور ق ن کا ط۔ تب ج ط اور ج ط مزدوج ہیں
 کیونکہ ہر ایک دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے اور ج ط
 اور ج ط علی الترتیب ق ن اور ق ن کے متوازی ہیں۔
 پس ق ن اور ق ن مزدوج قطروں کے ایک زوج کے
 متوازی ہیں۔

۱۳۶۔ ہم دائری نقطے۔ مساوات

$$\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = لا + ما + ۲ (گ + ۲ (ف + ما + ج) = ۴۔ (۱)$$

ایک ایسے منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ناقص

$$\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$$

اور دائرہ $لا + ما + ۲ (گ + ۲ (ف + ما + ج) = ۴$

کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

اب (۱) سے دو خطوط مستقیم تعبیر ہوں گے اگر نہ کوئی ایک طور پر
نسب کیا جائے اور دفعہ ۳ میں معلوم شدہ یو دی ہو۔ نیز جب (۱)
سے دو خطوط مستقیم تعبیر ہوتے ہیں تو وہ خطوط

$$\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} + (لا + ما) =$$

کے متوازی ہوں گے اور اس لیے وہ شکل $ما = ۴ - لا$ کے خطوط مستقیم
کے متوازی ہوں گے۔

پس ایک ناقص اور کسی دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گذرنا

دو خطوط مستقیم محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

(۱۶۹) اب فرض کرو کہ ایک دائرہ ایک ناقص کو ان نقطوں پر قطع
کرتا ہے جن کے خارج المرکز زاویے $عہ$ ، $بہ$ ، $ا$ ، $بہ$ ، $عہ$ ہیں۔ تب یہ
دو خطوط

$$\frac{لا}{۲} (ج + عہ) + \frac{ما}{۲} (ج + بہ) = ج (عہ + بہ)$$

$$\text{اور } \frac{لا}{۲} (ج + عہ) + \frac{ما}{۲} (ج + بہ) = ج (عہ + بہ)$$

محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں گے اور اس لیے

$$\text{مس } \frac{1}{4} (\text{عہ + جہ}) = \text{مس } \frac{1}{4} (\text{جہ + ضہ})$$

$$\pi \omega = (\alpha + \beta) \frac{1}{4} + (\gamma + \delta) \frac{1}{4}$$

(۱). $\pi \cup 2 = ض + ج + ب + ع$

اب ایک ایسے نقطہ پر جہاں دائرہ

لا - ما + گ + لا + ف + ا + ج = .

ناقص کو قطع کرتا ہے خارج المرکز زاویہ شرط

وَجَمَّ طه + بَاب طه + ۲ گ + ۱ جم طه + ۲ ف ب ج طه + ج =
کو یو را کرتا ہے۔ پس

کو پورا کرتا ہے۔ پس

$$\{ (1 - \beta) \text{ حجم ط} + \text{رگ} + \text{حجم ط} + \text{ج} + \beta \} = \text{ف} \text{ یا اجبیاط}$$

$= \text{م ف ا} - \text{م ف ا} = \text{ج م ط}$

اس لیے $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)}$

اسی طرح جب عہ + جب بہ + جب جہ + جب فہ = $\frac{م ف ب}{ا ب}$

لیکن چونکہ $\pi = e + b + جہ + ضہ = ۲\pi$

اس لیے حجم ضہ = حجم (ع + ہ + جہ) اور جب ضہ = - جب (ع + ہ + جہ)
نیز دائرہ کا مرکز (- گ، - ف) ہے۔

نیز دائرہ کا مرکز (گ) - (ف) ہے۔

اس لیے اس دائرہ کے مرکز کے محدود نقطوں میں سے گذرتا ہے جن کے خارج المرکز زاویے عمود، مہاجہ ہیں

$$\left\{ (a+b+c) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\} \frac{1}{1} = 1$$

اور $6 = \frac{b_2 - b_1}{b_2 - b_1} \{ 3 \text{ جب } c - \text{جب } (c + b + a) \} \dots (b)$

حاصل ہوتے ہیں۔

مثال - ناقص $\frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} = ۱$ میں ایک متساوی الاضلاع

مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ متساوی الاضلاع مثلث کے مرکز ہندسی کا مرکز

$$لا (و + ۳ ب) = ما (ب + ۳ و) \quad (۱)$$

اگر مثلث کے راس ع، ب، ج ہیں تو مرکز ہندسی

$$۱ = و (جم ع + جم ب + جم ج)$$

$$۳ = ب (جب ع + جب ب + جب ج) \quad اور$$

سے حاصل ہوگا۔

اب ایک متساوی الاضلاع مثلث میں مرکز ہندسی کا مرکز پر منطبق

ہوتا ہے۔ اس لیے

$$و - لا = \frac{لا}{ب} ۳ - و = جم (ع + ب + ج)$$

$$ب - ما = \frac{ما}{و} ۳ - ب = جب (ع + ب + ج) \quad اور$$

مربع کرنا اور جمع کرنا

$$لا (و + ۳ ب) = ما (ب + ۳ و) \quad (۱)$$

۱۳۷ - مزدوج قطروں کو محاور قرار دیکر ان کے حوالے سے ناقص

کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ناقص کے محور اعظم اور محور اصغر کے حوالے سے اسکی مساوات

$$۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{و} \quad (۱)$$

ہے۔

چونکہ مبدا و اپنی جگہ پر قائم ہے اس لیے لا، ما کی بجائے شکل ل لا
+ م م، ل لا + م م کے جلوں کو درج کرنا ہوگا تاکہ استعمال شدہ مساوات
ماصل ہو [دفعہ ۵۱] -
اس لیے ناقص کی مساوات شکل

$$(۱) \quad ۲ = لا + ما + با = ۱ \dots \dots \dots (۲)$$

کی ہوگی۔

بموجب فرض محور لا، محور ما کے متوازی تمام دتروں کی تنصیف
کرتا ہے۔ اس لیے لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے (۲) سے محصلہ ما کی
دو قیمتیں مساوی اور مختلف العلاست ہونی چاہئیں۔ پس ۵ = ۰ اور
اس لیے ناقص کی مساوات شکل

$$(۳) \quad لا + با = ما = ۱ \dots \dots \dots (۳)$$

کی ہوگی۔

محوروں لا، ما پر مقطوعوں کے طول (ا، ب) معلوم کر نیکیے لیے
(۳) میں علی الترتیب ما = ۰ اور لا = ۰ رکھنا چاہئے چنانچہ
(ا = ۱ = با = ب)

پس مزدوج محوروں کے حوالے سے ایک ناقص کی مساوات

(۱۱)

$$۱ = \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲}$$

ہے جہاں ا، ب، نیم قطروں کے طول ہیں۔

۱۳۸۔ دفعہ سابق سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب ایک ناقص کی مساوات کو
مزدوج قطروں کے کسی زوج کے حوالے سے معلوم کیا جاتا ہے تو اس کی
شکل وہی ہوتی ہے جو محور اعظم اور محور اصغر کو محاور مان کر حاصل کی گئی تھی۔

یہ بھی مشاہدہ طلب ہے کہ دفعات ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۹ اور

۱۲۸ درست رہتے ہیں جبکہ محدوں کے محاور مزدوج قطعوں کے کوئی

زوج ہوں۔

$$م = \frac{ب^2}{ا} \quad [دفعہ ۱۲۸] \dots\dots\dots (۱)$$

لیکن

$$ن ت = م ا \quad اور \quad ن ت = م ا$$

$$\dots\dots\dots (۲)$$

$$ن ت \times ن ت = م م \quad (۱) سے$$

مثال ۳۔ ایک ناقص کے کسی دو قطروں کے سروں کو

ملانے والا خط ہمیشہ ایک ثابت دائرہ کو مس کرے گا اگر قطر باہم علی القوائم ہوں۔

فرض کرو کہ ج ف ج ق دو قطر ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔
فرض کرو کہ خط ف ق کی مساوات لاجم عہ + ماجب عہ = ع ہے۔
خط ج ف اور ج ق کی مساواتیں (دفعہ ۳۸)

$$\dots\dots\dots (۱) \quad \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ق} = \frac{لاجم عہ + ماجب عہ}{ع}$$

ہوگی۔

لیکن چونکہ خط ج ف اور ج ق باہم علی القوائم ہیں اس لیے (۱) میں لا اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہے [دفعہ ۳۶]۔

(۱۴۴)

$$\frac{ا}{ع} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ق}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکز سے خط ف ق کا عمودی فاصلہ مستقل ہے۔
اس لیے خط ف ق ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے۔

مثال ۴۔ ایک ناقص کے عمادی وتروں کے قطبیوں کا

طریق معلوم کرو۔

کسی نقطہ طہ پر کے عماد کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots 'ا - ب = \frac{ب}{ب} - \frac{ا}{ب} = \frac{ب - ا}{ب}$$

ہے۔ کسی نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات

$$(۲) \dots\dots\dots 'ا = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

ہے۔ مساواتیں (۱) اور (۲) ایک ہی خط کو تعبیر کریں اگر

$$(ا - ب) = \frac{لا}{ب} = \frac{ا}{ب} \text{ اور } (ا - ب) = \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} - \frac{ب}{ب} = - \frac{ب - ا}{ب}$$

$$\text{یا } (ا - ب) = \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} \text{ اور } (ا - ب) = \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} - \frac{ب}{ب} = - \frac{ب - ا}{ب}$$

اس لیے ان دو آخری مساواتوں کا مرجع لینے اور جمع کرنے سے

$$(ا - ب) = \frac{ا}{ب} + \frac{ب}{ب}$$

اور اس لیے طریق کی مساوات

$$لا (ا - ب) = ا + ب$$

۴۔

مثال ۵۔ اگر ایک ناقص کے گرد ایک ذواربعتہ الافلاک

کھینچا جائے تو اس کے وتروں کے نقاط وسطی میں سے گذر نیوالا

خط ناقص کے مرکز میں سے گذرے گا۔

فرض کرو کہ ماسوں کے چار نقاط تماس کے خارج المرکز زاویے عہ، ب،

ج، د ہیں۔

نقطہ عہ، ب کے ماسوں کی مساواتیں

$$\frac{1}{a} \text{ جم } + \frac{1}{b} \text{ جب } = 1 \text{ اور } \frac{1}{a} \text{ جم } + \frac{1}{b} \text{ جب } = 1$$

ہیں۔ یہ حماس نقطہ

$$\left(\frac{1}{a} \text{ جم } + \frac{1}{b} \text{ جب } \right) \div \left(\frac{1}{a} \text{ جم } + \frac{1}{b} \text{ جب } \right)$$

پر ملتے ہیں۔ اسی طرح جب اور ضہ پر کے حماس نقطہ

$$\left(\frac{1}{a} \text{ جم } + \frac{1}{b} \text{ جب } \right) \div \left(\frac{1}{a} \text{ جم } + \frac{1}{b} \text{ جب } \right)$$

پر ملیں گے۔

اس خط کے نقطہ وسطی کے محدود جہان نقاط تقاطع کو ملاتا ہے

(۱۷۵)

$$\frac{1}{a} \text{ جم } + \frac{1}{b} \text{ جب } + \frac{1}{c} \text{ جم } + \frac{1}{d} \text{ جب } = 1$$

$$\frac{1}{a} \text{ جم } + \frac{1}{b} \text{ جب } + \frac{1}{c} \text{ جم } + \frac{1}{d} \text{ جب } = 1$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس لیے وہ خط جو اس نقطہ کو ناقص کے مرکز سے ملاتا ہے محور اعظم کے ساتھ

ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا حماس

$$\frac{1}{a} \text{ جم } + \frac{1}{b} \text{ جب } + \frac{1}{c} \text{ جم } + \frac{1}{d} \text{ جب } = 1$$

ہے اور یہ

$$\frac{1}{a} \text{ جم } + \frac{1}{b} \text{ جب } + \frac{1}{c} \text{ جم } + \frac{1}{d} \text{ جب } = 1$$

کے مساوی ہے جہاں $2s = a + b + c + d$ ۔

اوپر کے نتیجہ کے تشاکل سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ وہ خط جو ناقص کے مرکز کو

ذو اربعۃ الاضلاع کے دتروں میں سے ایک کے نقطہ وسطی سے ملاتا ہے دوسرے

دو دوتروں کے نقاط وسطی میں سے بھی گذرتا ہے۔ اس سے نیوٹن کا یہ مسئلہ ثابت ہوتا ہے: اگر ایک ناقص ایک ذواربعۃ الاضلاع کے ضلعوں کو مس کرے تو اس کا مرکز اس خط پر ہوتا ہے جو دوتروں کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے۔ [نیز دیکھو صفحات ۲۱۹ اور ۲۲۲]

مثال ۶۔ ف ق مرا ایک مثلث ہے جو دائرہ لائے ما۔ ر میں بنایا گیا ہے۔ اضلاع ف ق، ق، ف مرا علی الترتیب نقطوں (ب، ج، ا) میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق مرا، مخروطی لا + ما (ر - ب ج) (ا - ب) (ا - ج) کو مس کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ق، ق، ق کے محدد علی الترتیب (اوجم طہ، اوجب طہ) وغیرہ ہیں۔

ف ق کی مساوات

لاجم $\frac{1}{2}$ (طہ + طہ) + ما جب $\frac{1}{2}$ (طہ + طہ) = اوجم $\frac{1}{2}$ (طہ - طہ)

ہے۔ مس $\frac{1}{2}$ طہ وغیرہ کی بجائے م، وغیرہ کہنے سے

$$\frac{ب}{ا} = \frac{جم \frac{1}{2} (طہ - طہ)}{جم \frac{1}{2} (طہ + طہ)} = \frac{ا + م، ا، م}{ا - م، ا، م}$$

$$\frac{ا + م، ا، م}{ا - م، ا، م} = \frac{ج}{ا} \quad \text{اسی طرح}$$

پس م، ا، م (ا + ب) + (ا - ب) = ۰ اور م، ا، م (ا + ج) + (ا - ج) = ۰

$$\frac{m}{2} = (1+j)(1-b) \setminus (1-j)(1+b) = \dots (1)$$

اب ق سر کی مساوات

$$\frac{1}{p} (p + p) + \frac{1}{p} (p + p) = \frac{1}{p} (p + p) = \frac{1}{p} (p + p)$$

$$\text{یعنی } 1 - 1 + (1 + 1) m - m = (m + m) = 0$$

ہے۔ اس لیے (۱) سے

$$0 = (1 - 1) + (1 + 1) m - m = m(1 + 1) = 2m$$

جس کا لغاف، m کی مختلف قیمتوں کے لیے،

$$m(1 + 1) = (1 - 1) = 0$$

$$\text{ہے جہاں } 1 = (1 + 1)(1 - 1) \setminus (1 - 1)(1 + 1)$$

چھٹے باب پر مثالیں

۱۔ اگر ایک ناقص (مرکز ج) کے نقطہ ن کے ماسکی فاصلے میں ن
میں ن ہوں اور ج د وہ نیم قطر ہو جو ج ن کا فردوج ہے تو ثابت کرو کہ
میں ن \times میں ن = ج د

۲۔ ایک ناقص کے نقطہ ن پر کا ماس (پہرے کے ماس سے جہاں
(محور ج) کا ایک سرا ہے نقطہ ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج ما
ن کے متوازی ہے جہاں ج ناقص کا مرکز ہے۔

۳۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو متقاطع خطوط مستقیم سے
اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق
ایک ناقص ہے۔ نیز فردوج مرکز کو خطوط کے درمیانی زاوے کی رقوم میں معلوم کرو۔

۴۔ ایک ناقص پر دو ثابت نقطے ف، ق ہیں اور اس پر سر کوئی
اور نقطہ ہے۔ ف، ق کے نقاط وسطی ط، ط ہیں اور ط، ط کے

علی الترتیب ف م ا ق م پر عمود ہیں اور وہ محمد سے م گ ہلتے ہیں۔
ثابت کرو کہ م گ م گ مستقل ہے۔

۵۔ ناقصوں کا ایک سلسلہ معلومہ ماسکہ اور متناظر مرتب کے ساتھ
کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے محاورہ اصغر کے سروں کا طریق ایک مکافی ہے۔

۶۔ ایک ناقص کا ایک دوہرا معین ن ل ن ہے اور ق ناقص
کوئی نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ق ن ق ن محور اصغر سے علی الترتیب م
م پر ملیں تو ج م م ج م = ج م ج م۔

۷۔ ایک ناقص کے ماسکوں میں سے گزرتے ہوئے خطوط کھینچے گئے
ہیں جو علی الترتیب فردوج قطروں کے ایک زوج پر عمود ہیں اور ق پر متقاطع
ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ہم مرکز ناقص ہے۔

۸۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا ماس مساوی فردوج قطروں کو
ت ت پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلثوں ت ج ن اور ت ج ن
میں نسبت ج ت : ج ت ہے۔

۹۔ اگر ج ق ن پر کے محاورہ فردوج ہو تو ج ن ق پر کے
محاورہ فردوج ہوگا۔

۱۰۔ اگر ایک ناقص کے فردوج قطروں کے سرے ن د ہوں اور
ن ن د د وہ وتر ہوں جو ناقص کے ایک محور کے متوازی ہیں تو ثابت کرو کہ
ن د ن د مساوی فردوج قطروں کے متوازی ہیں۔

۱۱۔ اگر فردوج قطروں کے سرے ن د ہوں اور ن پر کا ماس
محور اعظم کو ت پر اور د پر کا ماس محور اصغر کو ت پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ
ت ت مساوی فردوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے۔

۱۲۔ ایک ناقص کا کوئی وتر ق ق ہے جو ایک مساوی فردوج قطر کے
متوازی ہے۔ ق ق پر کے ماس ت پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ دائرہ
ق ت ق مرکز میں سے گزرتا ہے۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص میں کسی نقطہ پر کا محاورہ عمودوں کا جو تھا

تساہی ہے جو مرکز سے اور دو ماسکوں سے ماس پر کھینچے گئے ہوں۔
۱۴۔ ایک ناقص کے دو فرد وج قطر کھینچے گئے ہیں اور ان کے چار سروں
ایک معلوم دائرہ کے کسی نقطہ سے ملا لیا ہے۔ دائرہ کا مرکز ناقص کے مرکز پر ہے۔ ثابت
کر دو کہ ان چار خطوں کے طولوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔

۱۵۔ ایک ناقص کا ایک دو ہر معین N L N ہے، ناقص کا مرکز
ج ہے اور N پر کا عمار J N سے وپر ملتا ہے۔ ثابت کر دو کہ و کا باقی ایک
ناقص ہے۔

۱۶۔ اگر کسی نقطہ N پر کا عمار محور اعظم کو گ پر قطع کرے تو ثابت کر دو کہ
 N کے مختلف محلوں کے لیے N گ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک قطع ناقص ہے۔
۱۷۔ ایک ناقص کے راس A A ہیں اور اس پر کوئی نقطہ N ہے۔
ثابت کر دو کہ اگر N A N پر عمود ہو اور N A N پر عمود ہو جہاں A اور
 N A N پر ہیں تو N ناقص کے وتر خاص کے مساوی ہے۔

۱۸۔ ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کر جس سے ایک
ناقص کے دو ماس جو محور اعظم کے ساتھ زاویہ طہ، طہ بنائیں کھینچے جاسکیں
اور (۱) مس طہ مس طہ مستقل ہو (۲) مم طہ + مم طہ مستقل ہو (۳) مس طہ
مس طہ مستقل ہو۔

۱۹۔ ایک ناقص کے کسی دو قطروں کے دو سروں کو طانیو الا خط
اس خط کے متوازی یا فرد وج ہوتا ہے جو ان کے فرد وج قطروں کے دو سروں
ملا تا ہے۔

۲۰۔ اگر ایک ناقص کے فرد وج قطروں کے سر سے N اور D ہوں تو

(۱۷۸)

ثابت کر دو کہ N اور D پر کے ماس ناقص $\frac{1}{r} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$ پر ملتے ہیں اور

N کے نقطہ وسطی کا طریق $\frac{1}{r} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$ ہے۔

۲۱۔ ایک خط کھینچا گیا ہے جو ایک ناقص کے محور اصغر کے متوازی ہے

ہے جہاں ف، ق، ر، ناقص کے اُن قطروں کے طول ہیں جو مثلث کے ضلعوں کے متوازی ہیں اور ناقص کے نیم محور ا، ب میں۔

۲۷۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ ن سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو ماسکوں میں، ہ میں سے گذرتے ہیں اور متناظر مرتبہ کو ق، ر پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق، ہ اور ر میں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔

(۱۷۹)

۲۸۔ اگر ایک ناقص (مرکز ج) اور اس کے اعدادی دائرے پر ن، ن متناظر نقطے ہوں اور اگر ج ن کو خارج کیا جائے اور وہ اعدادی دائرہ سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ق کے متناظر ناقص کے نقطہ ق پر کاماس، ج ن پر عمود ہے اور وہ ج ن سے، ج ن کے مساوی طول قطع کرتا ہے۔

۲۹۔ اگر ایک ناقص کے دو عمود دار ماسوں کے نقاط ماس ف، ق ہوں اور اعدادی دائرہ پر متناظر نقطے ف، ق ہوں تو ثابت کرو کہ ج ف، ج ق، ناقص کے فردوج قطر ہیں۔

۳۰۔ دو ہم مرکز دائروں کے مرکز ج سے دو نصف قطر ج ق، ج ق کھینچے گئے ہیں جو ایک ثابت خط مستقیم سے مساوی المیلان ہیں، پہلا نصف قطر بیرونی دائرہ کا ہے اور دوسرا اندرونی دائرہ کا۔ ثابت کرو کہ (۱) ق ق کے نقطہ وسطی ن کا طریق ایک ناقص ہے، (۲) ن ق اس ناقص کے نقطہ ن پر کاما ہے، اور (۳) ق ق اس قطر کے مساوی ہے جو ج ن کا فردوج ہے۔

۳۱۔ اگر ایک ناقص کے دو نقطوں کے خارج المکز ز او یوں کا فرق سے ہو اور ان نقطوں پر کے ماس باہم علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ ا، ب جب سے لے جہاں ل، م، وہ نیم قطر ہیں جو ان نقطوں پر کے ماسوں کے متوازی ہیں اور ناقص کے نیم محور ا، ب میں۔

۳۲۔ دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس سے دائروں کے ماس کھینچے جائیں تو ان کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ اگر دو فردوج قطروں میں سے ہر ایک کے دو سرروں سے

ناقص کے کسی تماس پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ اس عمود کے مربع کے مساوی ہوگا جو مرکز سے تماس پر کھینچا جائے۔

۳۴۔ ایک ناقص (مرکز ج) کے کسی نقطہ ن کے عماد پر ایک نقطہ ق ایسا ہے کہ خطوط ج ن، ج ق، ناقص کے محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق، اس قطر کے متناسب ہے جو ج ن کا مزدوج ہے۔

۳۵۔ اگر ایک مخروطی کے تماسوں کا ایک زوج یا ہم علی القوائم ہو (۱۸۰) اور وتر تماس پر مرکز سے اور تماسوں کے نقطہ تقاطع سے عمود کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

۳۶۔ ایک ناقص پر دو علی القوائم تماس کھینچے گئے ہیں۔ وتر تماس کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔

۳۷۔ اگر ایک ناقص پر کوئی نقطہ ن ہو اور کوئی وتر ن ق، ج کے مزدوج قطر کو س پر قطع کرے تو ن ق \times ن س، ن ق کے متوازی قطر کے مربع کا نصف ہوگا۔

۳۸۔ ایک ناقص کے ان تمام وتروں کے نقاط وسطی کا طریق معلوم کرو جو مستقل طول کے ہیں۔

۳۹۔ اگر ایک ناقص میں بنائے ہوئے ذوار بعتہ الاضلاع کے تین ضلع علی الترتیب تین دے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ چوتھا ضلع بھی ایک ثابت خط مستقیم کے متوازی ہوگا۔

۴۰۔ اگر ایک کثیر الاضلاع کو ایک ناقص میں بنایا جائے اور اس کے تمام ضلع الا ایک کے دے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو اگر ضلعوں کی تعداد جفت ہے تو بقیہ ضلع ایک معلومہ خط مستقیم کے متوازی ہوگا لیکن اگر ضلعوں کی تعداد طاق ہے تو بقیہ ضلع ایک ناقص کو لنگ کرے گا۔

۴۱۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ایک ناقص کے قطروں کے کسی زوج کے سروں پر کے تماسوں سے بنتا ہے اس متوازی الاضلاع کے رقبہ کے بالعکس متناسب ہوتا ہے جو نقاط تماس کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔

۴۲۔ اگر ایک ناقص کے کسی دو قطروں ج ن، ج ق کے بیروں ن، ق پر دو تماس ن ن، ق ق کھینچے جائیں اور وہ ایک دوسرے کو ت پر اور محدودہ قطروں کو ن اور ق پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ مثلثوں ت ق ن، ت ن ق کے رقبے مساوی ہیں۔

۴۳۔ ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب} = ۱$ کے دو تماس ون، وق نقطہ سے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ج ن ق کا رقبہ

$$\frac{وا ب^۲ + با ب^۲ + وک^۲ - و ب^۲}{با ب^۲ + وک^۲}$$

اور ذواربعۃ الاضلاع ون ج ق کا رقبہ

$$= \frac{۱}{۲} (وا ب^۲ + وک^۲ - و ب^۲)$$

ہے جہاں ناقص کا مرکز ج ہے اور و کے محدود (ک) ہیں۔

۴۴۔ ایک ناقص کے تماس ت ن، ت ق ہیں اور اس کا مرکز ج ہے ثابت کرو کہ ذواربعۃ الاضلاع ج ن ت ق کا رقبہ $= \frac{۱}{۲} (ب س^۲ - ف د^۲)$ (۱۸۱) جہاں ناقص کے نیم محور وا ب ہیں اور ن، ق کے خارج المركز زاویہ ف د ہیں۔

۴۵۔ ایک ناقص کا ایک قطر ن ج ہے اور امدادی دائرہ کا متناظر قطری ج ق ہے۔ ثابت کرو کہ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ن، ن، ق، ق پر کے تماسوں سے بنتا ہے $\frac{۸ وا ب}{(وا ب - جب ف د)}$ ہے جہاں ف د، ن کا خارج المركز زاویہ ہے۔

۴۶۔ ایک متوازی الاضلاع کو ایک دائرہ کے گرد کھینچا گیا ہے اور اس کے دو اس ثابت خطوط مستقیم پر ہیں جو ایک دوسرے کے متوازی اور مرکز سے مساوی

فاصلہ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے دور اس ایک ناقص پر ہیں جس کا امدادی
صغیر دائرہ متوازی الاضلاع کا مائٹہ دائرہ ہے۔

۴۷۔ ایک ناقص کے دو ثابت فردوج قطروں کو دو خطوط مستقیم و ن
وق جو ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرتے ہیں اور فردوج قطروں کے کسی دوسرے
زمرہ کے متوازی ہیں علی الترتیب نقطوں ن، ق پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت
کرو کہ ن ق کے وسطی نقطہ کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۴۸۔ اگر ایک ناقص کے مستوی میں و کوئی نقطہ ہو اور اس سے
ساوی فردوج قطروں پر عمود و م، و ل کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع
م و ل ن کے وتر کی سمت و ن، و کے قطبی پر عمود ہوگی۔

۴۹۔ ایک ناقص پر جس کا مرکز ج ہے تین نقطے ۱، ۲، ۳ لے گئے
ہیں۔ نقطہ ن میں سے دو خطوط مستقیم نقطوں ۱ اور ۲ پر کے ماسوں کے
متوازی کھینچے گئے ہیں جو ج ب اور ج ۱ سے علی الترتیب ق اور س پر
ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق س، ن پر کے ماس کے متوازی ہے۔

۵۰۔ ایک ناقص کے دو نقطوں پر کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق
معلوم کرو جبکہ نقطے فردوج قطروں کے سرے ہوں۔

۵۱۔ ایک ناقص کے ایک وتر کے سروں پر جو مساوی فردوج قطروں
میں سے ایک کے متوازی ہے عماد کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ عماد ایک قطر
مقاطع ہوتے ہیں جو دوسرے مساوی فردوج قطر پر عمود ہے۔

۵۲۔ اگر ایک ناقص کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر عماد کھینچے جائیں تو
وہ خط جو ان کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے اور محور یا عظم کے متوازی ہے
وتر کی تصغیف کرے گا۔

۵۳۔ اگر ایک ناقص (مرکز ج) کے کسی نقطہ ن پر کے عماد میں طول
ن ق، اس نیم قطر کے مساوی قطع کیا جائے جو ج ن کا فردوج ہے تو ثابت کرو کہ
ق، دو دائروں میں سے ایک یا دوسرے پر ہے۔

۵۴۔ نقطہ (لا، نا) سے ناقص $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ کے ماس کھینچے

گئے ہیں۔ اگر ان ماسوں کا درمیانی زاویہ فہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}) = \frac{1}{d} \quad (1)$$

۵۵۔ ت ن ت ق وہ ماس ہیں جو ایک بیرونی نقطہ (لا' ما)

سے ناقص $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ کے کھینچے گئے ہیں۔ اگر ایک ماسکہ میں ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

۵۶۔ نقطہ ت سے ایک ناقص $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ کے دو ماس

کھینچے گئے ہیں اور یہ ماس زاویہ فہ پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ س ت x ج ت ج فہ = ج ت ا۔ و ب جہاں ج مرکز اور س' ہ ماسکے میں ۵۷۔ اگر ایک ناقص کے مرکز ج سے کسی نقطہ ن پر کے ماس پر عمود کھینچا جائے اور یہ عمود ماسکی فاصلہ میں ن سے (ممدودہ ضرورت) سا پر ملے تو اس کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔

۵۸۔ اگر دو ہم مرکز ناقص ایسے ہوں کہ ایک کے ماسکے دوسرے پر واقع ہوں اور اگر ان کے خروج الم مرکز ز' ز' ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے محاور

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \quad (2)$$

۵۹۔ ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو ناقص کے ایک قطر کے محاذی

محور اعظم کے کسی ایک سرے پر بنتا ہے اس زاویہ کا متکم ہوتا ہے جو مزدوج قطر کے محاذی محور اصغر کے سرے پر بنتا ہے۔

۶۰۔ اگر ناقص کے مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سرے پر

محرمی کے محاذی زاویے طہ طہ نہیں تو ثابت کرو کہ مم طہ + مم طہ مستقل ہے۔

۶۱۔ اگر ایک ناقص کے ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کے محاذی مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سروں پر زاویے طہ طہ نہیں تو ثابت کرو کہ مس طہ + مس طہ مستقل ہے۔

۶۲۔ اگر نہ کہ وہ زاویے ہوں جو کسی دو مزدوج قطروں کے محاذی ناقص کے کسی ثابت نقطہ پر بنتے ہیں تو ثابت کرو کہ مم لہ + مم لہ مستقل ہے۔
۶۳۔ ثابت کرو کہ ناقص کے مزدوج قطروں کے زوج کسی خط مستقیم سے درپیش میں منقطع ہوتے ہیں۔

۶۴۔ ایک دائرہ ناقص $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} =$ کو ثابت نقطہ (عہ) پر

اور ناقص کے ایک قطر کے سروں پر قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ناقص $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} = (وا - با) (عہ لا - عہ ما) =$ ہے۔

۶۵۔ $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} =$ کے چار نقطوں پر کے عماد نقطہ (عہ) پر

پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان چار نقطوں کا اوسط محل

$$\left\{ \frac{1}{پ} \frac{وا}{وا} \mid (وا - با) \mid \frac{1}{پ} \frac{ما}{با} \mid (با - وا) \right\}$$

ہے۔

۶۶۔ ایک ناقص پر چار ثابت نقطے (ب ج د) ہیں اور اس پر

ن کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ن سے (ب اور ج د) ب ج اور د پر عمود کھینچے جائیں تو (ب اور ج د) پر کے عمودوں کا حاصل ضرب (ب ج اور د) پر کے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے۔

۶۷۔ ایک ناقص کے دو عماد ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۶۸۔ ایک ناقص کے ایک ماسکی وتر کے ایک سرے پر ماس کھینچا گیا ہے

اور دوسرے سرے پر عماد کھینچا گیا ہے۔ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔
۶۹۔ ایک ناقص کے محور اعظم کے متوازی دو خطوط مستقیم، محور اعظم

فاصلہ $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}$ پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوط کے درمیان کسی ماس کا

مقطعہ نقطہ تماس پر دو حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن کے محاذی مرکز پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

۷۰۔ ایک ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد ن گ ہے جہاں گ محور اعظم میں ہے۔ ن گ کو باہر وارقی تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ن ق = گ ن۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ناقص ہے جس کا خرم مرکز $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}$ ہے۔

نیز ن اور ق پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔
۷۱۔ ایک ناقص کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی پرن سے عمود کھینچا گیا ہے جو محور اعظم کو گ پر قطع کرتا ہے۔ گ کو مرکز مان کر کوئی دائرہ کھینچا گیا ہے جو ناقص کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ان دو متوازی خطوں سے جو چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں مساوی فاصلہ پر ہے۔

۷۲۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ناقص $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$ کا وتر

$$\frac{a}{b} \text{ جم } \frac{1}{4} (\text{طم} + \text{طم}) + \frac{a}{b} \text{ جب } \frac{1}{4} (\text{طم} + \text{طم}) - \text{جم } \frac{1}{4} (\text{طم} - \text{طم}) = 0$$

ہے ناقص کو دوسرے دو نقطوں پر قطع کرتا ہے جنکو ملائیں والاظ

$$\frac{a}{b} \text{ جم } \frac{1}{4} (\text{طم} + \text{طم}) - \frac{a}{b} \text{ جب } \frac{1}{4} (\text{طم} + \text{طم}) - \frac{a}{b} \text{ جم } \frac{1}{4} (\text{طم} - \text{طم}) = 0$$

۷۳۔

$$۷۳۔ ثابت کرو کہ مخروطیوں $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$ اور $\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}$$$

میں سے کسی ایک کا محاس ناقص $\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} - 1 = 0$ سے ایسے دو نقطوں پر
 بیٹھا جن پر کے محاس مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں گے۔
 ۴۷۔ ایک متوازی الاضلاع کو ناقص

$$0 = 1 - \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2}$$

کے گرد کھینچا گیا ہے اور اس کے دور اس خطوط $a^2 = 0$ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ
 اس کے دوسرے دور اس مخروطی

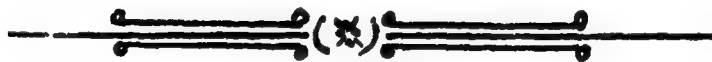
$$0 = 1 - \frac{(a^2 - 1)}{a^2} + \frac{b^2}{b^2}$$

پر ہیں۔

۴۵۔ ایک مثلث کے ضلع دائرہ $a^2 + b^2 = 0$ کو مس کرتے ہیں
 اور اس کے دور اس خطوط $a^2 = 0$ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ میسرے اس کا
 طریق

$$0 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

۴۶۔



ساتوان با

قطع زائد

تعریف - قطع زائد ایک نقطہ کا طریق ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ (جس کو ماسکہ کہتے ہیں) سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خط (جس کو مرتب کہتے ہیں) سے اُس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے جو اکائی سے بڑی ہوتی ہے۔

۱۴۰۔ زائد کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ α ماسکہ اور β سے α مرتب ہے۔

α سے β کو مرتب پر عمود کھینچو۔

α سے β کو α پر اس طرح تقسیم کرو کہ $\alpha : \beta = 1 : 2$ دی ہوئی

نسبت $= 1 : 2$ اتب α منحنی پر کا ایک نقطہ ہے۔

نیز α سے محدودہ میں ایک نقطہ γ ہو گا ایسا کہ

$\alpha : \beta = 1 : 2$

فرض کرو کہ γ کا نقطہ وسطی ج ہے اور $\alpha : \beta = 1 : 2$ اتب

$\alpha : \beta = 1 : 2$ اور $\alpha : \beta = 1 : 2$ سے γ

$\alpha : \beta = 1 : 2$ اور $\alpha : \beta = 1 : 2$ سے γ

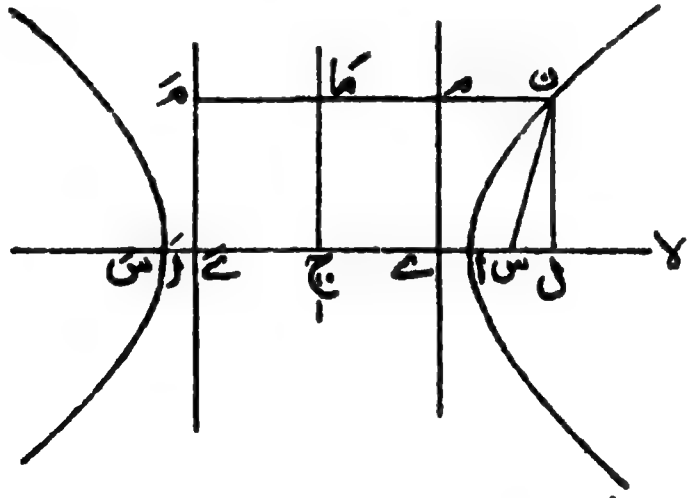
$\alpha : \beta = 1 : 2$ اور $\alpha : \beta = 1 : 2$ سے γ

ج س = لز' (۱)

نیز
یا
س ا - س ل = ز (ے ا - اے)
ا ا = ز (ا ا - اے)
ج ا ج = ز ے ج

ج ے = $\frac{ا}{ز}$ (۲)

اب فرض کرو کہ ج مبداء ہے، ج ا محور لا اور اس کے عمود وار (۱۸۶)
خط محور ما -
فرض کرو کہ منحنی کا کوئی نقطہ ن ہے اور اس کے محدود (لا نا) ہیں۔



تب شکل میں

س ن = ز ن ما
س ل + ل ن = ز ے ل
س ل = ج ل - ج س = لا - لز
ے ل = ج ل - ج ے = لا - $\frac{ا}{ز}$

اب
اور

$$: (لا - ز) + م = ز (لا - \frac{1}{ز})$$

$$یا م + لا (ا - ز) = لا (ا - ز)$$

$$یا م = \frac{لا}{(ا - ز)} + \frac{لا}{(ا - ز)} \dots (۳)$$

چونکہ ز اکائی سے بڑا ہے اس لیے لا (ا - ز) منفی ہے۔ اگر ہم لا (ا - ز) کی بجائے - با رکھیں تو مساوات غلط

$$(۴) \dots \dots \dots م = \frac{لا}{ب} - \frac{لا}{ب}$$

انتخاب کرتی ہے۔

وتر خاص وہ وتر ہے جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہوتا ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے ہمیں مساوات (۴) میں لا = ز رکھنا چاہئے چنانچہ

$$م = ب (ا - ز) = \frac{ب}{ب} کیونکہ ب = لا (ا - ز)$$

پس نیم وتر خاص کا طول $\frac{ب}{ب}$ ہے۔

۱۴۱۔ مساوات (۴) (دفعہ ۱۴) میں لا، و سے کم نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو م منفی ہوگا۔ اس لیے منفی کا کوئی حصہ لا = - و اور لا = و کے درمیان واقع نہیں ہے۔

اگر لا < و تو م مثبت ہوگا اور م کی کسی مخصوص قیمت کیلئے لا کی دو مساوی مگر مختلف علامت قیمتیں ہوں گی۔ اس لیے محور م منفی دو متشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر محور لا پر نقطے م سے ایسے لیے جائیں کہ ج م = س ج اور ج م = س ج تو نقطہ م بھی منفی کا ماسکہ ہوگا اور وہ خط جو م سے

(۱۸۴)

گذرتے ہوئے ج سے پر عمود ہو متناظر مرتب ہوگا۔
 اگر منحنی پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (لا، ما) بھی منحنی پر ہوگا۔ لیکن نقطے (لا، ما) اور (لا، ما) ایک ایسے خط پر ہیں جو مبدا میں سے گذرتا ہے اور نیزہ نقطے مبدا سے مساوی فاصلوں پر ہیں۔ اس لیے مبدا ہر اس وتر کی تقصیف کرتا ہے جو اس میں گذرتا ہے اور اس لیے اس کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں۔

مساوات (۴) دفعہ ۱۴۰ سے ظاہر ہے کہ اگر $لا < لا$ تو ثابت ہوگا اور جیسے لا بڑھے گا ما بھی بڑھے گا اور لا اور ما کے اس اضافہ کی کوئی حد نہیں ہے۔ پس منحنی کچھ ایسا ہے جو دفعہ ۱۴۰ کے نقشہ میں دکھایا گیا ہے اور وہ دو لامتناہی شاخوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

۱۔ کو زائد کا قاطع محور کہتے ہیں۔ وہ خط جو ج میں سے

گذرتے ہوئے ۱ (پر عمود ہے منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا، لیکن اگر اس خط پر ب، ب ایسے نقطے ہوں کہ $ج = ج = ب = ب$ تو خط ب ب کو فردوج محور کہتے ہیں۔

(۱۸۸)

۱۴۲۔ زائد پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلے معلوم کرنا۔

دفعہ ۱۴۰ کی شکل میں چونکہ $سن = ز = ن$ اس لیے

$سن = ز = ل = ز (ج ل - ج ع) = ز (لا - لا) = ز لا - لا$

نیز $سن = ز = ن = ز (ج ل + ج ع) = ز (لا + لا) = ز لا + لا$

۱۴۳۔ زائد کی قطبی مساوات مرکز کو قطب قرار دیکر اس طرح معلوم

کیا جاسکتی ہے کہ لاکی بجائے رجم طہ اور ماکی بجائے رجب طہ درج کیا جائے۔ چنانچہ $\frac{لا^۱}{وا} - \frac{ب^۱}{ب} = ۱$ میں اندراج کرنے سے

$$\frac{ر^۱}{وا} - \frac{ر^۱}{ب} = ۱$$

یا $\frac{ر^۱}{وا} - \frac{ر^۱}{ب} = ۱$ (۱)

ماصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو شکل

(۲) $\frac{ر^۱}{وا} = \frac{ر^۱}{ب} + ۱$ جب طہ $\frac{ر^۱}{وا} = \frac{ر^۱}{ب} + ۱$ (۲)

میں لکھا جاسکتا ہے۔

مساوات (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ طہ صفر ہو تو $\frac{ر^۱}{وا} = ۱$ بڑے سے بڑا ہوتا ہے یعنی رقم سے کم جیسے جیسے طہ بڑھتا ہے $\frac{ر^۱}{وا}$ گھٹتا ہے اور صفر

ہوتا ہے جبکہ جب طہ $\frac{ر^۱}{وا} = ۱$ اس لیے طہ کی اس قیمت کے لیے

ر لا متناہی ہے۔ اگر جب طہ $\frac{ر^۱}{وا} < ۱$ تو $\frac{ر^۱}{وا} - ۱$ منفی ہوگا اور اس لیے

وہ سمتی نیم قطر جو محور کے ساتھ جب $\frac{ب}{وا + ب}$ سے بڑا زاویہ بناتا ہے منحنی

سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا۔

(۱۸۹) ۱۴۴۔ پچھلے باب کے بہت سے نتیجے زائد کے لیے بھی درست ہیں اور جو ثبوت وہاں دئے گئے ہیں ان میں صرف ب کی علامت کو بدلتے کی ضرورت ہے۔ اس لیے ہم صرف ان نتیجوں کو بیان کریں گے۔

فرض کرو کہ زائد کی مساوات

$$1 = \frac{لا}{وا} - \frac{ما}{ب}$$

ہے۔

(۱) خط ما = م لا + وا م - ب م کی تمام قیمتوں کے لیے
ماس ہے [دفعہ ۱۱۴]

(۲) (لا، ما) پر کے ماس کی مساوات

$$1 = \frac{لا}{وا} - \frac{ما}{ب} \quad \text{ہے [دفعہ ۱۱۵]}$$

(۳) (لا، ما) کے قطبی کی مساوات

$$1 = \frac{لا}{وا} - \frac{ما}{ب} \quad \text{ہے [دفعہ ۱۱۹]}$$

(۴) (لا، ما) پر کے عماد کی مساوات

$$\frac{لا - لا}{وا} = \frac{ما - ما}{ب} \quad \text{ہے [دفعہ ۱۱۷]}$$

(۵) خط ل لا + م ما - ن = . منحنی کو مس کرے گا اگر وا ل

- ب م = ن [دفعہ ۱۱۶]

(۶) خط لا جم عہ + ما جب عہ = ع منحنی کو مس کرے گا اگر

ع = وا جم عہ - ب جب عہ [دفعہ ۱۱۶]

(۷) زائد کے مرتب دائرہ کی مساوات لا + ما = وا - ب ہے [دفعہ ۱۲۱]

مرتب دائرہ صریحاً خیالی ہوگا جبکہ $ا > ب$ اور ایک نقطہ میں تحول

ہوگا جبکہ $ا = ب$

(۸) وہ ہندسی مسائل جو دفعہ ۱۲۶ میں ثابت کئے گئے ہیں زائد کیلئے

بھی درست ہیں۔

(۹) زائد کے ان تمام دتروں کے نقاط وسطی کا طریق جو $ما = م$ لا کے

$$\text{توازنی ہوں خط مستقیم } ما = م \text{ لا ہے جہاں } م = م = \frac{ب^2}{ا} \text{ [دفعہ ۱۲۸]}$$

(۱۰) — خطوط $ما = م$ لا $ما = م$ لا مزدون ہیں اگر

$$م = م = \frac{ب^2}{ا}$$

یہ دو قطر منحنی سے ان نقطوں پر ملتے ہیں جن کے فصلے مساواتوں

$$لا = \left(\frac{ا}{ب} - \frac{ب}{ا} \right) = ۱ \text{ اور } لا = \left(\frac{ا}{ب} - \frac{ب}{ا} \right) = ۱$$

سے حاصل ہوتے ہیں
پہلی مساوات سے لا کی حقیقی قیمتیں ملیں گی اگر $ا > \frac{ب^2}{ا}$

دوسری مساوات سے حقیقی قیمتیں ملیں گی اگر $م > \frac{ب^2}{ا}$ لیکن چونکہ $م = م$

$$= \frac{ب^2}{ا} \text{ اس لیے } م \text{ اور } م \text{ دونوں } \frac{ب^2}{ا} \text{ سے کم نہیں ہو سکتے اور یہ دونوں}$$

$\frac{ب^2}{ا}$ سے بڑے ہو سکتے ہیں۔

اس لیے زائد کے دو مزدوج قطروں میں سے ایک اس سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے اور دوسرا اس سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔

$$\text{یہ دو مزدوج قطر منطبق ہونگے اگر } م = \pm \frac{ب^2}{ا}$$

۱۲۶ — فرض کرو کہ مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سرے $ن$ و $د$ ہیں۔ فرض کرو کہ $ن$ کے محدود $لا$ ، $ما$ اور $د$ کے محدود $لا$ ، $ما$ ہیں۔ دفعہ ۱۲۵ کی روش سے اگر ان میں سے ایک نقطہ حقیقی ہے تو دوسرا خیالی ہوگا۔

ج ن اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ب} = \frac{ا}{ب} \text{ اور } \frac{ل}{ب} = \frac{ا}{ب}$$

ہیں۔ پس دفعہ ۱۴۴ (۹) سے

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{ل}{ب} = \frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ب}$$

$$\frac{ل}{ب} = \frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ب}$$

اس لیے

(۱۹۱)

اور (ل) (ا) دونوں منہی ہیں اس لیے

$$\frac{ل}{ب} (۱ - \frac{ا}{ب}) = (\frac{ا}{ب} + ۱)$$

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{ل}{ب} = \frac{ا}{ب} + ۱$$

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{ل}{ب} = \frac{ا}{ب} + ۱$$

(۲) اور (۳) سے

$$ج ن + ج د = ل + ا = \frac{ل}{ب} - \frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ب}$$

$$= (\frac{ل}{ب} - \frac{ا}{ب}) - (\frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ب})$$

$$= \frac{ل}{ب} - \frac{ا}{ب}$$

اس لیے دو فرد وج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل

ہوتا ہے جیسا کہ ناقص کی صورت میں بھی تھا۔

۱۴۷ تعریف۔ تقارب وہ خط مستقیم ہے جو منہی سے

لاتنا ہی پر کے دو نقطوں پر ملتا ہے لیکن یہ خط پورا کا پورا لاتنا ہی نہیں ہوتا۔

زائد کے متقارب معلوم کرنا

ان نقطوں کے فصلے معلوم کرنے کے لیے جہاں خط مستقیم $م = لا$ + ج منحنی کو قطع کرتا ہے مساوات

$$۱ = \frac{لا^۲}{ب^۲} - \frac{۲(ج + لا)}{ب}$$

$$یا \quad لا^۲ \left(\frac{۱}{ب^۲} - \frac{۲}{ب} \right) - ۲ج = ۱ \quad (۱)$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات کی دونوں اصلیں لاتنا ہی ہونگی اگر $لا$ اور $لا$ دونوں کے سر صفر ہوں یعنی

$$اگر \quad \frac{۱}{ب} - \frac{۲}{ب} = ۰ \quad اور \quad م = ج = ۰$$

$$پس \quad ج = ۰ \quad اور \quad م = \pm \frac{ب}{۲} \quad حاصل ہونا چاہئے \quad (۱۹۲)$$

$$اس لیے زائد \quad لا^۲ = \frac{۱}{ب^۲}$$

کے دو حقیقی متقارب ہیں جن کی مساواتیں $م = \pm \frac{ب}{۲}$ لائیں، یا ایک مساوات میں انہیں بیان کیا جائے تو

$$۰ = \frac{لا^۲}{ب^۲} - \frac{۲}{ب} \quad (۲)$$

ب، ب میں سے قاطع محور کے متوازی اور ۱، ۲ میں سے محور کے متوازی خطوط کھینچو، تب (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ متقارب اس مستطیل کے وتر ہیں جو اس طرح بنتا ہے۔

ناقص کے کوئی حقیقی قطعے لاتنا ہی پر نہیں ہوتے اور اس لیے اس کے متقارب خیالی ہوتے ہیں۔
 دفعہ ۱۴۵ سے ہم دیکھتے ہیں کہ ہر متقارب منطبق مزدوج قطروں کے ایک زوج پر واقع ہوتا ہے۔
 ۱۴۸۔ کوئی خط مستقیم جو ایک متقارب کے متوازی ہو منحنی سے لاتنا ہی پر کے ایک نقطہ پر ملے گا۔

کیونکہ مساوات (۱) (دفعہ ۱۴۶) کی ایک اصل لاتنا ہی ہوگی اگر لا کا سر صفر ہو۔ یہ صورت اس وقت ہوگی جبکہ $m = \pm \frac{b}{a}$ ۔ اس لئے خط

$m = \pm \frac{b}{a}$ لا + ج منحنی سے لاتنا ہی پر کے ایک نقطہ پر ملے گا خواج کی قیمت کچھ ہی ہو۔
 ۱۴۹۔ اس زائد کی مساوات جس کا قاطع محور ب ب اور مزدوج محور ا ا ہو

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} -$$

ہے۔ یہ زائد اور ابتدائی زائد جس کی مساوات

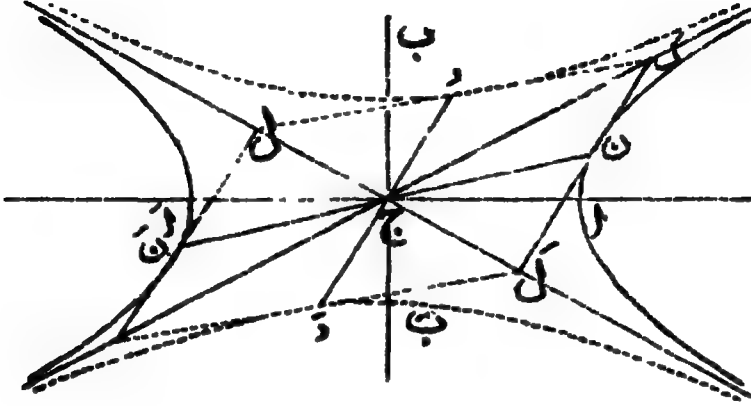
$$(۲) \dots\dots\dots ۱ = \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}$$

ہے ایک دوسرے کے مزدوج کہلاتے ہیں۔

(۱۴۳) ہم مزدوج زائدوں کے ایک زوج کے چند خواص ذیل میں درج کرتے ہیں:-

- (۱) ان دو زائدوں کے متقارب ایک ہی ہوتے ہیں۔
- (۲) اگر دو قطر ایک زائد کے لحاظ سے مزدوج ہوں تو دوسرے کے لحاظ سے بھی مزدوج ہوں گے۔

(۳) زائدوں (۲) اور (۱) کی مساواتیں [دفعہ ۱۴۳] اشکال



$$\frac{1}{را} = \frac{جم ط}{وا} - \frac{جب ط}{ب ا}$$

$$- \frac{1}{را} = \frac{جم ط}{وا} - \frac{جب ط}{ب ا}$$

میں بھی لکھی جاسکتی ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ ط کی کسی قیمت کے لیے ر ایک منحنی کے لیے مثبت اور دوسرے کے لیے منفی ہے۔

پس ہر قطر ایک منحنی سے حقیقی نقطوں پر اور دوسرے منحنی سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔ اس کے علاوہ ان دو منحنیوں کے نیم قطروں کے طول ط کی تمام قیمتوں کے لیے ارشتہ را = - را سے مربوط ہوتے ہیں۔ (۴) اگر دو مزدوج قطر منحنیوں (۲) اور (۱) کو علی الترتیب ن اور د پر قطع کریں تو

$$ج ن - ج د = وا - ب ا$$

فرض کرو کہ ن کے محمولہ ا ا اور د کے محمولہ ا ا ہیں۔

تب ج ن اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = 0 \text{ اور } \frac{\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = 0$$

ہیں۔ مزدوج قطروں کی شرط $\bar{a} = \bar{b}$ سے حاصل ہوتا ہے

$$(3) \dots\dots\dots \frac{\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = 0$$

یا اور چونکہ (لا، ا) منہی (۲) پر اور (لا، ا) منہی (۱) پر ہے اسلئے

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} (1 - \frac{\bar{a}}{\bar{b}}) = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} (1 - \frac{\bar{a}}{\bar{b}})$$

$$(4) \dots\dots\dots \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \pm \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

$$(5) \dots\dots\dots \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \pm \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \text{ سے (۳) اور اس لیے}$$

پس ج ن۔ ج ڈ = لا + لا۔ لا۔ لا

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

$$= (\frac{\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}}) (\frac{\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}})$$

ج ن^۱ - ج د^۱ = ج^۲ - ب^۲ (۵) وہ متوازی الاضلاع جو ن^۱ د^۱ پر کے ماسوں سے بنتا ہے مستقل رقبہ کا ہوتا ہے۔

یہ متوازی الاضلاع ج ن^۲ ج د^۲ ج ب^۲ ج د^۲ کے مساوی یا ج د^۲ ج ف کے مساوی ہے جہاں ج ف وہ عمود ہے جو ج سے ن پر کے ماس پر کھینچا گیا ہے۔

اب ن پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{لا^۲}{وا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$$

ہے۔ اسلئے

$$\frac{۱}{\frac{لا^۲}{وا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲}} = ج ف^۲$$

$$اور ج د^۲ = \frac{وا^۲}{ب^۲} + \frac{لا^۲}{وا^۲} - \frac{لا^۲}{وا^۲} = \frac{وا^۲}{ب^۲} + \frac{لا^۲}{وا^۲} - \left(\frac{لا^۲}{وا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} \right) \quad (۱۹۴)$$

اس لیے ج د^۲ ج ف = ج ب^۲ ج د^۲ (۱۹) متقارب، ن د اور ن د کی تنصیف کرتے ہیں۔ اگر ن د کے وسطی نقطہ کے محدود لا، ما ہوں تو

$$لا^۲ = لا^۲ + لا^۲ اور ما^۲ = ما^۲ + ما^۲$$

$$\frac{۱}{ب} \pm \frac{۱}{ب} = \frac{\frac{۱}{ب} \pm \frac{۱}{ب}}{\frac{لا^۲}{وا^۲} \pm \frac{ما^۲}{ب^۲}} = \frac{لا^۲ + لا^۲}{ما^۲ + ما^۲} = \frac{لا}{ا}$$

۱۔ ج ن اور ج د کو مزدوج نیم قطریں سمجھنا چاہئے کیونکہ نقطے ن اور د ایک ہی زائد پر نہیں ہیں۔ خط ج د ابتدائی زائد کو دو خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے اور اگر یہ نقطے د^۱ ہوں تو (۳) سے ج د^۱ = - ج د^۱

اس لیے ن د اور ن د کے نقاط وسطیٰ مسب ذیل خطوں میں سے ایک یا دوسرے پر ہیں :

$$\frac{لا}{و} = \pm \frac{ا}{ب}$$

نیز چونکہ ج ن ک د ایک مساوی الاضلاع ہے اس لیے ج ک ن دیا ن د کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے وہ متعارفوں میں سے ایک ہے اس لیے د د کے حماس د اور د کے حماس سے متعارفوں پر ملتے ہیں (۱) زائدوں (۲) اور (۱) کے لحاظ سے (۱) کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{لا}{و} - \frac{ما}{پ} = ۱ \text{ اور } \frac{لا}{و} + \frac{ما}{پ} = ۱$$

ہیں۔ اس لیے ان منحنیوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی ایک دوسرے کے متوازی اور مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔ اگر (۲) پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو (۱) کے لحاظ سے اس نقطہ کا قطبی

$$\frac{لا}{و} + \frac{ما}{پ} = ۱ \text{ یا } \frac{لا}{و} - \frac{ما}{پ} = ۱$$

ہے۔ لیکن یہ آخری مساوات نقطہ (لا، ما) پر (۲) کے حماس کی مساوات ہے اور یہ نقطہ ن میں سے گزرنیوالے قطر کا دوسرا سربراہ ہے۔

پس اگر ایک زائد کے کسی نقطہ سے مزدوج زائد کے دو حماس ن ق ن ق کھینچے جائیں تو نقطہ ق ق ابتدائی زائد کون میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر مس کرے گا۔

۱۵۰۔ مزدوج قطروں کے کسی زوج کو محاور قرار دیکر زائد

زائد کے قاطع محور اور مزدوج محور کے حوالے سے زائم کی مساوات

$$1 = \frac{r_2}{r_4} - \frac{r_3}{r_1}$$

ہے۔ چونکہ استحال میں مبداء کا مقام تبدیل نہیں ہوتا اس لیے استحال شدہ مساوات کو مائل کرنے کے لیے مساوات بالا میں لا، ما کی بجائے شکل ل لا + م ما، ل لا + م م کے محلے درج کرنا ہونگے [دفعہ ۵۱]۔

پس زائد کی مساوات شکل

$$(1) \dots\dots\dots (1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

نی ہوگی۔

بموجب فرض محور لا اُن دتروں کی تنغیف کرتا ہے جو محور ما کے متوازی ہیں۔ اس لیے لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے (۱) سے معلوم کردہ ما کی دو قیمتیں مساوی اور مختلف علامت ہونی چاہئیں۔ اس لئے

۵ = . اور اس لیے مساوات کی شکل

$$(r) \dots \dots \dots = (a + b)$$

ہوگی۔

دو نیم فردوج قلمروں میں سے ایک حقیقی ہے اور دوسرا خیالی۔
اگر ان کے طول λ اور μ - آ ب ہوں تو چونکہ یہ طول محاورہ لا اور ما پر کے
مقطع ہیں اس لیے (۲) سے حاصل ہوتا ہے
 $\lambda = 1 = \mu - \beta$ - ب' ب'

اس لیے مطلوبہ مساوات

$$(r) \dots \dots \dots c_1 = \frac{r_1}{r_2} - \frac{r_0}{r_3}$$

۱۵۱۔ چونکہ منہی کی مسادات کی شکل وہی رہتی ہے جو پہلے تھی اس لیے

وہ تمام تحتیاتی جن میں یہ فرض نہیں کیا گیا تھا کہ محاذِ ایک دوسرے کے
 علیٰ القوا تم ہیں اب بھی درست رہتی ہیں۔ مثلاً دفعہ ۴۴ کی مساواتیں
 (۱) (۲) (۳) (۵) اور (۹) میں کسی تبدیلی کی ضرورت نہیں۔ دفعہ
 ۴۷ میں بھی کوئی تبدیلی نہیں کرنی پڑے گی چنانچہ زاہد کے ستاروں کی مساوات

ماہل ہوگی جبکہ دائی کی مسدات $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$ کے معادہ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$ کے

کسی نقطہ کا قلبی، $\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} =$ اکو مس کر لے۔

مثال ۲۔ اگر $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$ ۔ ا کے لحاظ سے نقطوں (لا، لا) اور (لا، لا)۔

کے قطبی ایک دوسرے کے علی القوا ائم ہوں تو $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{\mu}$

مثال ۳۔ اگر $a = 1$ ۔ کے لحاظ سے نقطہ (عربی) کا قیاسی
 $a = 1$ ۔ $a = 1$ ۔ کو مس کرے تو نقطہ (عربی) قائم نہ لے۔ $a = 1$ ۔
 یہ ہوگا۔

پڑھو گا۔
مثال ۴۔ ایک دائرہ دو ثابت عمود وار خطوں کو اس طرح قطع کرتا
کہ ہر ایک منقطعہ معلومہ طول کا ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا وترقی ایک
قائم زاویہ ہے۔

مثال ۵۔ $a^2 + b^2 = c^2$ کے لحاظ سے $a^2 + b^2 = c^2$ کے لیے مساوی کے

قلب رائد م لا۔ ما = م وا پر واقع ہوں ہے۔
 نیز ما۔ م ولا۔ کے لحاظ سے م لا۔ ما = م وا کے ماسوں کے
 قلب دائرہ لا + ما = وا پر واقع ہونگے۔

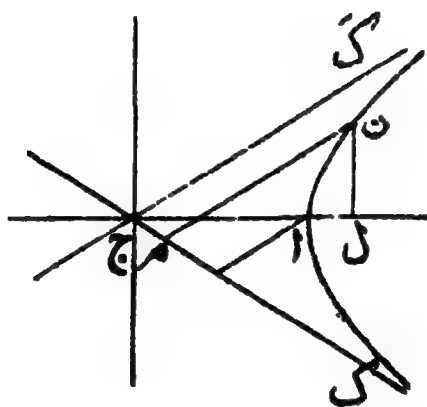
۱۵۲۔ زائد کے متقاربوں کو محدودوں کے نحو قرار دیکر ان کے

حوالے سے نائند کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ شکل میں متقارب ج ک، ج ک ہیں اور فرض کرو کہ

نزاویہ (ج ک = ع اس لیے مس ع = $\frac{ب}{1}$ -

فرض کرو کہ منحنی کا کوئی نقطہ (لا'نا) 'ن' ہے اور فرض کرو کہ 'ن' کے محدود جگہ اور جگہ کے حوالے سے 'لا' 'نا' ہیں۔ 'ن' مرکب جگہ کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ جگہ سے مراد ملتا ہے۔ 'ن' کو قاطع محور پر عمود کھینچو۔



تب ج م = لآ، من = مأ، ج ل = لا، ل ن = ما

اب ج ل = ج ه جم + م ن جم

$$(1) \dots\dots\dots (1+U) = 0$$

نیز ل د = م د ج ب ع - ج م ج ب ع

یا $1 = (1 - \lambda) \text{ جب } \lambda = 0$ (۲)

پس مساوات

$$1 = \frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1}$$

میں ابدال کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{جم}^{\text{ع}} (\text{لا} + \text{ما})^{\text{ا}} - \text{جبا}^{\text{ع}} (\text{ما} - \text{لا})^{\text{ا}} = \text{ا}^{\text{ا}} \dots (۳)$$

لیکن مس ع = $\frac{\text{پ}}{\text{و}}$ ایسے جبا ع = $\frac{\text{جم}^{\text{ع}}}{\text{و}}$ = $\frac{\text{ا}}{\text{و} + \text{ب}}$ ، اس لیے
 زبروں کو اڑا دینے سے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م لا م} = \text{ا} + \text{ب}^{\text{ا}}$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔
 متقاربوں کے حوالے سے مزدوج زائد کی مساوات

$$\text{م لا م} = - (\text{و} + \text{ب}^{\text{ا}})$$

ہوگی۔
 ۱۵۳۔ زائد متقارب، اور مزدوج زائد کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{\text{لا}}{\text{و}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \text{ا}^{\text{ا}}, \frac{\text{لا}}{\text{و}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \text{ا}^{\text{ا}}, \text{اور } \frac{\text{لا}}{\text{و}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = \text{ا}^{\text{ا}}$$

ہیں۔
 اگر محدودوں کے محوروں کو کسی طریقہ پر تبدیل کیا جائے تو نئی
 مساواتیں حاصل کرنے کے لیے ہمیں تینوں صورتوں میں دہی اندراج
 عمل میں لانے چاہئیں۔

پہلے محدودوں کے محوروں کے تمام محلوں کے لیے زائد کی
 مساوات اور مزدوج زائد کی مساوات میں جو دو مستقلات شامل ہوتے
 ہیں وہ مساوی اور مختلف العلامت ہوتے ہیں اور ان مساواتوں اور
 متقاربوں کی مساوات میں جو فرق ہے وہ صرف مستقلوں کا ہے۔

۱۵۴۔ جب ایک زائد کے متقاربوں کے درمیان قائمہ زاویہ (۱۹۹)
 ہوتا ہے تو زائد کو قائم زائد کہتے ہیں۔

زائد کے متقاربوں کے درمیان زاویہ ۲ مس ۱ پ کے مساوی ہوتا ہے اور اس لیے جب یہ زاویہ قائمہ ہو تو $b = 1$ ۔ اسی سبب کی بنا پر بعض اوقات اس نغنی کو مساوی الحاد زائد کہتے ہیں۔

۱۵۵۔ زائد لا ما = ج کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنا۔

نقطہ (ج ع، ج ع) مرچا لا ما۔ ج = ۰ پر ہے خواہ ع کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اس نقطہ کو 'ع' سے موسوم کرو۔
تب دو نقطوں ع، ع کو ملانے والا خط

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

یعنی $\Delta = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\right) + (1 - \frac{1}{c}) + (\frac{1}{c} - 1) = 0$
ہے۔ اس لیے ع، ع سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\Delta + 1 = 0 \quad (1)$$

اب رکھو $c = 1$ تو ع، ع کے مماس کی مساوات

$$\Delta + 1 = 0 \quad (2)$$

حاصل ہوگی۔

(۲) سے

$$\frac{\text{لا ج}}{\text{ع}} + \text{ما ج} = \text{ع} = \text{ج}^2$$

یا مساوات (۳) کو استعمال کرتے ہوئے ۱۱۹ کی طرح ہم معلوم کرتے ہیں کہ لا ما - ج = ۲ کے لحاظ سے نقطہ (لا، ما) کے

قطبی کی مساوات

$$\text{لا ما} + \text{ما لا} = \text{ع}^2$$

ہے۔

مساوات (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مخروطی قائم زائد ہے تو

$$(\text{لا} - \text{ج} \text{ ع}, \text{ع} - \text{ما}) = (\text{ما} - \text{ج} \text{ ع}, \text{ع})$$

یا مساوات (۴) سے

مثال ۱۔ لا ما = ج^۲ میں ایک مثلث بنایا گیا ہے (۲۰۰) جس کے دو ضلع علی الترتیب ما + م_۱ لا = ۰ اور ما + م_۱ لا = ۰ کے متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا ضلع زائد م_۱ م_۱ لا ما = ج^۲ (م_۱ + م_۱) کو لف کرتا ہے۔

$$\text{ع}^2 = \text{ع} \text{ ع} \text{ کو ملانے والا خط}$$

$$\text{لا} + \text{ما} \text{ ع} - \text{ج} (\text{ع} + \text{ع}) = ۰$$

ہے۔ یہ نقطہ، $م + م = لا$ کے متوازی ہوگا اگر $م، ع، ع = ا$ ۔
اسی طرح $ع، ع$ کو ملائیو لا خط $م + م = لا$ کے متوازی ہے

اگر $م، ع، ع = ا$

پس $م، ع = م، ع$ (۱)
اب $ع، ع$ کو ملائے والا خط

$$لا + م + ع = ج (ع + ع) = ۰$$

ہے، یا (۱) سے $م + م + م = ج (م + م) = ع$

اس کا لٹاف $ع، ع$ کی مختلف قیمتوں کے لیے

$$۲ م + م = لا = ج (م + م)$$

۴۔ مثال ۲۔ نوٹ خط مستقیم ایک زائد کو نقطوں ق اور ق پر اور
اس کے متوازیوں کو نقطوں م اور م پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق ق
اور م م کے وسطی نقطہ ایک ہی ہیں۔

مثال ۳۔ ایک زائد کے کسی ماس کا وہ حصہ جو متوازیوں کے
درمیان منقطع ہوتا ہے نقطہ ماس پر نصف ہوتا ہے۔

مثال ۴۔ ایک زائد کا کوئی ماس متوازیوں سے ایک ایسا
ثلث قطع کرتا ہے جس کا رقبہ مستقل ہوتا ہے۔

مثال ۵۔ ثابت کرو کہ خطوط $م - م = لا$ اور $م + م = لا$
م کی تمام قیمتوں کے لیے زائد $لا = م$ کے مزدوج قطر ہیں۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ خط $لا = ۰$ زائد $لا + لا + لا = لا$ کا
ایک متقارب ہے۔

دوسرے متقارب کی مساوات کیا ہے؟
مثال ۷۔ $لا - لا - لا = ۰$ کے متقارب معلوم کرو۔

مزدوج زائد کی مساوات کیا ہے ؟
 مثال ۸۔ اس مثلث کے حائلہ دائرہ کے مرکز کا طریق جو ایک
 دئے ہوئے زائد کے کسی مماس اور متقاربوں سے بنتا ہے دوسرے زائد ہوتا ہے
 جس کے متقارب دئے ہوئے زائد کے متقاربوں پر عمود ہوتے ہیں۔
 مثال ۹۔ اگر $\lambda^1 = \mu^1$ کے لحاظ سے (ع) کا قلبی
 $\lambda^2 = \mu^2$ کو مس کرے تو (ع) کا قائم زائد $\lambda^2 + \mu^2 =$
 پر ہونا چاہیئے۔

مثال ۱۰۔ اگر ایک دئے ہوئے خط کے متوازی ہم محور دائرہ
 ایک نظام کے مماس بنیے جائیں تو ان کے تقاطع مماس ایک قائم زائد پر ہونگے۔
 مثال ۱۱۔ ثابت کرو کہ ہم محور دائروں کے ایک نظام کے مماس
 سے ایک معلومہ خط کے قلبوں کا طریق ایک زائد ہے جس کا ایک متقارب
 دائروں کے مرکوزوں کے خط پر عمود ہے اور دوسرا متقارب دئے ہوئے
 خط پر عمود ہے۔

۱۵۶۔ زائد کے متقارب اور مزدوج قطروں کا کوئی زوج
 موسیقی منسل بناتے ہیں۔

$$\text{مستقارب} = \frac{\lambda^2}{\mu^2} - \frac{\lambda^1}{\mu^1}$$

اور مزدوج قطر کا کوئی زوج $\lambda^1 + \mu^1$ یا $\lambda^2 + \mu^2 =$
 ہیں۔ دفعہ ۵۸ کی شرط مستحاج پوری ہوتی ہے۔

۱۵۷۔ ہم زائد کے کسی نقطہ کے محذوون کو ایک واحد تبدل کی
 رقوم میں بیان کر سکتے ہیں جیسا کہ ناقص کی صورت میں کیا گیا تھا۔ چنانچہ
 ہم کہہ سکتے ہیں $\lambda = \mu$ قط ط اور $\lambda = \mu$ بس ط کیونکہ ط کی تمام
 قیمتوں کے لیے قط ط = بس ط = ۱
 اگر منحنی کے کسی نقطہ ن کا معین ن لی ہو اور لی سے

امدادی دائرہ کا ماس لی ق ہو تو ج لی = ا ق ل ا ج ق۔ اسلئے
ا ج ق زاویہ طہ ہے۔

نقطوں طہ، طہ میں سے گزرنے والے وتر کی مساوات

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{ل}{و} & \frac{ب}{ا} & ۱ \\ \hline ۱ & جب طہ، جم طہ، = ۰ & ۱ \\ ۱ & جب طہ، بس طہ، = ۰ & ۱ \\ ۱ & جب طہ، بس طہ، = ۰ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

اس لیے حسب دفعہ ۱۲۳

$$\frac{ل}{و} جم \frac{۱}{۲} (طہ - طہ) = \frac{ب}{ا} جب \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) + جم \frac{۱}{۲} (طہ + طہ) \dots (۱)$$

نہ طہ پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{ل}{ا} = جم طہ + \frac{ب}{ا} جب طہ \dots (۲)$$

ہے۔ نیز طہ پر کا عا

$$ل ا ل - جم طہ + ب (ا - ب بس طہ) \backslash ب ب طہ = ۰$$

$$یا ل ا ل + جب طہ = \frac{ب}{ا} + \frac{۲ + ۲}{جم طہ} \dots (۳)$$

ہے۔

مثال۔ اگر چار نقطوں (ا ق ط ط، ب مس طہ) وغیرہ پر
عا د ایک نقطہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$\pi (۱ + ۲) = طہ + طہ + طہ + طہ$$

اور جب (ط_۱ + ط_۲) + جب (ط_۲ + ط_۳) + جب (ط_۳ + ط_۴) = (حقیقۃً ۱۳۹)
 ۱۵۸۔ ایک ناقص یا زائد کی مساوات کو جبکہ اس کو مبدا قرار دیا جائے (۲۰۲)

اس مساوات میں لا کی بجائے لا۔ لکھ کر معلوم کیا جاسکتا ہے جو مرکز کو مبدا لینے سے معلوم کیاجائیگی ہے۔ چنانچہ یہ مساوات ہوگی

$$۱ = \frac{ا^۲}{ب^۲} \pm \frac{ا^۲(۱-ا)}{ا^۲}$$

$$یا \quad ۰ = \frac{ا^۲}{ب^۲} \pm \frac{ا^۲}{ا^۲} \dots (۱)$$

اب اگر اس سے قریبی ماسک کا فاصلہ ثابت رہے (فرض کرو ف) اور خروج مرکز اکائی ہو جائے تو ضمنی ایک مکانی ہو جائے گا جس کا وتر خاص ۴ ف ہوگا۔

مکانی کی مساوات کو (۱) سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ (۱) = ۰
 = ف (۱+ز) = ۲ ف اس لیے $\frac{ا^۲}{ب^۲} = ۲ ف - ۱$ نیز (۱-ز) = ۰

$$= ف (۱+ز) = ۲ ف اس لیے \frac{ا^۲}{ب^۲} = ۲ ف - ۱$$

$$۰ = \frac{ا^۲}{ا^۲} \pm \frac{ا^۲}{۲ ف} - ۲ = ۰$$

یا چونکہ لا متناہی ہے

$$\frac{ا^۲}{ب^۲} = ۲ ف \pm ۱$$

اس لیے مکانی ایک ناقص یا زائد کی انتہائی شکل ہے جس کا وتر خاص محدود ہے لیکن محور اعظم اور محور اصغر لا متناہی ہیں اور مرکز اور دوسرا ماسک لا متناہی پر ہیں۔

مکانی کے خواص کو ناقص یا زائد کے خواص سے اخذ کرنا طالب علم کے لیے بہت مفید ہوگا۔

۱۵۹۔ فرض کرو کہ ایک مخروطی کا ماسکہ مرتب پر ہے۔
 ماسکہ کو مبدا، قرار دو اور فرض کرو کہ مرتب مخروط ما ہے، تب
 مخروطی کی مساوات ہوگی

$$لا^۲ = ما^۲ + زا^۲$$

$$یا لا^۲ (۱ - زا^۲) = ما^۲$$

یہ مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو حقیقی ہونگے اگر زا اکائی
 سے بڑا ہو، منطبق ہونگے اگر زا اکائی کے مساوی ہو، اور خیالی ہونگے اگر
 زا اکائی سے کم ہو۔
 پس ہمیں نہ صرف ناقص، مکانی اور زائد کو ہی مخروطیاں سمجھنا
 چاہیے بلکہ دو حقیقی یا خیالی خطوط مستقیم کو بھی۔
 یہ ذہن نشین رہے کہ ایک دائرہ کا مرتب لامتناہی فاصلہ پر
 ہوتا ہے، نیز دو متوازی خطوط مستقیم کے ماسکے اور مرتب سب کے سب
 لامتناہی پر ہوتے ہیں۔

ساتویں باب پر مثالیں

- ۱۔ (و ب، ج و د دو خطوط مستقیم ہیں جو ایک دوسرے کو
 علی القواکم تنصیف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ ن کا طریق جو اس طرح
 حرکت کرتا ہے کہ $ان \times ب = ن ج \times د$ ایک قائم قطع زائد
- ۲۔ ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو
 ثابت خطوط مستقیم ولا، و ما کو علی الترتیب ن پر قطع کرتا ہے۔ خط
 ن ن پر ایک نقطہ ن لیا گیا ہے ایسا کہ $س ه = ن ن$ ۔ ثابت کرو کہ
 ن کا طریق ایک زائد ہے جس کے مقارب ولا، و ما ہیں۔
- ۳۔ ایک خط مستقیم کے سرے دو ثابت خطوط مستقیم پر ہیں اور وہ

ایک ثابت نقطہ میں سے بھی گذرتا ہے۔ خط کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔
۴۔ ایک خط مستقیم کے سرے دو ثابت خطوط مستقیم پر ہیں اور وہ ان سے مستقل رقبہ کا ایک مثلث قطع کرتا ہے۔ خط کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔

۵۔ ۱ اور ۲ دو ثابت خطوط مستقیم ہیں اور ن کوئی نقطہ ہے۔ ن سے ۱ اور ۲ پر عمود ن م اور ن ل ہیں۔ ن کا طریق معلوم کرو اگر ذوار بیتہ الاضلاع و م ن ل مستقل رقبہ کا ہو۔

۶۔ ایک قائم قطع زائد کے مرکز سے کسی نقطہ کا فاصلہ اس عمودی فاصلہ کے بالعکس متناسب ہوتا ہے جو نقطہ کے قطبی کا زائد کے مرکز سے ہے۔
۷۔ ایک زائد کے نقطہ ن کا معین ن ل ہے اور ن گ

عماد ہے جو محور سے گزرتا ہے۔ اگر ل ن کو خارج کیا جائے اور وہ متقارب سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ق گ متقارب کے علی القوام ہے۔

۸۔ اگر ایک زائد اور اس کے مزدوج زائد کے مزدوج المکز زائد (۲۰۴)

ہوں تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{ز} + \frac{1}{ز} = 1$

۹۔ وہ دو خطوط مستقیم جو ان نقطوں کو ملاتے ہیں جن پر ایک زائد کے کوئی دو مماس متقاربوں سے ملے ہیں مماسوں کے وتر مماس کے متوازی اور اس سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک زائد کے کسی نقطہ پر کے مماس کا وہ حصہ جو نقطہ مماس اور قاطع محور کے درمیان منقطع ہوتا ہے ان عمودوں کے طولوں کے درمیان موسیقی اوسط ہے جو مماسوں سے اس نقطہ پر کے عماد پر کھینچے گئے ہوں۔

۱۱۔ اگر کسی نقطہ و میں سے خط و ن ق کو ایک زائد کے ایک متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہو اور یہ خط زائد کو ن پر اور و کے قطبی کو ق پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ن و ق کا نقطہ وسطی ہے۔

۱۲۔ ایک متوازی الاضلاع کو اس طرح بنایا گیا ہے کہ اس کے اضلاع

ایک زائد کے متقاربوں کے متوازی ہیں اور اس کا ایک وتر زائد کا ایک وتر ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے وتر کی سمت مرکز میں سے گزرے گی۔

۱۳۔ ایک قائم زائد کے راس Δ ، Δ ہیں اور اس پر کوئی نقطہ Γ ہے۔ ثابت کرو کہ زاویہ $\Delta \Gamma \Delta$ کے داخلی اور خارجی ماضف متقاربوں کے متوازی ہیں۔

۱۴۔ ایک دائرہ کے ایک ثابت قطر کے سرے Δ ، Δ ہیں اور اس قطر کے عمود وار کسی وتر کے سرے Γ ، Γ ہیں۔ ثابت کرو کہ $\Delta \Gamma \Delta$ اور $\Delta \Gamma \Delta$ کے نقطہ تقاطع کا طریق قائم قطع زائد ہے۔

۱۵۔ ایک زائد کے متقاربوں کو حوالے کے محاور قرار دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ زائد کے دو محاسوں کے نقطہ تقاطع کے محدد نقاط تماس کے محددوں کے درمیان موسیقی اوسط ہیں۔

۱۶۔ ایک زائد کے کسی نقطہ سے دوسرے زائد کے تماس کھینچے گئے ہیں جس کے متقارب وہی ہیں۔ ثابت کرو کہ وتر تماس متقاربوں سے ایک مستفل رقبہ قطع کرتا ہے۔

۱۷۔ دو خطوط مستقیم جو ایک مساوی المحاور زائد کے کسی نقطہ سے کسی قطر کے سروں تک کھینچے گئے ہوں متقاربوں کے ساتھ مساوی المیلاں ہوتے ہیں۔

۱۸۔ قائم زائد لا۔ ما۔ لا کے عمادی وتروں کے نقاط وسطی کا طریق (ما۔ لا) = ۴ لا۔ ما۔ لا ہے۔

۱۹۔ مخروطیوں کے ایک نظام کے صدر محاور دو دئے ہوئے خطوط مستقیم پر ہیں اور یہ تمام مخروطی ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط کے قطب ایک قائم زائد پر واقع ہوتے ہیں۔

۲۰۔ مخروطیوں کے ایک نظام کے صدر محاور دو دئے ہوئے خطوط مستقیم پر ہیں اور یہ سب مخروطی ایک دئے ہوئے خط مستقیم کو مس کرتے

ہیں۔ ثابت کرو کہ ان محفوظیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبیوں کا انصاف ایک مکانی ہے۔

۲۱۔ دو خطوط لا۔ ع۔ = ما۔ ب۔ = ۰، زائد لا۔ ما۔ = ج کے لحاظ سے مزدوج ہیں (یعنی ہر خط دوسرے کے قطب میں سے گذرتا ہے)۔ ثابت کرو کہ (ع۔ ب۔) زائد لا۔ ما۔ = ۲ ج = ۰ پر ہے۔

۲۲۔ ایک دائرہ ایک زائد کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک متقارب سے ان چار تقاطع کے فاصلوں کا حاصل ضرب دوسرے متقارب سے ان کے فاصلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۲۳۔ ثابت کرو کہ اگر ایک قائم قطع زائد ایک دائرہ کو چار نقطوں پر قطع کرے تو ان چار نقطوں کے اوسط محل کا مرکز خینون کے مرکزوں کے درمیان وسط میں ہے۔

۲۴۔ اگر ایک قائم زائد پر چار نقطے لے جائیں ایسے کہ کسی دو کو ملا کر دوسرے دو کو ملانے والے وتر پر عمود ہو اور اگر ع۔ ب۔ ج۔ ض۔ کسی ایک متقارب کے ساتھ ان خطوط مستقیم کے میلان ہوں جو ان نقطوں کو مرکز سے علی الترتیب ملانے سے حاصل ہونے میں تو ثابت کرو کہ مس۔ مس۔ مس۔ = ۱

۲۵۔ زائد $\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۲} = ۱$ کے وتروں کا ایک سلسلہ اس زائد کے ماس ہیں جو نائد کے ماسکوں کو ملانے والے خط کو قطر مان کر کھینچا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ زائد کے لحاظ سے ان وتروں کے قطبوں کا طریق $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ واقع ہے۔

۲۶۔ اگر دو خطوط مستقیم ثابت نقطوں میں سے گذریں اور ان کے درمیانی زاویہ کا ناصف ہمیشہ ایک ثابت خط کے متوازی رہے تو ثابت کرو کہ خطوط کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

۲۷۔ ثابت کرو کہ ایک زائد کے مزدوج قطروں کے زوج کسی خط مستقیم (۲۰۶)

صدر بیچ میں منقطع ہوتے ہیں۔

۲۸۔ ایک مثلث کے دو اضلاع 'ا ب' 'ج' کو دو ترمان کر
ان پر دو مساوی دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں کے تقاطع کا
طریق ایک قائم زائد ہے جس کا مرکز ب ج کا نقطہ وسطی ہے اور جو 'ا ب'
ج میں سے گذرتا ہے۔

۲۹۔ نصف قطر کا ایک دائرہ ایک قائم زائد کو جس کا مرکز ج ہے
چار نقطوں 'ف' 'ق' 'س' 'ر' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج 'ف' 'س' 'ج' 'ق'
ج 'س' 'ج' 'س' = ج 'ر' 'ج' 'ر'

۳۰۔ اگر قائم زائد لا ما = ج کے نقطوں (لا، ما) (لا، پ) (لا، با)

(لا، ما) پر کے عماد نقطہ (ص، ب) پر طیں تو ثابت کرو کہ
ص = لا + لا + لا + لا اور ب = ما + ما + ما + ما

نیز لا لا لا لا لا = ما ما ما ما = ج

۳۱۔ ایک قائم زائد کے نقطوں 'ف' 'ق' 'س' پر کے عماد زائد
ایک نقطہ میں پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ زائد کا مرکز مثلث ف
ق 'س' کا مرکز ہندسی ہے۔

۳۲۔ اگر ایک قائم زائد کے نقطوں 'ف' 'ق' 'س' پر کے عماد
ایک نقطہ پر متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ ف 'ق' 'س' اس قطر کے دوسرے
سرے میں سے گذرے گا جو 'س' میں سے گذرتا ہے۔

۳۳۔ قائم قطعات زائد کے ایک سلسلہ کو جن کے متقارب لا ما =
ہیں خط ما = ک نقطوں 'ف' 'ق' 'س' 'ر' پر قطع کرتا ہے۔
ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' 'س' 'ر' پر کے عماد مکانی لا۔ ما۔ ک = کو
س کرتے ہیں۔

۳۴۔ قائم زائد لا ما۔ ج = میں لا انتہا مثلث بنائے جاسکتے ہیں

جن کے سب اضلاع مکافی $ما' = ۴$ و لا کو مس کرتے ہوں۔
نیز مکافی میں لا انتہا مثلث بنائے جاسکتے ہیں جن کے اضلاع قائم زائد
کو مس کرتے ہوں۔

۳۵۔ ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر اس سے ایک
دائرہ کا تماس کیجیاجائے تو اس تماس کا طول ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو
ن سے دائرہ کے ایک ثابت تماس پر کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق
ایک مخروطی ہے جس کا دتر خاص دائرہ کے قطر کے مساوی ہے۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز ایک قائم زائد کے کسی نقطہ
ن پر ہے اور جس کا نصف قطر ن میں سے گزرنیوالے زائد کے قطر کے
مساوی ہے زائد کو تین دیگر نقطوں پر قطع کرتا ہے جو ایک متساوی الاضلاع
مثلث کے راس ہیں۔

۳۷۔ ایک زائد پر چار نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ن' ہیں اور ن میں
دو خطوط متقاربوں کے متوازی کیجئے گئے ہیں جو مثلث 'ا'، 'ب'، 'ج' کے اضلاع
سے علی الترتیب 'ل'، 'م'، 'ق' اور 'ن'، 'م'، 'ق' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ
ل : م : م : ق = ل : م : م : ق۔

۳۸۔ ثابت کرو کہ کوئی خط مستقیم جو $ما' - ۲$ و لا = ۰ اور لا - ۲ = ب ما
= کو ایسے نقطوں پر قطع کرے جو موسیقی مزدوج ہوں زائد لا ما + ۲ و ب =
کو مس کرے گا۔

۳۹۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا + ما - ۲ و لا = ۰ کا کوئی تماس دو زائدوں
لا (لا + ما) - ۳ و لا = ۰ اور ما (ما - لا) - ۳ و لا = ۰ سے موسیقی طور پر تقسیم
ہوتا ہے۔

۴۰۔ ہم مرکز مخروطیوں کے ایک نظام کے مرتب دئے گئے ہیں۔
ثابت کرو کہ (۱) مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے
قطبوں کا طریق ایک مکافی ہے اور (۲) مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے
نقطہ کے قطبی کا لگان ایک مکافی ہے۔

متفرق امثلہ (۲)

(۲۰۸)

۱۔ خطوں لا + $\frac{ا + ب}{و ب}$ لا + ما + ا۔ و ب + (و۔ ب) (لا۔ ما) =
کے درمیانی زاویوں کے نامف معلوم کرو۔

جواب : (لا + ما) { (و۔ ب) (لا۔ ما) - ۲ و ب } =
۲۔ اُن دائروں کا مشترک وتر معلوم کرو جن کی مساواتیں
ر = ۲ و ب ط اور ر = ۲ ج رجم ط۔ ب =

ہیں۔

جواب : ۲ ر (و ب ط۔ ج رجم ط)۔ ب =
۳۔ ثابت کرو کہ اگر ایک دائرہ ایک دے ہوئے دائرہ کو علی القواکم
قطع کرے اور نیز ایک دے ہوئے خط مستقیم کو مس کرے تو دائرہ کے مرکز کا
طریق ایک مکانی ہے۔

۴۔ ایک ثابت نقطہ (ف، گ) میں سے ایک خط مستقیم کو $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} =$
کے کسی قطر کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ خط مستقیم مزدوج قطر سے قی پرمتا
ہے۔ ثابت کرو کہ قی کا طریق قائم زائد
(ا۔ ب) (لا۔ ما) و ا ف ما + ب ا گ لا =

ہے۔

۵۔ اس مزدعلیٰ کے متغریوں کی مساوات معلوم کرو جس کا خروج المکرز
۲۱۰ ماسکہ (۰۔۱۰) اور مرتب لا + ما + ا = ۰ ہے۔

جواب : (لا + ا) (ما + ا) =

۶۔ اگر ان عمودوں کے پائین لی ہوں جو ثابت نقطہ (ج) سے خطوط ۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا پر پہنچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ لی کی مساوات (۱۔ ب) لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا ہے۔ اس سے اخذ کرو کہ اگر خطوط کو مبداء کے گرد اس طرح گھمایا جائے کہ ان کے درمیان زاویہ مستقل رہے تو نقطہ (۱ ج) سے لی ہر کا فاصلہ مستقل رہے گا۔

۷۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا قطر دائروں

$$لا + ما - ۴ = ۰ \text{ اور } لا + ما + ۲ لا + ۴ ما - ۶ = ۰$$

کا مشترک وتر ہے۔

جواب: لا + ۵ ما - ۲ لا - ۴ ما - ۱۸ = ۰

۸۔ اگر مکانی ما - ۴ لا + ۱ لا = ۰ کے وتر ق کے عمادی مکانی (۲۰۹) کے راس پر قائمہ زاویہ بنے تو ق پر کے عماد مکانی

$$ما - ۱۶ لا + ۱۶ = ۰$$

پر ملیں گے۔

۹۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص اور اس دائرہ کے مشترک مماس جو ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کے بیروں میں سے گزرتا ہے ایک مربع بناتے ہیں۔

۱۰۔ مخروطی (ل۔ م) لا - ۴ ل م لا - (ل۔ م) ما - ۱ = ۰ کی مساوات اس کے متعارفوں کو حوالے کے محاور قرار دیکر معلوم کرو۔

جواب: لا + ما = $\frac{1}{۲ل + ۲م}$

۱۱۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے پائین جو مبداء سے خطوط مستقیم

$$لا + ما - ۴ = ۰، لا + ۵ ما - ۲ لا - ۴ ما - ۱۸ = ۰ \text{ اور } لا + ۱۵ لا - ۲ ما - ۲۲ = ۰$$

پر کھینچے جائیں سب کے سب خط مستقیم ۳ لا + ما - ۸ = ۰ پر واقع ہوتے ہیں
۱۲۔ ثابت کرو کہ اگر دائروں میں ۱ = ۰، ۲ = ۰، ۳ = ۰ (دونوں میں لا
اور ما کے سر کاٹی ہیں) کے نصف قطر ۱ اور ۲ ہوں تو وہ نقطے جن پر

دائروں کے محاذی مساوی زوائد بنتے ہیں دائرہ ۱ = ۰ = ۱/۲ میں ۲ پر ہیں

اگر اس دائرہ کو جس کا قطر دے ہوئے دائروں کے مشابہت کے
مرکزوں کو ملانے والا خط جو ان کے "مشابہت کا دائرہ" کہا جائے تو
ثابت کرو کہ کسی تین دائروں کے مشابہت کے تین دائرے جبکہ ان میں سے
دو دو کو لیا گیا ہو ہم محور ہوتے ہیں۔

۱۳۔ ما - ۱۲ لا = ۰ کے دو نقطوں پر جن کے ماسکی فاصلوں کا
مجموعہ ۲ ج ہے ماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ ماس یکسانی ما = ۱۲
(۱ + ج - ۱) پر متقاطع ہوں گے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ کے نقطوں (لا، ما) (لا، ما) :

(لا، ما) اور (لا، ما) پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں تو $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

$$= \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - ۲$$

۱۵۔ دو دائرے جن کے قطر ایک قائم زائد کے متوازی و ترو کا

ایک سلسلہ ہوں زائد کے دو ثابت نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ خطوط

$$لا - ۲ لا ما ق م ۲ = ۰ + ما = ۰$$

کے درمیانی زاویوں کے نامف لا - ۲ = ۰ ہیں خواہ محوروں کے درمیان
زاویہ کچھ ہی ہو۔

۱۷۔ ہم محدد دائروں کا ایک نظام ایک دوسرے ہوئے خط مستقیم سے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'ف'، 'ق'، وغیرہ پر قطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائروں جن کے قطر 'ق'، 'ف'، 'ق'، 'ف'، وغیرہ ہیں ہم محوریوں کیونکہ مشترک بنیادی محور دے ہوئے خط مستقیم پر عمود ہے۔

۱۸۔ اگر ایک دائرہ جس کا مرکز (ع'، ب'، ہ) ہے 'ا'۔ 'ا' = 'لا'۔ کو چار نقطوں پر قطع کرے جن میں سے تین ایک متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں تو ثابت کرو کہ (۱) چوتھے نقطہ کے محدد (ع'، ہ'، و'۔ '۳' بہ') ہیں اور (۲) دائرہ کا مرکز کافی 'ا' = 'لا'۔ '۲'۔ '۲' پر ہے۔

۱۹۔ ت سے ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ا}{ب} = ۱$ کا ماس کھینچا گیا جو (۱، ۰) پر کے ماس سے محور اصغر کے مساوی طول قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ت کافی $\frac{ا}{ب} = \frac{۲}{۱} + ۲$ پر ہے۔

۲۰۔ ایک دائرہ ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ا}{ب} = ۱$ کے ایک قطر کے بیروں میں سے گزرتا ہے اور نیز ناقص کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کا مرکز ناقص

$$۲' لا + ۴ ب' = ۲' ا' (ب' - ۲')$$

پر ہے۔

۲۱۔ ایک مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر عمودیوں کے پائین نقاط (۲۵، ۲۰)، (۱۶، ۸)، اور (۹، ۸) ہیں۔ مثلث کے راسوں کے محدد معلوم کرو۔

جواب: چار نقطوں (۱۵، ۱۰)، (۱۰، ۵)، (۵، ۰)، اور (۵، ۱۵) ہیں سے کوئی تین۔

۲۲ — دائروں کے ہم محور نظام $لا + ما + ۲گ - لا - ج = ۰$ میں سے دو دائرے لیے گئے ہیں جو ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ اگر دائروں کے کسی ایسے زوج کے مشترک ماس پر نقطوں $(ج، ۰)$ اور $(۰، ج)$ سے عمود $ع' ع$ ہوں تو $ع' ع = ج - ۲$ ۔
 ۲۳ — مکانی $ما - ۳لا = ۰$ پر کوئی نقطہ $ن$ ہے اور محور پر نقطہ $ق$ ایسا ہے کہ $ق = ن$ (جہاں ۱ مکانی کارا ہے)۔
 ثابت کرو کہ $ق، مکانی ما + ۳لا = ۰$ کو لف کرتا ہے۔

۲۴ — $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کے نقطہ $(لا، ما)$ پر کا ماس دائرہ $لا + ما - ۱ = ۰$ سے نقطوں $ق$ اور $ق'$ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز اور $ق، ق'$ میں سے گزرنے والے خطوط $لا = ما$ (یا $لا \pm ۱$) ہیں۔
 ۲۵ — ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس منقطع کے معادی جو اس پر خطوط $لا = ۱ \pm ۱$ منقطع کرتے ہیں نقطہ $(ج، ۰)$ پر ایک قائمہ زاویہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم مخروطی $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کو مس کرتا ہے۔

۲۶ — ثابت کرو کہ اس مثلث کا نو نقطی دائرہ جو خطوط $۳لا + ۴ما - ۱۲ = ۰$ ، $۳لا - ۴ما - ۳۶ = ۰$ اور $لا = ۰$ سے بنتا ہے $۴لا + ۴ما - ۲۵لا + ۲۴ما + ۳۶ = ۰$ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ (۱) مثلث کا اندرونی دائرہ $لا + ما - ۶لا + ۶ما + ۹ = ۰$ ہے اور (۲) وہ دائرہ جو پہلے ضلع کو اور دوسرے دو محدود ضلعوں کو مس کرتا ہے $لا + ما - ۱۶لا - ۱۴ما + ۴۹ = ۰$ ہے۔

ثابت کرو کہ نقطہ قطعی دائرہ دوسرے دو دائروں کو مس کرتا ہے۔

۲۷۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو دائروں $LA + MA$ اور MA

$MA = 0$ اور $LA = 10 + MA = 0$ اور $LA + MA + 2LA$

$MA = 2 = 0$ میں سے ہر ایک کو ایک قطرے سے دوں پس کرتا ہے۔

جواب : $LA + MA = 0$ اور $LA = 2 - MA = 0$

۲۸۔ ثابت نقطہ (م، ک) سے مکافاتی $MA = 0$ اور $LA + 1$

کے ماس ت ف ت ق کیجئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف اور ق

پر کے عماد کی تمام قیمتوں کے لیے خط $MA + LA + MA = 0$

پر ملتے ہیں۔

۲۹۔ مکافاتی $MA = 0$ اور $LA = 0$ کے گرد متساوی الاضلاع مثلث

کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مثلثوں کے ماس مختصر طری

$$MA = (1 + LA)(1 + LA) = 0$$

پر ہیں۔

۳۰۔ اگر $\frac{LA}{1} + \frac{MA}{2} = 0$ اور دو نقطے ف، ق ہوں چکے

خارج المکرز زاویے ط اور ف رشتہ ق ط ط + ق ف ف = ۲ کو پورا کرتے ہیں
تو ثابت کرو کہ ف ق ناقص

$$= \frac{LA}{1} - \frac{MA}{2} + \frac{LA}{1}$$

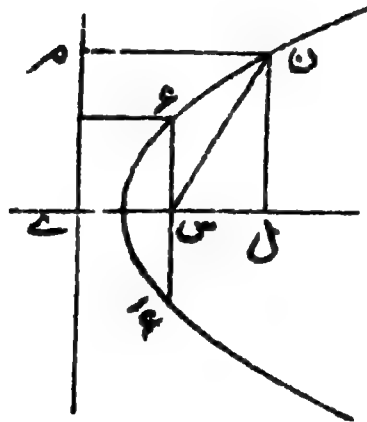
کو لف کرتا ہے۔



آنکھوان با

مخروطی کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو

۱۶۰۔ ایک مخروطی کی قطبی مساوات معلوم کرنا جبکہ ماسکہ قطب ہو۔
فرض کرو کہ ماسکہ S سے $د$ مرتب ہے۔ فرض کرو کہ خروج مرکز
ز ہے۔



S سے $د$ کو مرتب پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ S سے ابتدائی
خط ہے۔

فرض کرو کہ وتر خاص ϵ میں ϵ ہے تو z میں ϵ

$\epsilon = \epsilon$ ل (فرض کرو)
فرض کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ n کے محدود r ط ہیں۔ فرض کرو کہ
نہ n لی علی الترتیب مرتب پر اور میں سے پر عمود ہیں۔ تب
میں $n = z$ نہ n مہ z نہ l ہے $=$ نہ l میں $+ z$ نہ l میں سے
یا $r = -$ نہ r جم ط $+ l$

$\frac{l}{r} = 1 + z$ جم ط
اگر مخروطی کا محور ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ ϵ بنا کرے تو منحنی کی
مساوات

$\frac{l}{r} = 1 + z$ جم (ط - ϵ)
ہوگی۔ کیونکہ اس صورت میں میں n میں سے کے ساتھ زاویہ
طہ - ϵ بنانا ہے۔
۱۶۱۔ اگر مرتب پر کے کسی نقطہ کے محدود r ط ہوں تو
رجم ط $=$ میں سے $= \frac{l}{r}$

اس لئے مرتب کی مساوات

$$\frac{l}{r} = z$$
 جم ط

ہے۔ اسی طرح $\frac{l}{r} = 1 + z$ جم (ط - ϵ) کے مرتب کی مساوات

$$\frac{l}{r} = z$$
 جم (ط - ϵ)

اگر ماسکی وتر n میں n ہو اور n کا سمتی زاویہ ϕ تو n کا سمتی
زاویہ $\phi + \pi$ ہوگا۔ پس اگر n میں $n = r$ میں $n = r$ تو
 $\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم } \phi$ اور $\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم } (\phi + \pi)$

$$\therefore \frac{L}{r} = \frac{L}{r} + 1$$

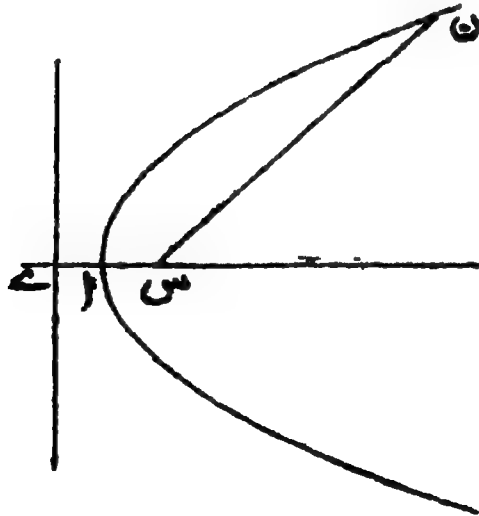
$$\text{پس } \frac{2}{L} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

اس لئے کسی مخروطی میں نیم وتر خاص کسی ماسکی وتر کے
مقطوعوں کے درمیان موسیقی اوسط ہوتا ہے۔

۲۶۲ — مخروطی $\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم } \phi$ کو اس کی مساوات سے منقسم کرنا۔ (۲۱۵)

(۱) فرض کرو $z = 1$ تو منحنی مکافی ہے اور مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم } \phi$$



نقطہ $\frac{1}{r}$ پر جہاں منحنی محور کو قطع کرتا ہے

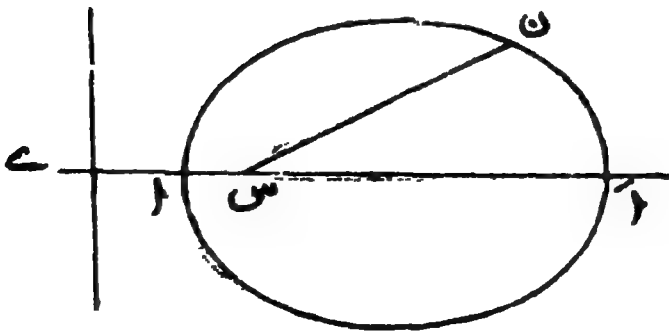
$$\frac{1}{r} = 0 \text{ اور } r = \frac{1}{0}$$

جیسے زاویہ $\frac{1}{r}$ بڑھتا ہے $(1 + \frac{1}{r})$ گھٹتا ہے یعنی $\frac{1}{r}$ گھٹتا ہے اور اس لیے $\frac{1}{r}$ بڑھتا ہے اور $\frac{1}{r}$ بغیر کسی حد کے بڑھتا ہے یہاں تک کہ $\frac{1}{r} = 0$ تو $\frac{1}{r}$ لامتناہی ہو جاتا ہے۔ جیسے $\frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ کے آگے بڑھتا ہے $(1 + \frac{1}{r})$ مسلسل بڑھتا ہے اور اس لیے مسلسل گھٹتا ہے یہاں تک کہ $\frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ تو وہ پھر $\frac{1}{r}$ کے مساوی ہو جاتا ہے۔ پس منحنی کی شکل وہ ہے جو نقشہ میں دکھائی گئی ہے اور وہ سمت $\frac{1}{r}$ میں لامتناہی فاصلہ تک جاتی ہے۔

(۲) فرض کرو کہ $\frac{1}{r}$ سے کم ہے تو منحنی ایک ناقص ہے۔

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{1+z}$$

جیسے $\frac{1}{r}$ بڑھتا ہے $\frac{1}{r}$ گھٹتا ہے اور اس لیے $\frac{1}{r}$ گھٹتا ہے یعنی $\frac{1}{r}$ بڑھتا ہے یہاں تک کہ $\frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ تو $\frac{1}{r} = \frac{1}{1+z}$ [چونکہ $z > 1$ رکھیں] قیمت مثبت ہے۔



اس لیے منحنی محور کو مکرر ایک ایسے نقطہ آ پر قطع کرتا ہے کہ میں $\frac{ل}{ل-۱} = \frac{ل}{ل-۱}$ ۔
جیسے ط' ط' سے ۲۲ تک بڑھتا ہے جم طہ مسلسل۔ ۱ سے ۱ تک
بڑھتا ہے اسلئے $\frac{ل}{ل-۱}$ مسلسل بڑھتا ہے اور مسلسل $\frac{ل}{ل-۱}$ سے $\frac{ل}{ل+۱}$ تک گھٹتا ہے۔

چونکہ طہ کی کسی قیمت کے لیے جم طہ = جم (۲۲ - طہ) اس لیے
منحنی محور کے گرد متشاکل ہے۔

اس لیے جب، ز اکائی سے چھوڑا ہوتا ہے تو مساوات ایک
بند منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ابتدائی خط کے گرد متشاکل ہوتی ہے۔
(۳) فرض کرو کہ ز اکائی سے بڑا ہے تو منحنی ایک زائد ہے۔

نقطہ آ پر طہ = ۰، اور $\frac{ل}{ل+۱}$

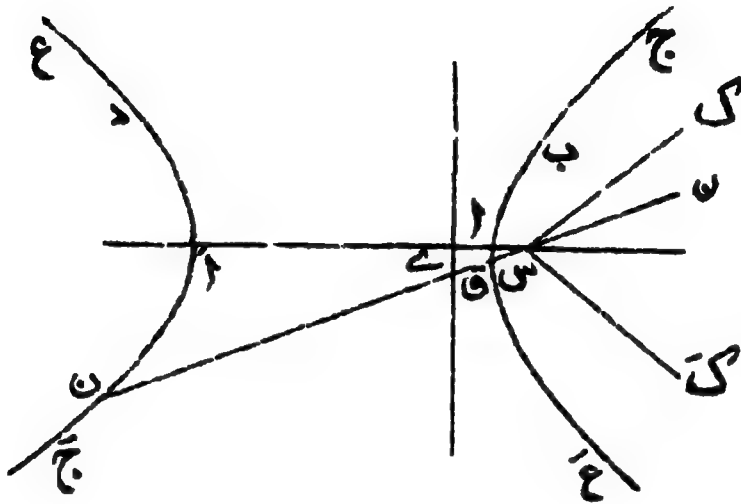
جیسے طہ بڑھتا ہے جم طہ گھٹتا ہے اور اس لیے ر بڑھتا ہے
یہاں تک کہ $۱ + ز جم طہ = ۰$ ۔ طہ کی اس قیمت کے لیے جس کو ہم ϵ کہیں گے
(زاویہ اس شکل میں) ر کی قیمت لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے۔
جیسے طہ ϵ کے آگے بڑھتا ہے $(۱ + ز جم طہ)$ منحنی ہو جاتا ہے

اور جب طہ = ۲۲ تو $\frac{ل}{ل-۱} = ۱$ (شکل میں) ϵ (۱ + ز جم طہ)

منحنی رہے گا یہاں تک کہ طہ (۲۲ - ϵ) کے مساوی ہو یعنی زاویہ اس ک
(شکل میں) کے مساوی ہو۔ جب طہ = ۲۲ - ϵ تو ر پھر لا متناہی
ہو جاتا ہے۔ اگر طہ اس سے قدرے کم ہو تو ر بہت بڑا اور منحنی
ہو گا اور اگر طہ قدرے بڑا ہو تو ر بہت بڑا اور مثبت ہو گا۔ ر کی
قیمتیں مثبت رہیں گی جبکہ طہ ۲۲ - ϵ سے ۲۲ تک بدلے۔

پس منحنی حسب ذیل ترتیب میں مرتب ہوتا ہے :-

اول حصہ اب ج ' پھر ج ن ا ا د ع اور آخر میں
ع ق ا -



منحنی دو جداگانہ شاخوں پر مشتمل ہے اور پوری شاخ ج ن ا د ع
کے لیے سمتی نیم قطر منحنی ہے۔
اگر ایک خط میں ق ن (مشکل) کھینچا جائے جو منحنی کو دو
نقطوں ن اور ق پر جو مختلف شاخوں پر ہوں قطع کرے تو ان دو نقطوں
ق اور ن کے متعلق یہ نہیں سمجھنا چاہیے کہ ان کا سمتی زاویہ ایک
ہی ہے۔ سمتی نیم قطر میں ن منحنی ہے یعنی میں ن کو اس سمت میں
کھینچا گیا ہے جو اس سمت کے مخالف ہے جو اس کے سمتی زاویہ کی
تحدید کرتی ہے، اس لیے سمتی زاویہ ا س ن ہونا چاہیے جہاں
ن ن میں محدودہ پر ہے۔ پس اگر ق کا سمتی زاویہ ط ہے تو
ن کا ط - ۱۱ ہوگا۔

۱۶۳۔ ایک مخروطی پر کے دو دے ہوئے نقطوں میں سے
(۷۱۷)

گذرنے والے خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا اور کسی نقطہ پر
کے تماس کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دو نقطوں ن اور ق کے سمتی زاویے علی الترتیب
(ع۔ ی) اور (ع۔ ب) ہیں۔
فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + زجم طہ \dots\dots\dots (۱)$$

ہے۔ وہ خط مستقیم جس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + زجم طہ + بجم (ط۔ ع) \dots\dots (۲)$$

ہے کسی دو نقطوں میں سے گزرے گا کیونکہ اس کی مساوات میں دو
غیر تالبع مستقامات (۱ اور ب) شامل ہیں۔ چنانچہ وہ دو نقطوں ن
اور ق میں سے گزرے گا اگر (۲) میں ر کی وہی قیمتیں ہوں جو
اسکی (۱) میں ہیں جبکہ طہ = ع۔ ب اور جبکہ طہ = ع۔ ی۔ یہ صورت
اس وقت ہوگی جبکہ

$$۱ + زجم (ع۔ ب) = ۱ + زجم (ع۔ ی) + بجم بجم ب$$

$$۱ اور ۱ + زجم (ع۔ ی) = ۱ + زجم (ع۔ ب) + بجم ب$$

$$۱ = ۱ + زجم بجم ب = ۱$$

(۱ اور ب کی ان قیمتوں کو (۲) میں درج کرنے سے ہمیں وتر
کی مطلوبہ مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + زجم طہ + قجم بجم (ط۔ ع) \dots\dots\dots (۳)$$

حاصل ہوتی ہے۔

اس نقطہ پر جس کا سمتی زاویہ ع۔ ہے تماس کی مساوات معلوم

کرنے کے لیے (۳) میں $b =$ رکھنا چاہیے چنانچہ اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{L}{r} = \text{زجم ط} + \text{جم (ط-عہ)} \dots\dots\dots (۴)$$

نتیجہ صریح۔ اگر مخروطی کی مساوات

$$\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم (ط-جہ)}$$

ہو تو اس وتر کی مساوات جو نقطوں (عہ-بہ) اور (عہ+بہ) کو ملاتا ہے (۲۱۸)

$$\frac{L}{r} = \text{زجم (ط-جہ)} + \text{قط بہ جم (ط-عہ)}$$

ہے اور عہ پر گئے عماس کی مساوات

$$\frac{L}{r} = \text{زجم (ط-جہ)} + \text{جم (ط-عہ)}$$

ہے۔

۱۶۴۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی کی

مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم ط} \dots\dots\dots (۱)$$

ہے اور فرض کرو کہ نقطہ کے محدد r, θ ط ہیں۔

فرض کرو کہ ان نقطوں کے سمتی زاویے \pm بہ ہیں جن پر کے عماس

نقطہ (r, θ) ط میں سے گذرتے ہیں۔

اس خط کی مساوات جو ان نقطوں میں سے گذرتا ہے

$$\frac{L}{r} = \text{زجم ط} + \text{قط بہ جم (ط-عہ)} \dots\dots\dots (۲)$$

ہے۔ ان نقطوں پر کے ماسوں کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ر} = زجم طہ + جم (طہ - عہ + بہ)$$

$$\frac{ل}{ر} = زجم طہ + جم (طہ - عہ - بہ) \quad \text{اور}$$

ہیں۔ چونکہ یہ ماس (۱، ط، ل) میں سے گذرتے ہیں اس لیے

$$\frac{ل}{ر} = زجم طہ + جم (طہ - عہ + بہ)$$

$$\frac{ل}{ر} = زجم طہ + جم (طہ - عہ - بہ) \quad \text{اور}$$

$$طہ = عہ + جم بہ = \frac{ل}{ر} - زجم طہ$$

مساوات (۲) میں عہ اور بہ کی بجائے اندراج کرو تو

$$\left(\frac{ل}{ر} - زجم طہ \right) \left(\frac{ل}{ر} - زجم طہ \right) = جم (طہ - طہ) \dots (۳)$$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

۱۶۵۔ ایک مخروطی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی قطبی مساوات

معلوم کرنا جبکہ ماسکے قطب ہو۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات $\frac{ل}{ر} = ۱ + زجم طہ$ ہے تو کسی نقطہ

(۲۱۹)

عہ پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = زجم طہ + جم (طہ - عہ)$$

ہے۔

اس ماس پر کسی عمودی خط کی مساوات

$$\frac{ج}{ر} = زجم (طہ + \frac{ن}{ر}) + جم (طہ + \frac{ن}{ر} - عہ)$$

$$\frac{ج}{ر} = زجم طہ - جب (طہ - عہ)$$

ہے۔

یہ عماد کی مطلوبہ مساوات ہوگی اگر ج کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ نقطہ $(\frac{ل}{ل+زجم ع})$

خط پر ہو۔ اس لیے حاصل ہونا چاہئے

$$ج = \frac{ل + زجم ع}{ل} = - زجب ع$$

$$یا ج = \frac{ل - زجب ع}{ل + زجم ع}$$

پس عماد کی مساوات

$$\frac{ل زجب ع}{ل + زجم ع} \times \frac{1}{ر} = زجب ط + جب (ط - ع)$$

۴۔ مثال ۱۔ دو نقطوں پر جن کے سمتی زاویے علی الترتیب ع اور ب ہیں ماسوں کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ر} = زجم ط + جم (ط - ع)$$

$$\frac{ل}{ر} = زجم ط + جم (ط - ب) \quad اور$$

میں۔ یہ ماس جہاں ملتے ہیں وہاں

$$جم (ط - ع) = جم (ط - ب)$$

$$ط = \frac{ع + ب}{۲}$$

پس اگر ایک مخروطی کے نقطوں ن، ق پر کے ماسوں کا

نقطہ تقاطع ت ہو تو ن، س، ت، زاویہ ن، س، ق کی تضافہ کرے گا۔ لیکن اگر مخروطی قطع زائد ہو اور نقطے مختلف شاخوں پر ہوں

میں ت 'خارجی زاویہ ن میں ق کی تصنیف کرے گا کیونکہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ن کا سمتی زاویہ (اگر ن بعید تر شاخ پر ہو) وہ زاویہ نہیں ہے جو میں ن میں سے کے ساتھ بناتا ہے بلکہ وہ زاویہ ہے جو ن میں محدودہ میں سے کے ساتھ بناتا ہے۔

مثال ۲۔ اگر ایک مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا ماس مرتب سے گ پر ملے تو زاویہ گ میں ن قائمہ ہوگا۔
اگر ن کا سمتی زاویہ ع ہو تو ن پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = زجم ط + جم (ط - ع)$$

ہے۔ یہ ماس مرتب سے جس کی مساوات ل = ز رجم ط ہے وہاں ملے گا جہاں جم (ط - ع) = ۰۔

پس نقطہ گ پر ط - ع = $\frac{ل}{ر}$
اس لیے زاویہ گ میں ن قائمہ ہے

مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی کے وتروں کے محاذی ایک ماسک پر ایک مستقل زاویہ بنے تو وتر کے سروں پر کے ماس ایک ثابت مخروطی پر ملیں گے اور وتر ایک دوسرے ثابت مخروطی کو مس کرے گا۔

ذہن کر دو کہ ۲۔ وہ زاویہ ہے جو وتر کے محاذی ماسک پر بنے۔

ذہن کر کہ وتر کے سروں کے سمتی زاویے ع - ۲ اور ط + ۲ - ۲۔

مخروطی مساوات ہوگی

ط + جم ط - ۲

$$\text{یا } \frac{\text{ل جم بہ}}{\text{ر}} = \text{ز جم بہ جم ط} + \text{جم (ط - عہ)۔۔۔۔۔ (۱)}$$

لیکن (۱) مخروطی

$$\frac{\text{ل جم بہ}}{\text{ر}} = ۱ + \text{ز جم بہ جم ط} \text{۔۔۔۔۔ (۲)}$$

کے اُس نقطہ پر کے حاس کی مساوات ہے جس کا سمتی زاویہ عہ ہے۔
پس دہرہ ہمیشہ ایک ثابت مخروطی کو سرس کرتا ہے جس کا خروج المہ بکز
ز جم بہ ہے اور وتر خاص ۲ ل جم بہ ہے۔

وتر کے سروں پر کے حاسوں کی مساواتیں

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم ط} + \text{جم (ط - عہ + بہ)}$$

$$\text{اور } \frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم ط} + \text{جم (ط - عہ - بہ)}$$

ہیں۔ یہ دونوں خط مخروطی

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم ط} + \text{جم بہ}$$

تہ ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں یعنی وہاں جہاں ط = عہ اور $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم عہ}$

+ جم بہ۔

پس وتر کے سروں پر کے حاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق مخروطی

$$\frac{\text{ل قط بہ}}{\text{ر}} = ۱ + \text{ز قط بہ جم ط} \text{۔۔۔۔۔ (۳) (۲۲۱)}$$

مخروطی (۲) اور (۳) دونوں کا ماسکہ اور مرتب وہی ہیں جو دئے ہوئے

ہیں۔

مثال ۴۔ اُس مثلث کے حاطط دائرہ کی مساوات معلوم

کہ جو ایک مکانی کے تین ماسوں سے بنتا ہے۔

فرض کرو کہ تین نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے سمتی زاوے علی الترتیب
ع، 'ب'، 'ج' ہیں۔
فرض کرو کہ مکانی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + جم ط$$

ہے۔ تب 'ا'، 'ب'، 'ج' پر کے ماسوں کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ر} = جم ط + جم (ط - ع)$$

$$\frac{ل}{ر} = جم ط + جم (ط - ب)$$

$$\frac{ل}{ر} = جم ط + جم (ط - ج)$$

ہیں۔ ب اور ج پر کے ماس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$ط = \frac{۱}{۲} (ب + ج) \text{ اور } \frac{ل}{ر} = ۲ جم \frac{۱}{۲} - جم \frac{۱}{۲}$$

ج اور ا پر کے ماس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$ط = \frac{۱}{۲} (ج + ع) \text{ اور } \frac{ل}{ر} = ۲ جم \frac{۱}{۲} - جم \frac{ع}{۲}$$

اور ا اور ب پر کے ماس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$ط = \frac{۱}{۲} (ع + ب) \text{ اور } \frac{ل}{ر} = ۲ جم \frac{ع}{۲} - جم \frac{ب}{۲}$$

اندراج سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ تین نقاط تقاطع اس دائرہ پر ہیں جس کی
مساوات

$$r = \frac{L}{\text{جم} \frac{1}{2} \text{جم} \frac{1}{2} \text{جم} \frac{1}{2}} \quad \text{جم} (ط - \frac{ع}{2} - \frac{ز}{2} - \frac{ج}{2})$$

۴۔ یہ دائرہ ہمیشہ مکانی کے ماسکہ میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۵۔ مخروطی $\frac{L}{r} = 1 + \text{جم} ط$

کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرنا۔
- پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{L}{r} = \text{جم} ط + \text{جم} (ط - ع) \dots \dots (1)$$

ہے۔ نقطہ ع، مخروطی پر لاتنا ہی پر کا نقطہ ہوگا اگر

$$1 + \text{جم} ع = 0 \quad \text{جم} ط + \text{جم} (ط - ع) \dots \dots (2)$$

مطلوبہ مساوات (۱) اور (۲) سے ع کو ساکت کرنے سے حاصل

ہوگی چنانچہ وہ

$$\left\{ \frac{L}{r} + (1 - \text{جم} ط) = \text{جم} ط \right\} \quad \text{جم} ط = \text{جم} ط \quad \text{جم} ط = \text{جم} ط$$

۶۔

(۲۷۲)

آٹھویں باب پر مثالیں

۱۔ ایک مکانی کے کسی دو ماسوں کے درمیان خارجی زاویہ ان کے نقاط تماس کے سمتی زاویوں کے فرق کا نصف ہوتا ہے۔

۲۔ ایک مکانی کے دو ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق جبکہ ماس ایک دوسرے کو ایک مستقل زاویہ پر قطع کریں ایک قطع نہ آتا ہے جس کا ماسکہ اور مرتب وہی ہیں جو ابتدائی مکانی کے ہیں۔

۳۔ اگر ایک مخروطی کے کوئی دو ماسکی وترن $ن$ اور $ق$ میں $ق$ ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ن} \times \frac{1}{ق} + \frac{1}{ق} \times \frac{1}{ن} = \frac{1}{ن \times ق} \text{ مستقل ہے۔}$$

۴۔ اگر ایک مکانی پر { 'ب' ج کوئی کتین نقطے ہوں اور ان نقطوں پر کے ماسوں سے مثلث $آ ب ج$ بنے تو ثابت کرو کہ $ن \times ب \times ج = ن \times ج \times ب$ جہاں $ن$ مکانی کا ماسکہ ہے۔

۵۔ اگر ایک ناقص کا ایک ماسکی وتر محور کے ساتھ زاویہ بناے تو ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو اس کے سروں پر کے ماسوں کے درمیان بنتا ہے

$$\frac{مس}{۱ - ز} = ۲ \text{ جب } ع$$

ہے۔

۶۔ مساوات $\frac{ل}{ر} = ۱ + ز$ کے ذریعہ ثابت کرو کہ ناقص

کی تکوین ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے ہو سکتی ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

۷۔ ایک وتر کے معاذی مخروطی کے ماسکہ پر مستقل زاویہ (۲۱) بنا ہے، وتر کے قطب کا طریق معلوم کرو، ان صورتوں میں تمیز کرو جنکے لیے $جم < = > ز$ ۔

۸۔ ایک مخروطی کا ایک وترن $ق$ ہے جو ایک ماسکہ پر قائمہ زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ن$ کے قطب کا طریق اور وہ طریق جبکہ $ن$ ق لف کرتا ہے مخروطیاں ہیں جن کے وتر خاص اور ابتدائی مخروطی کے وتر خاص میں نسبتیں علی الترتیب ۲۱:۱ اور ۱:۲۱ ہیں۔

۹۔ ایک مخروطی کا ماسکہ اور مرتب دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ
 ۱۔ اگر دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان کے مشترک
 نروں میں سے دو وتران کے مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گزریں گے۔

۱۱۔ دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہے اور اس ماسکہ میں سے
 لی وتر کھینچا گیا ہے جو مخروطیوں سے علی الترتیب n و n' اور q و q' پر
 مآبے۔ ثابت کرو کہ n و n' پر کے ماس q و q' پر کے ماسوں
 سے ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جو مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گزریں گے
 و خطوط مستقیم پر واقع ہیں، یہ خطوط علی القوائم ہوں گے اگر مخروطیوں کا
 روج المرکز ایک ہی ہو۔

۱۲۔ ایک مکانی کے ماسکہ میں سے کوئی دو وتران mn و $m'n'$
 پر کھینچے گئے ہیں۔ l پر کا ماس نقطوں m و m' پر کے ماسوں سے
 نلوں k و k' پر ملتا ہے اور l پر کا ماس ان سے g و g' پر ملتا ہے۔
 بت کرو کہ خطوط kg و $k'g'$ علی القوائم ہیں۔

۱۳۔ دو مخروطی ایک مشترک ماسکہ رکھتے ہیں جس کے گرد ایک کو
 مایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے مشترک وتروں میں سے دو ایسے مخروطیوں
 میں گزریں گے جن کا ماسکہ ثابت ماسکہ ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ $\frac{l}{r} = 1 + \text{زجم طہ کے دو ماسوں کے (جو باہم)}$

لی القوائم ہیں) نقطہ تقاطع کے طریق کی مساوات
 $r^2 (z^2 - 1) - 2l \text{ زجم طہ} + 2l^2 = 0$

۱۵۔ اگر ایک ناقص کے ماسکوں mn و $m'n'$ میں سے گزریں گے

وتران mn و $m'n'$ تو $\frac{mn}{mn} + \frac{m'n'}{m'n'} = \frac{mn}{mn} + \frac{m'n'}{m'n'}$ کے معنی پر

منحصر نہیں ہوگا۔

۱۶۔ دو مخروطی ایک ہی ماسکہ کے ساتھ بنائے گئے ہیں اور اس ماسکہ کا فاصلہ ہر ایک کے متناظر مرتب سے وہی ہے۔ اگر یہ مخروطی ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو کہ قاطع محوروں کے درمیانی زاویہ کے نصف کی جیسا کہ دگنا، خروج المرکزوں کے متکافیوں کے فرق کے مساوی ہے۔

۱۷۔ دئے ہوئے نصف قطر کا ایک دائرہ جو ایک دئے ہوئے مخروطی کے ماسکہ میں سے گزرتا ہے مخروطی کو نقطوں (ا، ب، ج، د) پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ

$$س ا \times س ب \times س ج \times س د$$

مستقل ہے۔

۱۸۔ ایک دائرہ ایک مخروطی کے ماسکہ میں سے جس کا وتر خاص ۲ ہے گزرتا ہے اور مخروطی سے چار نقطوں پر ملتا ہے جن کے فاصلے ماسکہ سے ا، ب، ج، د ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{ل} = \frac{۱}{س ا} + \frac{۱}{س ب} + \frac{۱}{س ج} + \frac{۱}{س د}$$

۱۹۔ ایک دیا ہوا دائرہ جس کا مرکز ایک مکانی کے محور پر ہے ماسکہ میں سے گزرتا ہے اور کسی مخروطی سے جس کا وتر خاص دیا گیا ہے اور ماسکہ میں ہے اور مکانی کا ایک تماس اس کا مرتب ہے چار نقطوں (ا، ب، ج، د) پر منقطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ فاصلوں (س ا، س ب، س ج، س د) کا مجموعہ مستقل ہے۔

۲۰۔ دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ میں مشترک ہے اور ان کے محاور ایک ہی سمت میں ہیں۔ ان مخروطیوں میں سے ایک پر نقطہ ن اور دوسرے پر نقطہ ق لیے گئے ہیں ایسے کہ ن س اور ق س علی التوأم ہیں۔ ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے تماس ایک مخروطی پر ملتے ہیں جس کے خروج المرکز کا مربع ابتدائی مخروطیوں کے خروج المرکزوں کے مربعوں کے

مجموعہ کے مساوی ہے۔

۲۱۔ ایک مشترک وتر خاص کے ساتھ مخروطیوں کا ایک سلسلہ مرتب کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان کے ان نقطوں کا طریق جن پر ماسک سے ماسک عمودیم وتر خاص کے مساوی ہے مساوات $ل = زجم ط$ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۲۔ اگر ایک ثابت نقطہ $و$ میں سے گذرنیوالا وتر $ون$ ہو تو $\frac{1}{ن}$ $م$ $وس$ $\frac{1}{ن}$ $س$ $و$ مستقل ہوگا جہاں $س$ مخروطی کا ایک ماسک ہے۔

۲۳۔ مخروطی مرتب کئے گئے ہیں جن کے وتر خاص مساوی ہیں اور ایک ماسک مشترک ہے۔ نیز متناظر مرتب ایک ثابت ہم ماسکی مخروطی کو لف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ مخروطی سب کے سب دو ثابت مخروطیوں کو مس کرتے ہیں جن کے وتر خاص کے متکافی علی الترتیب متغیر مخروطی اور اس کے ہم ماسک ثابت مخروطی کے وتر خاص کا مجموعہ اور فرق ہیں اور جن کا مرتب وہی ہے جو ثابت ہم ماسکی مخروطی کا ہے۔

۲۴۔ ایک مخروطی کو مرتب کیا گیا ہے جس کا ماسک اور خروج المکرز وہی

ہیں جو مخروطی $ل = ۱ + زجم ط$ کے ہیں اور یہ دو مخروطی نقطہ $ط = ع$ پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے وتر خاص کا

$$\frac{ل (۱ - ز) (۱ - ز^۲)}{ز + ۲ زجم ط + ۱} \text{ ہوگا۔}$$

۲۵۔ نقطہ $(ز، ط)$ سے مخروطی $ل = ۱ + زجم ط$ کے

ماسوں کا زوج کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان ماسوں کے زوج کی مساوات

$$\left\{ \frac{ل}{ز} - زجم ط \right\} - \left\{ ۱ - \left(\frac{ل}{ز} - زجم ط \right) \right\} = ۱$$

$$= \left[\left(\frac{r}{R} - \text{زجم طہ} \right) \left(\frac{r}{R} - \text{زجم طہ} \right) - \text{جم طہ} \right] \text{طہ}^2$$

سے ماہل ہوتی ہے۔
نیز ثابت کرو کہ متقارب

$$\frac{r}{R} = (1 - \text{ز}^2) \text{جم طہ} \pm \text{جم طہ} \sqrt{1 - \text{ز}^2}$$

ہیں۔

۲۶۔ اگر $\frac{r}{R} = 1 + \text{جم طہ}$ کے نقطوں 'ع'، 'ج' پر کے عماد نقطہ

(غہ 'فہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ ۲ فہ = عہ + جہ + جہ -

۲۷۔ اگر $\frac{r}{R} = 1 + \text{زجم طہ}$ کے ان نقطوں پر کے عماد جن کے

سمتی زاوے طہ، طہ، طہ، طہ ہیں نقطہ (غہ 'فہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ
طہ + طہ + طہ + طہ - ۲ فہ = (۱ + ۲) - ۱۱

۲۸۔ اگر $\frac{r}{R} = 1 + \text{جم طہ}$ کے ان نقطوں 'ن'، 'ق'، 'س' پر کے

عماد جن کے سمتی زاوے طہ، طہ، طہ، طہ ہیں نقطہ و (غہ 'عہ) پر ملیں تو
ثابت کرو کہ اس مثلث کے مانط دائرہ کا قطر جو 'ن'، 'ق'، 'س' پر کے عمادوں
سے بنتا ہے اس کے مساوی ہوگا جہاں اس مکانی کا ماسکہ ہے۔



نواں باب

درجہ دوم کی عام مساوات

۱۶۶ — ہم ابواب ماسبق میں دیکھ چکے ہیں کہ کسی مخروطی کی مساوات ہمیشہ درجہ دوم کی ہوتی ہے، اب ہم ثابت کریں گے کہ درجہ دوم کی ہر مساوات ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے اور نیز معلوم کریں گے کہ کسی ایسی مساوات سے اس مخروطی کی نوعیت اور محل کس طرح متعین کئے جاسکتے ہیں جس کو وہ تعبیر کرتی ہے۔

۱۶۷ — ثابت کرو کہ ہر منحنی جس کی مساوات دوسرے درجہ کی ہے ایک مخروطی ہے۔

ہم محدودوں کے محوروں کو قائم فرض کر سکتے ہیں کیونکہ اگر مساوات مائل محوروں کے حوالے سے دی گئی ہو اور اگر ہم قائم محوروں میں تبدیل کریں تو مساوات کا درجہ نہیں بدلتا [دفعہ ۵۳]۔
پس فرض کرو کہ منحنی کی مساوات

$$1) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \quad (1)$$

ہے۔
چونکہ درجہ دوم کی مساوات کی یہ عام سے عام شکل ہے اس لئے اس میں تمام ممکنہ صورتیں شامل ہیں۔

ہم رقم لا ما کو اس طرح خارج کر سکتے ہیں کہ محوروں کو ایک خاص زاویہ میں سے گھمایا جائے کیونکہ محوروں کو ایک زاویہ ط میں سے گھمانے کے لیے ہمیں لا اور ما کی بجائے علی الترتیب

لاجم طہ۔ ماجب طہ اور لاجب طہ + ماجم طہ
درج کرنا ہوگا۔

چنانچہ مساوات (۱) ہو جائے گی

(۲۲۰)

$$۱) (لاجم طہ - ماجب طہ) + ۲ = (لاجم طہ - ماجب طہ)$$

$$(لاجم طہ + ماجم طہ)$$

$$+ ب) (لاجم طہ + ماجم طہ) + ۲ گ (لاجم طہ - ماجب طہ)$$

$$+ ۲ ف) (لاجم طہ + ماجم طہ) + ج = ۰ \dots (۲)$$

(۲) میں لا ما کا سر

$$۲) ب - ۱ ا ب طہ جم طہ + ۲ = (جم طہ - جب طہ)$$

ہے اور یہ صفر ہو گا اگر

$$مس ۲ ط = \frac{۲}{ب - ۱} \dots (۳)$$

چونکہ کسی ایسے زاویہ کو معلوم کیا جاسکتا ہے جس کا تانہ کسی حقیقی

مقدار کے مساوی ہے اس لیے زاویہ طہ = $\frac{۱}{۲} مس ا - \frac{۲}{ب}$ تمام صورتوں میں

حقیقی ہے۔

اب مساوات (۲) کو لکھا جاسکتا ہے

$$۱) لا + ب ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ج = ۰ \dots (۴)$$

اگر لا اور ب میں سے کوئی بھی صفر نہیں ہے تو ہم مساوات (۴) کو شکل

$$۱) (لا + \frac{۲}{ب}) + ب (ما + \frac{۲}{ب}) = -\frac{۲}{ب} - ج = ک$$

میں لکھ سکتے ہیں 'یا مبادا کو نقطہ (-)۔ گ'۔ (ف)۔ ب' پر لینے سے

$$1 = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = گ' \quad (۵)$$

اگر مساوات (۵) کا بائیں جانبی رکن صفر ہو تو مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی [۱۳۵]۔
لیکن اگر مساوات (۵) کا بائیں جانبی رکن صفر نہ ہو تو ہمیں مساوات

$$1 = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$$

حاصل ہوتی ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ مساوات ایک ناقص کو تعبیر کرے گی اگر دونوں نسب نامہ مثبت ہوں اور ایک زائد کو تعبیر کرے گی اگر ایک نسب نامہ منفی اور دوسرا مثبت ہو۔
اگر دونوں نسب نامہ منفی ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں مساوات کو پورا نہیں کریں گی۔ اس صورت میں معنی ایک خیالی ناقص ہوتا ہے۔

(۲۲۸) پھر فرض کرو کہ ۱ یا ب صفر ہے، مثلاً فرض کرو ۱ صفر ہے۔
[۱ اور ب دونوں بوجہ دفعہ ۵۳ صفر نہیں ہو سکتے] تب مساوات (۴) لکھی جاسکتی ہے

$$ب (ما + \frac{ف}{ب}) = ۲ گ - لا - ج + \frac{ف}{ب} \quad (۶)$$

اگر گ = ۰ تو یہ مساوات متوازی خطوط کے ایک زوج کو تعبیر کرتی ہے جو منطبق ہونگے اگر گ = ۰ اور نیز ف = ب ج = ۰۔
اگر گ صفر نہیں ہے تو ہم مساوات کو لکھ سکتے ہیں

$$(ما + \frac{ف}{ب}) = ۲ \frac{گ}{ب} - (لا - \frac{ف}{ب} ج + \frac{ف}{ب} گ)$$

جو ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور محور لا کے متوازی ہے۔
پس تمام صورتوں میں وہ منحنی جو درجہ دوم کی عام مساوات سے
تعبیر ہوتا ہے مخروطی ہے۔

۱۶۸۔ ایک مخروطی کے مرکز کے محدود معلوم کرنا۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب محدودوں کا مبداء کسی مخروطی کا مرکز ہوتا ہے تو
مخروطی کی مساوات میں وہ رقبے شامل نہیں ہوتیں جن میں متغیروں کا درجہ
پہلا ہوتا ہے۔ پس مخروطی کا مرکز معلوم کرنے کے لیے مبداء کو کسی نقطہ (لا، ما)
پر تبدیل کرنا چاہئے اور لا، ما کا ایسا انتخاب کرنا چاہئے کہ احتمالہ شدہ
مساوات میں لا اور ما کے سر صفر ہو جائیں۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$۱ لا + ۲ ھ + ۳ ب + ۴ ا + ۵ گ + ۶ لا + ۷ ف + ۸ ما + ۹ ج = ۰$$

ہے۔

(لا، ما) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات
اس طرح حاصل کی جاسکتی ہے کہ لا کی بجائے لا + لا اور ما کی بجائے ما + ما درج
کیا جائے چنانچہ احتمالہ شدہ مساوات ہوگی

$$۱ (لا + لا) + ۲ ھ + ۳ (لا + لا) + ۴ (ما + ما) + ۵ ب + ۶ (ما + ما) + ۷ گ + ۸ (لا + لا) + ۹ (لا + لا) + ۱۰ ج = ۰$$

$$۲ + ۳ ف + ۴ (ما + ما) + ۵ ج = ۰$$

یا

$$۱ لا + ۲ ھ + ۳ ب + ۴ ا + ۵ گ + ۶ لا + ۷ ف + ۸ ما + ۹ ج = ۰$$

اس مساوات میں لا اور ما دونوں کے سر صفر ہونگے اگر لا اور ما کو اسطرح

منتخب کیا جائے کہ

- (۱) لا + م + گ = ۰
 اور (۲) لا + ب + م + ف = ۰
 تب (لا، م) کو مبداء، مانکر اس کے حوالے سے استحال شدہ مساوات (۲۲۹)
 لا + ب + م + ۲ = لا + م + ج = ۰ (۳)

ہوگی جہاں

ج = لا + ۲ = لا + م + ب + م + گ لا + ۲ = لا + م + ف + م + ج ... (۴)
 پس مخروطی کے مرکز کے محدد لا اور م کی وہ قیمتیں ہیں جو مساواتوں
 (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتی ہیں۔

اس لیے مرکز نقطہ

$$\left(\frac{م - ب}{ب - ا}, \frac{گ - ف}{ف - ا} \right)$$

ہے۔ اگر ا ب = ۰۔ تو مرکز کے محدد لا متناہی ہوتے ہیں اور اس لیے
 منحنی ایک مکانی ہوتا ہے [دفعہ ۱۵۸]
 لیکن اگر م ف = ب گ = ۰۔ اور ا ب = ۰۔ یعنی اگر

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ف} = \frac{گ}{ف}$$

تو مساواتوں (۱) اور (۲) سے ایک ہی خط مستقیم تعبیر ہوتا ہے اور اس
 خط کا کوئی نقطہ مرکز ہے۔ اس صورت میں طریق متوازی خطوط کا ایک

زوج ہے۔

اوپر کی تحقیق میں محاور قائم یا مائل ہو سکتے ہیں۔
 آئندہ وہ نتائج جو مائل محوروں کے لیے درست رہتے ہیں علالت
 (سہ) کے ذریعہ دکھائے جائیں گے۔

۱۶۹۔ دفعہ ماسبق کی مساواتوں (۱) اور (۲) کو علی الترتیب لا اور م

سے ضرب دو اور مجموعہ کو (۴) کے بائیں جانبی رکن سے تفریق کرو تو

$$\text{ج} = \text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ما} + \text{ج} \dots \dots \dots (۵)$$

$$\text{گ} = \frac{\text{ف} - \text{ب} - \text{گ}}{۱ - \text{ب} - ۲} + \frac{\text{ف} - \text{ا} - \text{گ}}{۱ - \text{ب} - ۲} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} + ۲ - \text{ف} - \text{ا} - \text{گ} - \text{ب} - \text{گ} - \text{ج}}{۱ - \text{ب} - ۲} \dots (۵)$$

یا مساواتوں (۱) اور (۲) سے (۵) سے لا، ما کو ساقط کرنے پر فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} \text{گ} & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ک} & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \end{vmatrix} = ۰$$

$$۱۷۰ - \text{ج} - \text{ا} - \text{ب} + \text{ج} + ۲ - \text{ف} - \text{ا} - \text{گ} - \text{ب} - \text{گ} - \text{ج} = ۰ \text{ کو بالعموم} \quad (۲۳۰)$$

علامت ۷ سے تعبیر کیا جاتا ہے اور اس کو

$$\text{ا} + \text{لا} + ۲ = \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{گ} + ۲ + \text{ف} + \text{ا} + \text{ج}$$

کا مینر کہتے ہیں۔

۵ = ۰ سے وہ شرط حاصل ہوتی ہے کہ محروطی دو خطوط مستقیم ہو سکے۔

کیونکہ اگر ۵ صفر ہے تو ج صفر ہے اور اس صورت میں دفعہ ۱۶۸ کی مساوات (۳) دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔

یہ وہ شرط ہے جو ہم نے دفعہ ۳۷ میں معلوم کی تھی۔

۱۷۱۔ اس محروطی کے محوروں کا محل اور مقدار معلوم کرنا جسکی

مساوات $\text{ا} + \text{لا} + ۲ = \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} = ۱$ ہے۔

اگر ایک محروطی کسی اہم مرکز دائرہ سے منقطع ہو تو نقاط تقاطع میں گزرنے والے قطر محروطی کے محوروں کے ساتھ مساوی المیلان ہوں گے اور وہ منطبق ہوں گے اگر دائرہ کا نصف قطر محروطی کے کسی ایک نیم محور کے مساوی ہو۔

وہ خطوط جو مبداء میں سے اور محرومی اعدادائزہ کے تقاطع تقاطع میں سے گذرتے ہیں مساوات

$$(1) \left(\frac{1}{r} - 1\right) \text{ لا} + 2 \approx \text{لا} + \text{ما} + \left(\frac{1}{r} - \text{ب}\right) \text{ ما} = 0 \dots \dots (1)$$

سے حاصل ہوتے ہیں اگر دائرہ کی مساوات لا + ما = ر ہو۔
یہ خطوط منطبق ہونگے اگر

$$(2) \left(\frac{1}{r} - 1\right) \left(\frac{1}{r} - \text{ب}\right) - \text{ما} = 0 \dots \dots (2)$$

اور اس صورت میں وہ محرومی کے محوروں میں سے ایک یا دوسرے پر منطبق ہونگے۔

پس محرومی کے نیم محوروں کے طول مساوات (۲) کی اصلیں ہیں
یعنی مساوات

$$(3) \dots \dots \dots \frac{1}{r} - (1 + \text{ب}) \frac{1}{r} + \text{ب} - \text{ما} = 0 \dots \dots (3)$$

کی اصلیں ہیں۔

اب (۱) کو $\left(\frac{1}{r} - 1\right)$ سے ضرب دو تب اگر $\frac{1}{r}$ مساوات (۲) کی
اصلوں میں سے کوئی ایک ہو تو

$$\left(\frac{1}{r} - 1\right) \text{ لا} + 2 \approx \left(\frac{1}{r} - 1\right) \text{ لا} + \text{ما} + \text{ما} = 0$$

اس لیے (۳) میں مساوات (۲) کی کوئی ایک اصل درج کریں تو
پس اگر ہم (۳) میں مساوات (۲) کی کوئی ایک اصل درج کریں تو
متناظر محوروں کی مساوات حاصل ہوگی۔

اوپر کی تحقیق میں ہم نے محوروں کو قائم فرض کیا ہے۔ لیکن اگر محور زیادہ
سہ پر مائل ہوں تو ہمیں قدرے ترمیم کرنی ہوگی کیونکہ نصف قطر کے دائرہ کی

مساوات $لا + ۲ لا + ما + جم + سہ + ما = ۲$ ہوگی۔

۱۷۲۔ ایک مکانی کا محور اور وتر خاص معلوم کرنا۔

اگر مساوات

$لا + ۲ لا + ما + ب + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$
ایک مکانی کو تعبیر کرے تو دوسرے درجہ کی ارقام کامل مربع ہونگی [دفعہ ۱۷۲]۔
اس لیے مساوات

(عہ لا + بہ ما) + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰ (۱)
کے مثل ہے جہاں $عہ = ۱$ اور $بہ = ۲$ ۔

(۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خط $عہ لا + بہ ما = ۰$ پر عمود کا مربع ایسے ملتا ہے جیسے خط $۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$ پر کا عمود۔ ان خطوط کا علی القوائم ہونا ضروری نہیں ہے لیکن ہم مساوات (۱) کو شکل

(عہ لا + بہ ما + لہ) = ۲ (لا + لہ - عہ - گ) + ۲ (لہ - ب - ف) + لہ - ج
میں لکھ سکتے ہیں اور وہ دو خطوط مستقیم جن کی مساواتیں
 $عہ لا + بہ ما + لہ = ۰$ اور $۲ (لا + لہ - عہ - گ) + ۲ (لہ - ب - ف) + لہ - ج = ۰$
ہیں علی القوائم ہونگے اگر

$عہ (لہ - عہ - گ) + (بہ - لہ - ف) = ۰$
یا اگر $لہ = (عہ گ + بہ ف) \setminus (عہ + بہ)$

اب

$عہ لا + بہ ما + لہ = ۰$ اور $۲ (عہ لہ - گ) + لا + ۲ (بہ لہ - ف) + لہ - ج = ۰$
کو علی الترتیب لا اور ما کے نئے محور قرار دو تو حاصل ہوگا

$ما = ۳ ع لا$

اور ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک مکانی کی مساوات ہے جو اس کے محور اور رأس پر کے تماس کے حوالے سے حاصل ہوتی ہے۔

وتر خاص معلوم کر نیکے لیے ہم مساوات کو شکل

$$\left\{ \frac{(ع-ل+ب+ما+ل)^2}{\sqrt{(ع-ل+ب+ما+ل)^2 + (ب-ل-ف)^2}} \right\} = ع$$

$$\frac{\sqrt{(ع-ل+ب+ما+ل)^2 + (ب-ل-ف)^2}}{ع} = ع$$

اس لیے (۱) مکانی ہے جس کا محور

$$ع-ل+ب+ما+ل = ۰$$

ہے اور جس کا وتر خاص

$$\frac{(ع-ل+ب+ما+ل)^2}{(ع-ل+ب+ما+ل)^2 + (ب-ل-ف)^2} = \frac{(ع-ل+ب+ما+ل)^2}{(ع-ل+ب+ما+ل)^2 + (ب-ل-ف)^2}$$

ہے کیونکہ $ل = (ع-ل+ب+ما+ل) \sqrt{(ع-ل+ب+ما+ل)^2 + (ب-ل-ف)^2}$

۳۔ اب ہم ان مخروطیوں کا محل اور انکی نوعیت معلوم کریں گے جن کی مساواتیں حسب ذیل ہیں:

$$(۱) ل = ۱۰ - ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ - ۱۴ + ۱۵ = ۰$$

$$(۲) ل = ۱۵ - ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ - ۱۹ + ۲۰ = ۰$$

$$(۳) ل = ۲۶ - ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ - ۳۰ + ۳۱ = ۰$$

$$(۴) ل = ۱۵ - ۱۶ + ۱۷ - ۱۸ + ۱۹ - ۲۰ = ۰$$

(۱) مرکزوں کو معلوم کرنے کے لیے مساواتیں [دفعہ ۱۶۸ (۱)، (۲)]

$$ل = ۱۴ - ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ - ۱۸ = ۰$$

$$ل = ۱۴ - ۱۵ + ۱۶ - ۱۷ = ۰$$

ہیں۔ ان سے $ل = ۲$ اور $ما = ۳$ ۔ اس لیے مرکز نقطہ (۳، ۲) ہے۔

مرکز میں سے گزرنیوالے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات [دفعہ ۱۶۹]

$$ل = ۱۴ - ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ - ۱۸ + ۱۹ - ۲۰ + ۲۱ - ۲۲ = ۰$$

ہے یا
 پس مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ (۳، ۲) پر متقاطع ہوتے ہیں۔ وہ محور نا کو وہاں قطع کرتے ہیں جہاں $x = 20 - 2y$ یعنی جہاں $20 = 2y$ اور جہاں $y = 10$ ۔

$$(2) \quad x = 5 - 2y + 2x - 20 = 15 - 2y$$

مرکز معلوم کر نیکیے لیے مساواتیں

$$2x = 5 - 2y + 2x - 20 = 15 - 2y$$

ہیں چنانچہ $2x = 5 - 2y$ اور $x = 2.5 - y$ ۔

مرکز میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات

$$x = 5 - 2y + 2x - 20 = 15 - 2y$$

$$x = 5 - 2y + 2x - 20 = 15 - 2y$$

ہو گئی۔

اس مخروطی کے نیم محور مساوات

(۲۳۳)

$$\frac{1}{r} - (1 + b) \frac{1}{r} + 1b - 2 = 0 \quad [دفعہ ۱، (۳)]$$

کی اصلیں ہیں۔

$$0 = \frac{25}{r} - 1 + \frac{2}{r} - \frac{1}{r}$$

$$0 = 2 - 2r + 2r - 1$$

$$\therefore 2 - 2r + 2r - 1 = 0$$

اس لیے نخنی ایک زائد ہے جس کا حقیقی نیم محور $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ ہے اور خیالی نیم محور

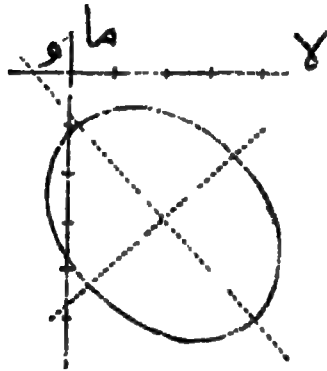
$$\frac{1}{2}\sqrt{13}$$

$$\frac{13}{36} = \frac{25}{180} = 1 + b \quad \text{کی اسیلیں ہیں اور}$$

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{225} - \frac{29}{900} = 1 + b - c$$

$$0 = 13 - 36 + 2 + 2 = 0$$

اس لیے نیم محوروں کے مربع ۹ اور ۴ ہیں۔



محور اعظم کی مساوات [دفعہ ۱، (۲)]

$$= 6 \frac{1}{15} + 4 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{5} \right)$$

$$= 6 \frac{2}{3} + 4 \frac{2}{9}$$

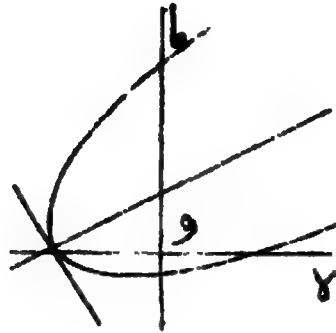
یا
ہے۔

$$= 1 - 6 \frac{2}{3} - 4 \frac{2}{9} - (6 \frac{1}{3} - 5) \quad (۴)$$

اس مساوات کو شکل

$$1 + 1 = (6 \frac{1}{3} - 5) + 4 \frac{2}{9} + (6 \frac{2}{3} - 29) + 1 + 1$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔



(۲۳۵)

$$\text{خطوط } 0 = 12 + 6x - 5y$$

$$\text{اور } 0 = 1 + 2y + 6(12 - 2y) + 5(1 + 2y) \text{ علی القوم ہیں اگر}$$

$$0 = 10 - 5y + 72 + 12y - 12y + 60 + 10y + 12y$$

یہ اگر لے = 1

اس لیے دی ہوئی مساوات

$$(1) \dots\dots\dots \frac{1}{13} = \frac{12 + 6x - 5y}{13}$$

کے مائل ہے۔ اس لیے مکانی کے محور کی مساوات $0 = 12 + 6x - 5y$ ہے اور

اس پر کے ماس کی مساوات $0 = 12 + 6x - 5y$ ہے۔

منحنی کا ہر نقطہ صریحاً خط $0 = 12 + 6x - 5y$ کی مثبت جانب ہونا چاہئے

کیونکہ مساوات (۱) کی دائیں جانب ہمیشہ مثبت ہے۔

۱۷۷۔ مخروطی کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرنا۔

ہم (دفعہ ۱۷۷ میں) دیکھ چکے ہیں کہ مخروطی کی مساوات اور متقاربوں کی

مساوات میں صرف ایک مستقل مقدار کا فرق ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$1 + 2 = 2 + 3 = 3 + 4 = \dots = 0 \quad (1)$$

ہے۔ تب متقاربوں کی مساوات ہوگی

$$1 + 2 = 2 + 3 = 3 + 4 = \dots = 0 \quad (2)$$

بشرطیکہ ہم نہ کو ایسی قیمت دیں کہ وہ (۲) کو خطوط مستقیم کا ایک زوج بنا دے۔

وہ شرط کہ (۲) خطوط مستقیم کے زوج کو تعبیر کرے یہ ہے کہ [دفعہ

[۱۷۱]

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(15 - 12) - 2(5 - 12) + 3(10 - 12) = 3 + 14 - 6 = 11$$

اس لیے (۱) کے متقاربوں کی مساوات

$$1 + 2 = 2 + 3 = 3 + 4 = \dots = 0 \quad (3)$$

ہے۔

دو فردی قطعات زائد کی مساواتوں اور ان کے متقاربوں کی مساوات میں صرف مستقلات کا فرق ہوگا جو ایک دوسرے کے مساوی مگر علامت میں مختلف ہوں گے [دفعہ ۱۵۳] اس لیے (۱) کے فردی زائد کی مساوات

(۲۳۶)

$$1 + 2 = 2 + 3 = 3 + 4 = \dots = 0 \quad (4)$$

ہے۔

نتیجہ صریح۔ دو خطوط جو مساوات

$$1 + 2 = 2 + 3 = 3 + 4 = \dots = 0$$

تعبیر ہوتے ہیں فردی کے متقاربوں کے متوازی ہوتے ہیں۔

$$1 + 2 = 2 + 3 = 3 + 4 = \dots = 0$$

معلوم کئے جاسکتے ہیں۔

مبدأ کو مخروطی کے مرکز پر تبدیل کرنے سے مساوات

$$1) \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا} + 2 \text{ ب} + 2 \text{ گ} + 2 \text{ ف} + 2 \text{ م} + 2 \text{ ج} = 0$$

ہو جاتی ہے $1) \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا} + 2 \text{ ب} + 2 \text{ م} + 2 \text{ ج} = 0$ (۱)

$$\text{جہاں } \frac{\Delta}{1 \text{ ب} - 2} = 2 \text{ ج} \dots\dots\dots (2)$$

اب دفعہ ۱ کی رُو سے مخروطی (۱) کے نیم محوروں کے مربع مساوات

$$2) \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا} + 2 \text{ ب} + 2 \text{ م} + 2 \text{ ج} = 0$$

کی اصلیں ہیں، یا (۲) سے

$$2) \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا} + 2 \text{ ب} + 2 \text{ م} + 2 \text{ ج} = 0$$

کی اصلیں ہیں۔

$$\text{مثال ۱۔ مخروطی } 5 \text{ لا}^2 + 6 \text{ لا} + 5 \text{ م} + 12 \text{ لا} + 12 \text{ م} - 12 = 0$$

کے محوروں کے طول معلوم کرو۔

$$\text{یہاں } 1 \text{ ب} - 2 = 16 \text{ اور } \Delta = 192$$

اس لیے نیم محوروں کے مربعوں کے لیے مساوات

$$16 \times 16 - 192 = 16 \times 16 + 192 = 0$$

ہے۔ اس لیے

$$16 \times 16 - 192 = 16 \times 16 + 192 = 0$$

نیم محوروں کے طول 16 اور 16 ہیں۔

$$\text{مثال ۲۔ مخروطی لا}^2 - 3 \text{ لا} + 3 \text{ م} + 10 \text{ لا} - 10 \text{ م} + 50 = 0$$

کے محوروں کے طول معلوم کرو۔

$$\text{یہاں } 1 \text{ ب} - 2 = \frac{5}{4} \text{ اور } \Delta = -\frac{45}{4}$$

اس لیے نیم محوروں کے مربعوں کے لیے مساوات

$$r_1^2 - r_2^2 = 20 \dots$$

ہے اور اس لیے $r_1^2 = 60$ یا $r_2^2 = 12$
اس لیے محرومی کی مساوات سادہ ترین شکل میں

$$1 = \frac{r_1^2}{12} - \frac{r_2^2}{60}$$

ہے۔

نویں باب پرشالیں

(۲۳۸)

۱۔ حسب ذیل منحنیوں کے مراکز معلوم کرو:

$$(1) \quad 3x^2 - 5x + 6y^2 + 11y - 13 = 0$$

$$(2) \quad 3x^2 - 5x + 6y^2 + 11y - 13 = 0$$

$$(3) \quad 3x^2 - 5x + 6y^2 + 11y - 13 = 0$$

نیز مرکزوں میں سے گزرنے والے محوروں کے حوالے سے ان منحنیوں کی
مساواتیں معلوم کرو۔

۲۔ حسب ذیل مساواتوں سے کون سے منحنی تعمیر ہوتے ہیں؟

$$(1) \quad 3x^2 - 5x + 6y^2 + 11y - 13 = 0$$

$$(2) \quad 3x^2 - 5x + 6y^2 + 11y - 13 = 0$$

$$(3) \quad 3x^2 - 5x + 6y^2 + 11y - 13 = 0$$

$$(4) \quad 3x^2 - 5x + 6y^2 + 11y - 13 = 0$$

۳۔ حسب ذیل منحنیوں کو مرتبہ معلوم کرو:

$$(1) \quad 3x^2 - 5x + 6y^2 + 11y - 13 = 0$$

$$(2) \quad 3x^2 - 5x + 6y^2 + 11y - 13 = 0$$

$$(3) \quad 3x^2 - 5x + 6y^2 + 11y - 13 = 0$$

$$(4) \quad 3x^2 - 5x + 6y^2 + 11y - 13 = 0$$

$$(۵) \quad ۰ = ۲ + ۶۲ + ۱۱۲ + ۲(۶۳ + ۱۱۲)$$

$$(۶) \quad ۰ = ۶۴ + ۱۱۰ + ۶۲ - ۶۱۱ - ۱۱۲$$

$$(۷) \quad ۰ = ۱۱۱۶ + ۶۱۱۰ - ۱۱۱۳۰ - ۶۱۱۹ + ۶۱۱۲ + ۱۱۱۲$$

۴۔ اگر ایک مخروطی کے دو تراش ایک دوسرے کی تنصیف کریں تو ثابت کرو کہ ان کا نقطہ تقاطع مخنی کا مرکز ہونا چاہیے۔

۵۔ ثابت کرو کہ مخروطی

$$۱۰ = (۱ + ۶۲) + (۳ - ۶۲ + ۱۱۲)$$

کے نیم محوروں کا حاصل ضرب اکائی ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ ناقص

$$۰ = ۴ + ۶۲ - ۱۱۲ - ۶۲ + ۱۱۲$$

کے نیم محوروں کا حاصل ضرب $\frac{۲}{۳}$ ہے اور اس کے محوروں کی مساوات

$$۰ = ۸ - ۶۸ + ۱۱۲ - ۱۱۲$$

۷۔

۷۔ ل کی کس قیمت کے لیے مساوات

(۲۳۹)

$$۰ = ۹ - ۶۶ + ۱۱۳ - ۱۱۲ - ۱۱۲$$

خطوط مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرے گی؟

۸۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس کے متقارب خطوط ۱۱۲

۰ = ۵ - ۶۳ + ۱۱۵ اور ۰ = ۸ - ۶۳ + ۱۱۵ ہیں اور جو نقطہ (۱ - ۱) میں سے گزرتا ہے۔

$$۹۔ مخروطی ۱۱۳ - ۱۱۲ - ۱۱۲ - ۱۱۲ + ۱۱۲ - ۱۱۲ = ۰$$

کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرو اور نیز اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جس کے متقارب وہی ہیں اور جو نقطہ (۲، ۲) میں سے گزرتا ہے۔

$$۱۰۔ زائد ۱۱۶ - ۱۱۲ - ۱۱۲ - ۱۱۲ - ۱۱۲ - ۱۱۲ = ۰$$

کے متقارب معلوم کرو اور نیز مزدوج زائد کی مساوات معلوم کرو۔

۱۱۔ اگر $۱ + ۲ = ۳$ لا + ما + ب ما = ۱ اور $۱ + ۲ = ۳$ لا + ما + ب ما = ۱
ایک ہی محرومی کو تعبیر کریں اور محاورہ قائم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(۱ - ب) + ۲ = ۳ (۱ - ب) + ۲ = ۳$$

۱۲۔ ثابت کرو کہ محوروں کے تمام محلوں کے لیے بشرطیکہ وہ قائم رہیں

اور پیدا نہ ہونے کے مساوات

$۱ + ۲ = ۳$ لا + ما + ب ما + ۲ گ لا + ف ما + ج = ۰ میں گ + ف
کی قیمت مستقل رہتی ہے۔

۱۳۔ ایک دئے ہوئے خط کے کسی نقطہ سے دو دائروں میں سے ہر ایک کے
ماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وتر ماس کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک زائد ہے
جس کے متقارب دئے ہوئے خط پر اور اس خط پر عمود ہیں جو دائروں کے مرکزوں
ملا تے ہیں۔

۱۴۔ ایک متغیر دائرہ ہمیشہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرتا ہے اور ایک
محرومی کو نقطوں ف، ق، س، پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$وف \times وق \times و س = و س$$

(دائرہ کا نصف قطر)

مستقل ہے۔

۱۵۔ اگر $۱ + ۲ = ۳$ لا + ما + ب ما = ۱ اور $۱ + ۲ = ۳$ لا + ما + ب ما = ۱
دو محرومیوں کی مساواتیں ہوں تو قائم محوروں کی کسی تبدیلی کی وجہ سے $۱ + ۲ = ۳$
ب + ج = ۲ + ۳ نہیں بدلیگا۔

۱۶۔ ل کی مختلف قیمتوں کے لیے قائم زائدوں لا، ما، ۲ لا، لا، لا، لا کے (۲۴۰)

راسوں کا طریق وہ منحنی ہے جس کی مساوات $(۱ + ۲) = ۳ (۱ - ۲) = ۰$ ہے۔

۱۷۔ اگر $۱ + ۲ = ۳$ لا + ما + ب ما + ۲ گ لا + ف ما + ج = ۰ دو خطوط مستقیم
کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ مبدا سے ان کے نقطہ تقاطع کے فاصلہ کا مربع

$$(ج ۱ - گ ۲ + ب ۳ - ف ۴)$$

$$۱ ب - ۲ ج$$

۱۸۔ اگر $۱ لا + ۲ ما + ۳ با + ۴ گا + ۵ فا + ۶ ج = ۰$ ایک
قائم زائد ہو تو ثابت کرو کہ اس کے متقاربوں کے حوالے سے
اس کی مساوات $۲ (۱ ب - ۲ ج) + ۳ لا - ۴ ما - ۵ فا = ۰$ ہوگی۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ مخروطی $۱ لا + ۲ ما + ۳ با + ۴ گا + ۵ فا + ۶ ج = ۰$ کے متقاربوں کی مساوات
ب $۱ لا - ۲ ما + ۳ با + ۴ گا + ۵ فا = ۰$ ہے جہاں

$۴ لا + ۵ ما + ۶ با + ۷ گا = ۰$ اور $۵ ما + ۶ با + ۷ گا + ۸ فا = ۰$ ثابت کرو کہ وہ منحنی جو ساداتوں

$۱ لا + ۲ با + ۳ ج = ۰$ اور $۲ با + ۳ ج + ۴ ت = ۰$ سے حاصل ہوتا ہے مکافی ہے جس کا وتر خاص

$$(۱ ب - ۲ ج)$$

$$(۱ + ۲ ج)$$

۲۰۔



دسواں باب

متفرق مسائل

(۲۳۱)

۱۷۷۔ ہم (صفحہ ۱۶۷) میں ثابت کر چکے ہیں کہ وہ منہی جو درجہ دوم کی مساوات سے تعبیر ہوتا ہے ہمیشہ ایک مخروطی ہوتا ہے۔
ہم اس پورے باب میں مخروطی کی مساوات کو

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + u^2 + v^2 + g^2 + f^2 + m^2 + j^2 = 0$$

فرض کریں گے الا انکہ اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔
اس مساوات کے دائیں جانب جو جملہ ہے اس کو بعض اوقات علامت
فہ (لا، ما) سے تعبیر کیا جائے گا۔

۱۷۸۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو ایک مخروطی کے
دو نقطوں میں سے گزرے اور نیز کسی نقطہ پر مماس کی مساوات
معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مخروطی پر دو نقطے (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔

$$\{ (لا-لا) (لا-لا) + (لا-لا) (لا-لا) \} + \{ (لا-لا) (لا-لا) + (لا-لا) (لا-لا) \}$$

+ ب (ا۔ ما) (ما۔ ما) = ا لا + ۲ لا + ب ما + گ لا + ف ما + ج

(۱)

کو مختصر کیا جائے تو معلوم ہو گا کہ وہ درجہ اول کی مساوات ہے، اور اس لیے وہ کسی خاص خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر ہم مساوات (۱) میں لا = لا اور ما = ما رکھیں تو دائیں جانبی رکن متوازن معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن کے معدوم ہونے کی وجہ یہ ہے کہ نقطہ (لا، ما) منحنی پر ہے۔ اس لیے نقطہ (لا، ما) خط مستقیم (۱) پر واقع ہے اسی طرح نقطہ (لا، ما) بھی اس خط پر واقع ہے۔

بائیں نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما) میں سے گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات (۱) ہے اور یہ مساوات

۱ لا (لا + لا) + ۲ ما (لا + لا) + ۳ لا (لا + لا) + ب ما (ما + ما) (۲)

+ گ لا + ف ما + ج = ا لا + ۲ لا + ۳ لا (لا + لا) + ب ما + گ لا + ف ما + ج

میں تحول ہوتی ہے۔

نقطہ (لا، ما) پر حماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات (۲) میں لا = لا اور ما = ما رکھتے ہیں چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

۱ لا + ۲ لا + ۳ لا (لا + لا) + ب ما + گ لا + ف ما + ج

= ا لا + ۲ لا + ۳ لا + ب ما

اس مساوات کے طرفین میں ۲ گ لا + ف ما + ج جمع کرو تو چونکہ نقطہ (لا، ما) منحنی پر ہے اس لیے بائیں جانبی رکن معدوم ہو گا اور حماس کی

مساوات شکل

۱ لا + ۲ لا + ۳ لا (لا + لا) + ب ما + گ لا + ف ما + ج

+ ج = ۰ (۳)

میں حاصل ہوگی۔

یہ تقابلی توجہ ہے کہ نقطہ (لا، ما) پر کے حماس کی مساوات منحنی کی

مساوات سے اس طرح حاصل ہو جاتی ہے کہ لا کی بجائے لاا، لاا کی بجائے لااا اور لاا کی بجائے لاااا۔

۱۷۹۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خط مستقیم ایک مخروط کا

ماس ہو سکے۔

فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات

ل لا + م ما + ن نا = ۰ (۱)

ہے۔ ان خطوط مستقیم کی مساوات جو مبدأ کو ان نقطوں سے ملانے ہیں

یہاں خط (۱) منحنی فہ (لا، ما) = ۰ کو قطع کرتا ہے مساوات (دفعہ ۳۸)

لاا + لاا + ما + ما = ۰ (۲)

ہے۔ اب اگر خط (۱) مخروطی فہ (لا، ما) = ۰ کا ماس ہے تو وہ مخروطی کو

منطبق نقطوں پر قطع کرے گا اور اس لیے خطوط (۲) منطبق ہونے چاہئیں

اس کے لیے شرط ہے

(۱) (ن - ۲) ل (ن + ج) ل (ب ن - ۲) ف م (ن + ج) م

= (ن - ۲) ف ل (ن - ۲) گ م (ن + ج) ل م

یا ل (ب ج - ن) + م (ج و - گ) + ن (ا ب - ۲) + م (ن - ۲) گ ف

+ ۲ ل (ن - ۲) ف گ + ۲ ل م (ف گ - ج) = ۰ (۳)

اس مساوات (۳) کو شکل

مجبوراً ۶، ۷، ۱۰۰، ۱۱۹ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ قطبی
کی مساوات اُسی شکل کی ہوتی ہے جو ماس کے مساوات کی ہے۔

پس نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات
ولا لا + = (ما لا لا ما) + ب ما ما + گ (لا لا لا) + ف (ما + ما)

ج + = ۰

یا لا (لا لا + = ما + گ) + (لا + ب ما + ف)

گ لا + ف ما + ج = ۰

۴۔ مبداء کے قطبی کی مساوات کو اوپر کی مساوات میں لا = ما = بیکھر (۲۴۴)
ماصل کیا جاتا ہے چنانچہ یہ مساوات
گ لا + ف ما + ج = ۰

۱۸۱۔ اگر دو نقطے 'ف' 'ق' ایسے ہوں کہ ایک مخروطی کے لحاظ
سے 'ف' کے قطبی پر 'ق' واقع ہو تو اُسی مخروطی کے لحاظ سے 'ق'
کے قطبی پر 'ف' واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ 'ف' کے محدد لا، ما اور 'ق' کے محدد لا، ما ہیں۔
'ف' کے قطبی کی مساوات ہے

ولا لا + = (ما لا لا ما) + ب ما ما + گ (لا لا لا) + ف (ما + ما)

ج + = ۰

اب چونکہ نقطہ (لا، ما) 'ف' کے قطبی پر ہے اس لیے

ولا لا + = (ما لا لا ما) + ب ما ما + گ (لا لا لا) + ف (ما + ما)

ج + = ۰

اس نتیجہ کے تشاکل سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ یہ وہ شرط بھی ہے کہ ق کا قطبی ف میں سے گزرے۔

اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ مرا پر ملیں تو خط ف، ق کا قطب مرا ہوگا۔ چونکہ مرا، ف کے قطبی پر ہے اس لیے مرا کا قطبی ف میں سے گزرے گا اور اسی طرح مرا کا قطبی ق میں سے بھی گزرے گا اس لیے اس کو خط ف، ق ہونا چاہئے۔

اگر مخروطی کا کوئی وتر ایک ثابت نقطہ ق میں سے کھینچا جائے اور اس وتر کا قطب ف ہو تو چونکہ ق، ف کے قطبی پر ہے اس لیے نقطہ ف ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہوگا یعنی ق کے قطبی پر۔

تعریف۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے دو نقطوں کو اس وقت

مزدوج کہا جاتا ہے جبکہ ہر ایک دوسرے کے قطبی پر واقع ہو۔

تعریف۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے دو خطوط مستقیم کو اس وقت

مزدوج خطوط کہا جاتا ہے جبکہ ہر ایک دوسرے کے قطب میں سے گزرے۔

مزدوج قطر حسب تعریف دفعہ ۱۲۷ مرکز میں سے گزرنے والے مزدوج خطوط ہوتے ہیں۔

ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ دو خطوط مستقیم

$$ل، لا + م، ما + ن، نا = ۰$$

$$ل، لا + م، ما + ن، نا = ۰$$

اور

مخروطی نہ (لا، ما) = ۰ کے لحاظ سے مزدوج ہوں، طریقہ حسب ذیل ہے۔

فرض کرو کہ ل، لا + م، ما + ن، نا = ۰ کا قطب (لا، ما) ہے پس ل، لا +

$$م، ما + ن، نا = ۰ وہی ہے جو$$

$$(لا، لا + م، ما + ن، نا) + (ما، ما + م، ما + ن، نا) + (ف، ف + م، م + ن، نا) = ۰$$

ہے اور اس لیے (۲۴۵)

$$لا، لا + م، ما + ن، نا - ل، ل = ۰$$

$$ما، ما + م، م + ن، نا - ف، ف = ۰$$

اگر گ ل + ف + مار + ج = لہ ن =
اب اگر دے ہوئے خطوط مزدوج ہیں تو (لا، مار)
ل + لا + م + ما + ن =

پر ہے اس لیے

ل + لا + م + ما + ن =
پس لا، مار کو ساقل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$= \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

∴ (ل، ل + ب + م + ج + ن، ن + ف + م + ن، ن)

+ گ (ن، ن + ل + ن، ل + ہ + ل، ل + م + ل، م) =

۱۸۲۔ اگر مخروطی کا کوئی وتر ایک نقطہ میں سے گذرتا ہوا

کھینچا جائے تو وہ منحنی اور و کے قطبی سے موسیقی طور پر منقطع ہوگا۔
فرض کرو کہ وف ق م کوئی وتر ہے جو منحنی کو ف، م پر اور و کے
قطبی کو ق پر قطع کرتا ہے۔

و کو مبدأ قرار دو اور خط وف ق م کو محور لا۔ فرض کرو کہ مخروطی

کی مساوات

$$1 + \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

ہے۔ چاں م = مخروطی کو قطع کرتا ہے

$$1 + \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{وف}} + \frac{1}{\text{وسا}} = \frac{1}{\text{گ}} \dots \dots (1)$$

و کے قلبی کی مساوات

$$گ لا + ف ما + ع = .$$

ہے۔ اس لیے

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{گ}{ج} = \frac{۱}{وق}$$

(۱) اور (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$وق = \frac{۱}{وفا} + \frac{۱}{ورفا}$$

۱۸۳۔ مخروطی کے متوازی وتروں کا ایک نظام کھینچا گیا ہے۔ (۲۴۶)
وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مخروطی پر دو نقطے (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔ ان نقطوں کو ملانے والے خط متقیم کی مساوات

$$۱ (لا - لا) (لا - لا) + ۲ (لا - لا) (لا - لا) + ۳ (لا - لا) (لا - لا) + \dots$$

$$+ ب (ما - ما) (ما - ما) = ۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + \dots$$

$$(۱) \dots\dots\dots ج +$$

ہے۔

(۱) میں لا کا سر ۱ (لا + لا) + ۲ (لا + لا) + ۳ (لا + لا) اور ما کا سر ۱ (لا + لا) + ۲ (لا + لا) + ۳ (لا + لا) ہے تو
ب (ما + ما) + ۲ ف ہے۔ پس اگر اوپر کا خط خط ما = م لا کے متوازی ہے تو

$$م = \frac{۱ (لا + لا) + ۲ (لا + لا) + ۳ (لا + لا) + \dots}{۱ (لا + لا) + ۲ (لا + لا) + ۳ (لا + لا) + \dots}$$

$$(۲) \dots\dots\dots$$

اب اگر (لا، ما) اس وتر کا وسطی نقطہ ہو جو نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما) کو

ملا آتا ہے تو $۲ لا = لا + لا$ ، $۲ ما = ما + ما$ اور اس لیے (۲) سے حاصل ہوتا ہے

یا $لا + لا = ما + گ + (لا + ب + ما + ن) =$
 $لا + (۱ + م +) + ما + (م + ب) + گ + م + ن = \dots (۲)$
 جو مطلوبہ مساوات ہے۔

اگر خط (۳) کو شکل $ما = م + لا + ک$ میں لکھا جائے تو

$$م = \frac{م + ۱}{م + ب}$$

یا $۱ + م + (م + م) + ب + م + م = \dots (۳)$
 یہ وہ شرط ہے کہ خطوط $ما = م + لا$ اور $ما = م + لا$ مخروطی
 $لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما + گ + لا + ۲ ن + ما + ج =$
 کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوں۔ (سہ)

۱۸۴۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ خطوط $لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما =$ ،
 مخروطی $لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما =$ کے مزدوج قطر ہو سکیں۔
 اگر خطوط $لا + لا + ۲ لا + ما + ب + ما =$ وہی ہیں جو $ما - م = لا =$ اور
 $ما - م = لا =$ سے حاصل ہوتے ہیں تو

$$م + م = ۲ - \frac{ب}{م} \text{ اور } م + م = \frac{۱}{ب}$$

لیکن $ما - م = لا =$ اور $ما - م = لا =$ مزدوج قطر ہیں اگر

$$۱ + م + (م + م) + ب + م + م =$$

اس لیے مطلوبہ شرط

$$۱ - ۲ = \frac{ب}{ب} + \frac{۱}{ب}$$

یا $۱ + ب + ب = ۲ = ۱$ (سہ)

۴۔ [نیجہ بالا کو دفعات ۵۶ اور ۵۸ سے فوراً ماموڈ کیا جاسکتا ہے]

$$\frac{ب}{ب} = \frac{۵۲ - ۱}{۱ - ۱} = \frac{۵۱}{۰}$$

اس لیے مشترک مزدوج قطروں کی مساوات
(۵۱ - ۱) (ب - ۱) + (ب - ۱) (ب - ۱) = ۰

ہے۔ چونکہ کسی دوہم مرکز مخروطیوں میں مزدوج قطروں کا ایک زوج مشترک ہوتا ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی دوہم مرکز مخروطیوں کی مساواتیں شکلوں
۱ (ب + ۱) = ۱ (ب + ۱) + ۱ (ب + ۱) = ۱
میں تحویل کیا جاسکتی ہیں۔

۱۸۵۔ اس خط مستقیم کا طول معلوم کرنا جو ایک دے ہوئے نقطہ (۲۴۸)
سے دی ہوئی سمت میں پھینچنے پر مخروطی سے ملے۔

فرض کرو کہ (لا، ما) دیا ہوا نقطہ ہے اور اس میں سے ایک خط
کھینچا گیا ہے جو محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ وہ نقطہ جو اس خط پر
نقطہ (لا، ما) سے فاصلہ ر پر ہے (لا + رجم طہ، ما + رجب طہ) ہے،
محاور علی القوائم فرض کئے گئے ہیں۔ اگر یہ نقطہ مخروطی ف (لا، ما) = ۰ پر ہو تو
۱ (لا + رجم طہ) + ۲ (لا + رجم طہ) (ما + رجب طہ) + ب (ما + رجب طہ)
+ ۲ گ (لا + رجم طہ) + ۲ ف (ما + رجب طہ) + ج = ۰
یا ۲ (رجم طہ) + ۲ جب طہ + ب جب طہ + ۲ رجم طہ (لا + رجم طہ) + ۲ گ
+ ۲ رجب طہ (لا + ب + ف) + ف (لا، ما) = ۰
اس دو درجی مساوات کی اصلیں رکی مطلوبہ دو قیمتیں ہیں۔
اب اگر نقطہ (لا، ما) اس وتر کا نقطہ وسطی ہو جو مخروطی خط پر قطع کرتا ہے تو رکی

و قیمتیں جو نوپر کی مساوات سے حاصل ہوں گی مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہونگی۔ اس لیے رکاسر معدوم ہونا چاہیے چنانچہ

$$(ا، لا + ہ، ما + گ) جم ط + (ہ، لا + ب، ما + ف) جب ط = ۰$$

پس اگر تروں کو ہمیشہ ایک مستقل سمت میں کھینچا جائے یعنی ط مستقل ہو تو ان کے وسطی نقطوں کا طریق [دفعہ ۱۸۳]

$$ا، لا + ہ، ما + گ + (ہ، لا + ب، ما + ف) مس ط = ۰$$

ہے۔

۱۸۶۔ وہ مستطیل جو اس وتر کے مقطوعوں سے بنتا ہے جو نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتا ہے اور محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے رکی ان دو قیمتوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے جو دفعہ ۸۵ کی دو درجی مساوات سے حاصل ہوتی ہیں چنانچہ وہ (مستطیل)

$$فہ (لا، ما)$$

$$ا، جم ط + ہ، جب ط + جم ط + ب، جب ط$$

کے مساوی ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر اسی نقطہ (لا، ما) میں سے دوسرا وتر کھینچا جائے اور یہ وتر محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو اس وتر کے مقطوعوں کا مستطیل

$$فہ (لا، ما)$$

$$ا، جم ط + ہ، جب ط + جم ط + ب، جب ط$$

ہوگا۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہوئے کسی مخروطی کے دو وتر دی ہوئی سمتوں میں کھینچے جائیں تو وتروں کے مقطوعوں کے مستطیلوں کی نسبت تمام نقطوں کے لیے (بشمول مخروطی کے مرکز کے) مستقل ہوتی ہے چنانچہ یہ نسبت مخروطی کے متوازی قطروں کے مربعوں کی نسبت مساوی ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح ۲۔ ان دو ماسوں کی نسبت جو کسی نقطہ سے مخروطی پر

کھینچے جائیں مخروطی کے متوازی قطروں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔
 نتیجہ صریح ۳۔ اگر نقطہ (لا، نا) میں سے ایک وتر کھینچا جائے
 جو محور لا کے ساتھ وہی زاویہ بنائے تو اس وتر کے مقطوعوں کا مستطیل
 فہ (لا، نا)

$$اوجم ط + ۲ جب ط جم ط + ب جب ط$$

ہوگا۔
 پس کسی دو متوازی وتروں کے مقطوعوں کے مستطیلوں کی نسبت
 جبکہ وتر دو ثابت نقطوں (لا، نا) اور (لا، نا) میں سے کھینچے جائیں مستقل
 ہوتی ہے چنانچہ یہ نسبت فہ (لا، نا) کے مساوی ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح ۴۔ اگر ایک مخروطی کو ایک دائرہ چار نقطوں
 ف، ق، س، س پر قطع کرے تو خط ف ق جو ان نقطوں میں سے کسی
 دو کو ملائے اور خط س س جو دیگر دو نقطوں کو ملائے مخروطی کے محور کے ساتھ
 مساوی زاویے بناتے ہیں۔

کیونکہ اگر ف ق اور س س، ت پر ملیں تو مستطیل ت ف
 ت ق اور ت س، ت میں مساوی ہیں جس کی وجہ یہ ہے کہ
 چاروں نقطے مخروطی پر ہیں۔ اس لیے نتیجہ صریح ۱ کی رُو سے مخروطی کے متوازی
 قطر مساوی ہیں اور اس لیے وہ مخروطی کے ایک محور کے ساتھ مساوی طور پر
 ماٹل ہونے چاہئیں [دیکھو دفعہ ۱۳۶]۔

مثال ۱۔ اگر ایک مثلث ایک مخروطی کو محیط کرے۔ تو وہ تین خطوط
 جو مثلث کے راسوں کو مقابل کے اضلاع کے نقاط تماس کے ساتھ ملائے ہیں
 ایک نقطہ پر ملیں گے۔

فرض کرو کہ مثلث کے راس ۱، ۲، ۳ ہیں اور مقابل کے اضلاع کے
 نقاط تماس ۱، ۲، ۳۔ نیز فرض کرو کہ مثلث کے ضلعوں کے متوازی مخروطی
 کے مم قطروں کے طول ۱، ۲، ۳ ہیں۔ تب

کے دائیں جانبی رکن کو $م$ کو لکھا جائے تو $م$ ۔ لے $م$ ۔ = ایک ایسے مخروطی کی مساوات ہوگی جو مخروطیوں $م$ ۔ = اور $م$ ۔ = کے مشترک نقطوں میں سے گزرے گا۔

کیونکہ مساوات $م$ ۔ لے $م$ ۔ = دوسرے درجہ کی ہے اور اسلئے ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے۔ نیز اگر کوئی نقطہ دئے ہوئے دونوں مخروطیوں ہو تو اس کے محدود دونوں مساواتوں $م$ ۔ = اور $م$ ۔ = کو پورا کریں گے اور اس لئے وہ مساوات $م$ ۔ لے $م$ ۔ = کو بھی پورا کریں گے۔ لہٰذا کوئی مناسب قیمت دیکر مخروطی $م$ ۔ لے $م$ ۔ = سے کوئی اور شرط پوری کرائی جاسکتی ہے۔

پس $م$ ۔ لے $م$ ۔ = ایک ایسے مخروطی کی عام مساوات ہے جو دو دئے ہوئے مخروطیوں $م$ ۔ = اور $م$ ۔ = کے مشترک نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

اگر مخروطی $م$ ۔ = دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے جنکی مساواتیں $ل$ + $م$ = $ن$ اور $ل$ + $م$ = $ن$ ہیں جن کو ہم اختصاراً $ع$ ۔ = اور $و$ ۔ = لکھیں گے تو $م$ ۔ لے $و$ ۔ = ایک ایسے مخروطی کی عام مساوات ہوگی جو ان نقطوں میں سے گزرے گا جہاں خطوط $ع$ ۔ = اور $و$ ۔ = مخروطی $م$ ۔ = کو قطع کرتے ہیں۔

اب اگر خط $و$ ۔ = خط $ع$ ۔ = کی جانب حرکت کر کے بالآخر اس منطبق ہو جائے تو مساوات $م$ ۔ لے $ع$ ۔ = لے $ع$ ۔ = کی تمام قیمتوں کے لئے ایک ایسے مخروطی کو تعبیر کرے گی جو مخروطی $م$ ۔ = کو منطبق نقطوں کے دو زوجوں پر قطع کرے گلیں وہاں جہاں $م$ ۔ = سے خط $ع$ ۔ = ملتا ہے۔ اس کا

یہ مطلب ہے کہ $س$ ۔ $ل$ ۔ $ع$ ۔ ایک مخروطی ہے جو $س$ ۔ کو $ا$ ۔
دو نقطوں پر $س$ کرتا ہے جہاں $س$ ۔ $خط$ ۔ $ع$ ۔ سے منقطع ہوتا ہے
مثال ۱۔ دو قائم زائد کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے تمام مخروطی
قائم زائد ہوتے ہیں۔

اگر قائم زائد کی مساواتیں $س$ ۔ $ل$ ۔ اور $س$ ۔ $ع$ ۔ ہوں تو وہ تمام مخروطی جو
ان کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں مساوات $س$ ۔ $ل$ ۔ $س$ ۔ $ع$ ۔ میں شامل ہیں
اب $س$ ۔ $ل$ ۔ $س$ ۔ $ع$ ۔ میں $لا$ اور $ما$ کے سروں کا مجموعہ صفر ہوگا کیونکہ $س$ ۔ $ع$ ۔
اور $س$ ۔ $ل$ ۔ میں یہ مجموعہ صفر ہے، محاور قائم فرض کئے گئے ہیں۔ اس سے مسئلہ
ثابت ہے۔

اس کی حسب ذیل مخصوص صورتیں ہیں:
(۱) اگر دو قائم زائد چار نقطوں پر متقاطع ہوں تو ان میں سے کسی دو نقطوں کو
ملانیو الاخطہ ستقیم دوسرے دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم پر عمود ہوگا۔ (کیونکہ
خطوط کا زوج نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہوا مخروطی ہے)۔

(۲) اگر ایک قائم زائد ایک مثلث کے راسوں میں سے گزرے تو وہ مرکز
عمودی میں سے بھی گزرے گا۔ (کیونکہ اگر مثلث کے راس $ا$ ، $ب$ ، $ج$ ہوں
اور راس $ا$ سے $ب$ پر کھینچا ہوا عمود مخروطی کو $د$ پر قطع کرے تو خطوط $ا$ ، $د$ ،
 $ب$ کا زوج ایک قائم زائد ہے کیونکہ یہ خطوط علی القوائم ہیں۔ اس لیے زوج
 $ب$ ، $د$ ، $ج$ بھی ایک قائم زائد ہے یعنی یہ خطوط علی القوائم ہیں۔)

مثال ۲۔ اگر دو مخروطیوں کے محاور متوازی ہوں تو ان کے نقاط
تقاطع میں سے ایک دائرہ گزرے گا
محدوں کے محوروں کو مخروطیوں کے محوروں کے متوازی لو تو ان کی
مساواتیں ہوں گی

$$لا + ب + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ۱ ج = ۰$$

اور $ل + لآ + ب + مآ + مگ + لا + ف + مآ + ج =$

ان کے تقاطع میں سے گزرنے والا مخروطی

$لآ + ب + مآ + مگ + لا + ف + مآ + ج + ل = (لآ + ب + مآ + مگ + لا$

$+ ف + مآ + ج) =$

ہوگا۔ لیکن یہ ایک دائرہ ہوگا اگر ہم ل کو ایسا منتخب کریں کہ $ل + لآ = ب + لآ$ اور یہ سرکھا ہمیشہ ممکن ہے۔

مثال ۳۔ اگر ایک ناقص کے پاس ت ف، ت ق اور ت ف، ت ق ہوں تو ایک مخروطی ان چھ نقطوں ت ف، ق، ت ف، ق میں سے گزرے گا۔

(۲۵۲) فرض کرو کہ مخروطی $لآ + ب + مآ = ا$ ہے اور نقطہ ت کے محدود (لا، مآ) اور ت کے (لا، مآ) ہیں۔ ت ق اور ت ق کی مساداتیں $لآ + ب + مآ = ا$ اور $لآ + ب + مآ = ا$ ہوگی۔ مخروطی

ل (لآ + ب + مآ) - (لآ + ب + مآ) - (لآ + ب + مآ) =

ہمیشہ چار نقطوں ت ف، ق، ت ف، ق میں سے گزرے گا۔ وہ ت میں سے بھی گزرے گا اگر ل ایسا ہو کہ

ل (لآ + ب + مآ) - (لآ + ب + مآ) - (لآ + ب + مآ) =

یعنی اگر $ل = لآ + ب + مآ$

اس نتیجہ کے تشاکل سے ظاہر ہے کہ مخروطی ت میں سے بھی گزرے گا۔

مثال ۴۔ اگر ایک مخروطی کے دو متراکم قطر کے دو نقطوں میں سے

جو مرکز سے مساوی فاصلوں پر ہیں کھینچے جائیں تو ان دتروں کے سروں میں سے گزرنے والا کوئی مخروطی قطر سے ایسے نقطوں پر منقطع ہوگا جو مرکز سے مساوی الفاصل ہوں گے۔

قطر اور اس کے مزدوج کو محاور قرار دو تو مخروطی کی مساوات ۱ لا^۲
 + ب ما^۲ = ا ہوگی۔ فرض کرو کہ وتروں کی مساواتیں ما-م (لا-ج) = اور
 ما-م (لا+ج) = ۰ ہیں۔ اب ان کے سروں میں سے گزرنے والے کسی
 مخروطی کی مساوات

$$۱ لا^۲ + ب ما^۲ - ا ل = {ما-م (لا-ج)} {ما-م (لا+ج)} = ۰$$

سے حاصل ہوگی۔

مور لا اس مخروطی کو ان نقطوں پر قطع کرنا ہے جو لا^۲ - ا ل م م (لا-ج) =
 سے حاصل ہوتے ہیں اور لا کی یہ دو قیمتیں صریحاً مساوی اور مختلف العلامت
 ہیں خواہ ل، م، اور م کچھ ہی ہوں۔

مخصوص صورت میں اگر ف م ق اور ف م ق، ایک مخروطی
 کے دو ماسکی وتر ہوں تو خطوط ف ف اور ق ق، محور کو مرکز سے متساوی الفصل
 نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔

مثال ۵۔ اگر ایک دائرہ اور ایک مخروطی میں دو ہر تاس ہو تو
 وتر تاس محوروں میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہوتا ہے۔

کیونکہ اگر لا^۲ + ب ما^۲ - ا ل (ل لا+م ما+ن) = ۰ ایک دائرہ ہو تو
 لا ما کا سر صفر ہے اور اس لیے ل یا م صفر ہے۔

مثال ۶۔ اگر دو دائرے ایک مخروطی کے ساتھ دو ہر تاس کیوں
 اور وتر تاس متوازی ہوں تو دائروں کا بنیادی محور تاس کے ان وتروں کے
 درمیان وسط میں ہوگا۔

دائروں

$$۱ لا^۲ + ب ما^۲ - ا ل + (ب-۱) (لا-د) = ۰$$

$$۱ لا^۲ + ب ما^۲ - ا ل + (ب-۱) (لا-د م) = ۰$$

$$۲ لا - د - د م = ۰$$

کا بنیادی محور

ہے۔

اس لیے (۱) سے حاصل ہوتا ہے
 فہ (لا' ما) فہ (لا' ما)

= { (لا' لا' ب' + (لا' ما' لا' ما) + ب' ما' ما' گ' (لا' لا' لا' ف' (ما' ما' ج' }
 ۱۸۹۔ مخروطی کے ان مساویوں کی مساوات معلوم کرنا جو ایک
 دے ہوئے وتر کے بیروں پر کھینچے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ دے ہوئے وتر کی مساوات ل لا' م' ما' ن' = ہے۔
 کوئی مخروطی جو فہ (لا' ما) = کو اس وتر کے بیروں پر مس کرتا ہے
 مساوات

فہ (لا' ما)۔ لہ (ل لا' م' ما' ن') = ۰۔۔۔ (۱)
 سے حاصل ہوتا ہے۔

مساوات (۱) مطلوبہ مساوات ہوگی اگر لہ کو ایسا منتخب کیا جائے
 کہ مساوات (۱) دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے جس کے لیے شرط
 =

۱۔ ل' ل' ل'	۲۔ ل' ل' م'	۳۔ ل' ل' گ'
۴۔ ل' ل' م'	۵۔ ل' ل' ب'	۶۔ ل' ل' ف'
۷۔ ل' ل' ن'	۸۔ ل' ل' ف'	۹۔ ل' ل' ج'

 ہے۔ اس کو پھیلاتے سے

۵۔ لہ (ل' + ب' م' + ج' ن' + ف' م' ن' + گ' ن' ل' + ل' م' ل' م') =

پس مطلوبہ مساوات

فہ ۳۔ ۵ (ل لا' م' ما' ن') = ۰

ہے جہاں ۵، فہ کا مینز ہے اور ۳ = ۰ وہ شرط ہے کہ ل لا' م' ما' ن' = ۰
 فہ ۳ = ۰ کو مس کرے۔ [دفعہ ۱۷۹]۔

(۲۵۵) | ۱۹۰۔ مخروطی کے مرتب دائرہ کی مساوات معلوم کرنا۔

کہنے لگے ہوں ان محاسن کی مساوات جو (لَا مَآ) سے مخدومی نہ (لَا مَآ) = کے

اولاً ۲ ھ لا ۲ ب ۲ گ ۲ لا ۲ ف ۲ ج ۲ ذ (لَا مَآءَ)

$$= \{ (1 \text{ لآ} + 1 \text{ هآ} + 1 \text{ لآ} + 1 \text{ لآ}) + 1 \text{ بآ} + 1 \text{ مآ} + 1 \text{ گآ} + 1 \text{ لآ} + 1 \text{ لآ} + 1 \text{ فآ} + 1 \text{ مآ} + 1 \text{ نآ} + 1 \text{ جآ} \}$$

ہے۔ یہ دو ماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں گے اگر مساوات بالائیں
لا اور ماس کے سروں کا مجموعہ صفر ہو۔ اس کے لیے ضرورت ہے کہ

(۱+ب) (۱+ا+ب+گ+ف+ج)

$$= (1\text{ لآ} + 2\text{ مآ} + 1\text{ گ}) + (-1\text{ لآ} + 1\text{ بآ} + 0\text{ ف})$$

اس لیے نقطہ (ا، مآ) اس دائرہ پر ہے جس کی مساوات

(و ب - ط) (لا + ما) + لا (گ ب - ف ض) + ما (ف - د ه گ) + ج (ا + ب)

۔ فہرست ۔

ج لآ + ج لآ - رگ لآ - ف مآ + (ب = ۰) ... (۱)

ہے جہاں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ف'، 'گ'، 'ھ' کے وہی معنی ہیں جو دفعہ ۷۹ میں بیان کئے جا چکے ہیں۔

اگر $\frac{1}{2}$ - 1 = 1 - 1 = 0 تو اوپر کی مساوات

۲۱ (بگ-ف ۴) + ۲ (ف-۱ گ) + ۱ (ب-۱ ف) = ۱ گ = ۱

۲ گ لا + ف ا - (ب = ۰) (۲)

میں تحویل ہوتی ہے۔

اس صورت میں مخروطی ایک مکافاتی ہے اور (۲) مرتب کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ منحنی

$$= 11 + 614 + 18r - 6p + 15pr + 1811$$

کے مرتب دائرہ کی مساوات

$$لا + ما^2 + ۲لا - لا۲ = ۱$$

۴۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ مکانی

$$لا + لا۲ + ما^2 - لا۲ + ۲لا - لا۲ = ۰$$

کے مرتب کی مساوات $۳لا - لا۳ + ۳ = ۰$ ہے۔

۱۹۱۔ ثابت کرو کہ ایک مرکزدار مخروطی میں چار اور صرف چار ماسکے (۲۵۶)

ہوتے ہیں جن میں سے دو حقیقی ہوتے ہیں اور دو خیالی۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$لا + ب + ما^2 - ۱ = ۰ \dots \dots (۱)$$

۵۔

فرض کرو کہ ایک ماسکے (لا، ما) ہے اور نظیری مرتب کی مساوات

لاجم ع + ماجب ع - ع = ۰ ہے۔ اگر مخروطی کا خروج المکرز ہو تو مخروطی کی مساوات ہوگی

$$(لا - لا) + (ما - ما^2) - ز (لاجم ع + ماجب ع - ع) = ۰ \dots (۲)$$

چونکہ (۱) اور (۲) ایک ہی نخنی کو تعبیر کرتے ہیں اور (۱) میں لا ماکام

صفر ہے اس لیے (۲) میں لا ماکام صفر ہونا چاہیے پس ع صفر ہے

یا $\frac{۱}{۲}$ ۔

اس لیے ایک مرتب، محوروں میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ ع = ۰ تو چونکہ (۱) میں لا اور ما کے سر صفر ہیں اس لیے

ما = ۰ اور لا = ز ع - نیز (۱) اور (۲) میں دوسرے سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\frac{۱ - ۱}{لا - ز ع} = \frac{ب}{۱} = \frac{۱}{۲ - ز}$$

$$ن \quad \sqrt{1 - \frac{1}{b}} \dots\dots\dots (۳)$$

$$د ع لآ = ۱ \dots\dots\dots (۴)$$

$$لا^۲ = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \dots\dots\dots (۵) \quad اور$$

(۵) سے ہم دیکھتے ہیں کہ محور لا پر دو ماسکے ہیں جن کے فاصلے

مرکز سے $\pm \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ ہیں۔ (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک مرتب

نظیری ماسکہ کا قطبی ہے۔

اگر $e = \frac{c}{a}$ تو اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ محور ما پر دو ماسکے

ہیں جن کے فاصلے مرکز سے $\pm \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ ہیں۔ ماسکوں کے ان دو

زہجوں میں سے ایک مریخاً حقیقی ہے اور دوسرا خیالی خواہ a اور b کی
یمتیں (حقیقی) یکجہ ہی ہوں۔

محور لا پر کے ایک ماسکہ کے حوالے سے محروطی کا خروج المرکز

(۲۵۷)

حسب مساوات (۳) $\sqrt{1 - \frac{1}{b}}$ کے مساوی ہے اسی طرح محور ما پر کے

ایک ماسکہ کے حوالے سے خروج المرکز $\sqrt{1 - \frac{1}{b}}$ ہوگا۔ اگر منحنی ناقص ہے

تو a اور b کی علامت ایک ہی ہوگی اور ان میں سے ایک خروج المرکز

حقیقی اور دوسرا خیالی ہوگا۔ لیکن اگر منحنی ایک زائد ہو تو

a اور b کی علامتیں مختلف ہونگی اور دو نول خروج المرکز

حقیقی ہونگے۔

کسی محروطی میں اگر z اور z' خروج المرکز ہوں تو

$$1 = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{b-z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{b-z}$$

۱۹۲۔ درجہ دوم کی عام مساوات سے تعبیر شدہ مخروطی کا خروج المرکز معلوم کرنا۔

محوروں کو بدلنے سے ہم مخروطی کی مساوات کو شکل

عہ لا + بہ ما + جہ = ۰ (۱) میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

اگر مخروطی کا ایک خروج المرکز ز ہو تو

عہ = بہ (۱ - ز) (۲) لیکن (دفعہ ۵۲) ہم جانتے ہیں کہ

عہ + بہ = ۱ + ب (۳)

اور عہ بہ = ۱ ب - ۲ (۴)

مساواتوں (۲) (۳) اور (۴) سے عہ اور بہ کو ساقط کرنے پر

$$\frac{(1-z)}{b-z} = \frac{(1-z)}{z^2}$$

یا $z^2 + \frac{(1-b)(1-z)}{b-z} = 0$ (۵)

اگر منحنی ایک ناقص ہے تو ۱ ب - ۲ مثبت ہے اور ز کی ایک مثبت

مثبت ہے اور دوسری منفی۔ ز کی حقیقی قیمت ناقص کا وہ خروج المرکز ہے

جو ایک حقیقی ماسکہ کے حوالے سے ہوتا ہے اور خیالی قیمت وہ خروج المرکز ہے جو خیالی ماسکہ کے حوالے سے ہوتا ہے۔

اگر منحنی ایک زائد ہے تو ز کی دونوں قیمتیں حقیقی ہیں اور اس لیے

دونوں خروج المرکز حقیقی ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۹۰ میں معلوم ہو چکا ہے۔

اس لیے ان دو خروج المرکزیوں میں ہمیں پیدا کرنا چاہیے۔

۱) میں عہ اور بہ کی علامتیں مختلف ہوتی ہیں جبکہ منحنی زاہد ہوتا ہے اور اگر عہ کی علامت جہ کی علامت سے مختلف ہو تو حقیقی ماسکے محور لا پیر واقع ہوں گے۔ پس حقیقی ماسکے کے حوالے سے خروج المرکز معلوم کر نیکی لیے (۳) اور (۴) سے عہ اور بہ کی قیمتیں حاصل کرو تو (۲) سے مطلوبہ خروج المرکز معلوم ہوگا اگر عہ کی وہ قیمت لجا جائے جس کی علامت جہ کی علامت سے مختلف ہے۔

مثال۔ اس مخروطی کا خروج المرکز معلوم کرو جس کی مساوات ہے

$$لا - م لا - ما - ۱۰ + لا + م = ۰$$

مرکز کے حوالے سے مساوات لا - م لا - ما - ۱۰ = ۰ ہے۔ یہ عہ لا + بہ ما - ۱۰ = ۰ ہو جائے گی جہاں عہ + بہ = ۱۰ اور عہ بہ = ۶ - پس عہ = ۲ اور بہ = ۳۔ حقیقی ماسکے کے حوالے سے خروج المرکز مساوات ۳ - ۲ = ۱ (۱ - ز) سے حاصل ہوگا، اس لیے $ز = \frac{5}{4}$ ۔

۱۹۳۔ مخروطی کے ماسکے اور مرتب کی تعریف سے مخروطی کے ماسکے مرتب، اور خروج المرکز حسب ذیل طریقہ پر فوراً معلوم کئے جاسکتے ہیں: اگر (عہ، بہ) ایک ماسکے ہے تو مخروطی

$$لا + ۲ م لا + م + ب + ما + گ + لا + ۲ ف + م + ج = ۰ \quad (۱)$$

بموجب تعریف

(لا - عہ) + (ما - بہ) - (ل + لا + م + ن) = ۰ (۲)
کے مماثل ہے جہاں نظیری مرتب ل + لا + م + ن = ۰ ہے اور خروج المرکز $ز = ل + م$ سے حاصل ہوتا ہے۔

(۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے پر

$$\begin{aligned} ل - ۱ = ل + ۱ \quad ل + م = ل + م \quad م - ۱ = م - ۱ \quad ل + ب = ل + ب \\ ل + ن + عہ = ل + گ \quad م + ن + بہ = ل + ف \quad ن - عہ = بہ - عہ = ل + ج \end{aligned}$$

پس

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لہ} (\text{ل} + \text{ع} + \text{ح} + \text{ب} + \text{ن}) = \text{ل} (\text{ل} + \text{ع} + \text{م} + \text{ب} + \text{ن}) \\ \text{لہ} (\text{ل} + \text{ع} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ف}) = \text{م} (\text{ل} + \text{ع} + \text{م} + \text{ب} + \text{ن}) \\ \text{لہ} (\text{ل} + \text{ع} + \text{ف} + \text{ب} + \text{ج}) = \text{ن} (\text{ل} + \text{ع} + \text{م} + \text{ب} + \text{ن}) \end{array} \right. \dots (۱)$$

(۲۵۹)

$$\text{نیز} \left\{ \begin{array}{l} \text{لہ} (\text{ل} - \text{ب}) = \text{ل} - \text{م} \\ \text{لہ} = \text{ل} - \text{م} \end{array} \right. \dots (ب)$$

۱۔ ماسکے۔

مساواتوں (۱) کو ترتیب وار 'ع' 'ب' 'ا' سے ضرب دو اور جمع

کرو تو

$$(\text{ل} + \text{ع} + \text{م} + \text{ب} + \text{ن}) = \text{لہ} (\text{ل} - \text{ب})$$

نیز

$$\begin{aligned} (\text{ل} - \text{م}) (\text{ل} + \text{ع} + \text{م} + \text{ب} + \text{ن}) &= \text{لہ} (\text{ل} + \text{ع} + \text{ح} + \text{ب} + \text{ن}) - (\text{لہ} + \text{ع} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ف}) \\ \text{اور ل م} (\text{ل} + \text{ع} + \text{م} + \text{ب} + \text{ن}) &= \text{لہ} (\text{ل} + \text{ع} + \text{ح} + \text{ب} + \text{ن}) - (\text{لہ} + \text{ع} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ف}) \\ \text{اس لیے مساواتوں (ب) سے حاصل ہوتا ہے} \\ &(\text{لہ} + \text{ع} + \text{ح} + \text{ب} + \text{ن}) - (\text{لہ} + \text{ع} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ف}) \end{aligned}$$

۱۔ ب

$$(\text{لہ} + \text{ع} + \text{ح} + \text{ب} + \text{ن}) - (\text{لہ} + \text{ع} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ف}) =$$

= فہ (ع' ب)

اس لیے ماسکے دو مخروطیوں کے نقاط تقاطع ہیں جو مساواتوں

$$(\text{ل} + \text{ل} + \text{ع} + \text{م} + \text{ب} + \text{ن}) - (\text{لہ} + \text{ع} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ف})$$

۱۔ ب

$$(\text{ل} + \text{ل} + \text{ع} + \text{م} + \text{ب} + \text{ن}) - (\text{لہ} + \text{ع} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ف}) = \text{فہ} (\text{لا' م})$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۔ مرتب

مساواتوں (۱) سے Δ اور Δ کو ساقا کرنے سے

$$= \begin{vmatrix} \Delta - 1 & \Delta - 1 & \Delta - 1 \\ \Delta - 1 & \Delta - 1 & \Delta - 1 \\ \Delta - 1 & \Delta - 1 & \Delta - 1 \end{vmatrix}$$

یعنی $\Delta \times \Delta - (\Delta - 1) + (\Delta - 1) + (\Delta - 1) = 2\Delta - 1$

$$= 2\Delta - 1$$

جس میں Δ کا سر اور مستقل رقم صفر ہیں۔

پس (ب) سے

$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\Delta - 1}{\Delta - 1} = \frac{\Delta}{\Delta}$$

ان مساواتوں سے نسبتیں $\Delta : 1 : 1$ ملتی ہیں جن سے مرتب متعین ہوتے ہیں۔

۳۔ خروج المکرز۔

$$\Delta - 1 = (\Delta - 1) + (\Delta - 1) = 2\Delta - 1$$

$$\Delta - 1 = (\Delta - 1) + (\Delta - 1) = 2\Delta - 1$$

$$\Delta - 1 = (\Delta - 1) + (\Delta - 1) = 2\Delta - 1$$

۱۹۴۔ مخروطی کی مساوات جبکہ ماسک کو مہدا پر لیا گیا ہو لا $\Delta + \Delta$ $\Delta = (\Delta + \Delta) + (\Delta - \Delta) = 2\Delta$ $\Delta \pm \Delta = 2\Delta$ میں سے کوئی ایک، مخروطی سے منطبق نقطوں پر ملتا ہے پس ماسک سے مخروطی کے ماس خیالی خطوط لا $\Delta \pm \Delta = 2\Delta$ ہیں

یعنی

$$لا + ما^۲ = .$$

ان ماسوں کا وتر ماس نظیری مرتب ہے۔
چونکہ ماسکے سے کھینچے ہوئے ماسوں کی مساوات مرتب کے مل پر
منحصر نہیں ہوتی اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر مخروطیوں میں ایک ماسکے
مشترک ہو تو ان کے دو خیالی ماس مشترک ہوتے ہیں اور یہ کہ ہم ماس
مخروطیوں میں چار مشترک ماس ہوتے ہیں۔

اب اگر محدودوں کے مبدا اور محوروں کو کسی طریقہ پر بدلا جائے لیکن
وہ قائم رہیں تو ایک ماسکے سے کھینچے ہوئے ماسوں کی مساوات
 $لا + ما^۲ = .$ سے بدل کر $لا + ما^۲ + گ + لا + ف + ج = .$
ہو جائے گی۔

پس ایک مخروطی کے ماسوں کی مساوات جبکہ ماس ایک
ماسکے سے کھینچے گئے ہوں ان شرطوں کو پورا کرتی ہے جو ایک
دائرہ کے لیے ہیں۔

اس کے بالکس اگر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے مخروطی کے
ماسوں کی مساوات دائرہ کی شرطوں کو پورا کرے تو نقطہ ایک
ماسکے ہونا چاہیے۔

دائرہ نقطے لائن ہی پر۔ وہ خطوط جو مبدا سے کسی دائرہ پر
لائن ہی پر کے نقطوں تک کھینچے گئے ہوں مساوات $لا + ما^۲ = .$ سے حاصل

ہوتے ہیں، اس لیے تمام دائروں میں لاتنا ہی بیرونی خیالی مشترک نقطے ہوتے ہیں۔ ان نقطوں کو ماسکہ نما کہتے ہیں۔
 اوپر کے بیان سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی مخروطی کے حقیقی ماسکوں کے کھینچے ہوئے ماس ایک خیالی ذواربعۃ الافلاع کے افلاع ہیں جس کے دوسرے دو متقابلہ راس ماسکہ نما افلاع اور ہے ہیں اور دوسرے دو متقابلہ راس مخروطی کے خیالی ماسکے ہیں۔

پس وہ مساوات جس سے مخروطی کے ماسکے اور مرتب حاصل ہوتے ہیں حسب ذیل طریقہ پر معلوم کیا جاسکتی ہے۔

۱۔ ماسکے معلوم کرنا۔

نقطہ (لا، ما) سے مخروطی فہ (لا، ما) کے ماسوں کی مساوات
 (۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا) فہ (لا، ما)
 = { (۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا) فہ (لا، ما) + (۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا) فہ (لا، ما) }

ہے۔
 اگر (لا، ما) مخروطی کا ایک ماسکہ ہو تو یہ مساوات ایک دائرہ کی شرطوں کو پورا کرتی ہے یعنی یہ کہ لا اور ما کے سر مساوی ہیں اور لا ما کا سر صفر ہے۔

پس
 فہ (لا، ما) = (۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا) فہ (لا، ما) = ب فہ (لا، ما) = (۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا) فہ (لا، ما)
 اور
 فہ (لا، ما) = (۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا) فہ (لا، ما) = (۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا) فہ (لا، ما)
 اس لیے ماسکے وہ نقطے ہیں جو مساواتوں
 (۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا) فہ (لا، ما) = ۰
 (۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا) فہ (لا، ما) = ۰

۱۔ ب

$$= \frac{(1+لا+م+گ)(م+لا+ب+ما+ف)}{ف(لا+ما)} \dots (1)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔
ان مساواتوں کو شکل

$$ف = \frac{\left(\frac{ف}{لا}\right)^2 - \left(\frac{ف}{ما}\right)^2}{\left(\frac{ف}{لا}\right) - \left(\frac{ف}{ما}\right)} = \frac{ف}{ب-1}$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

۲۔ مرتب معلوم کرنا۔

وتر ل + لا + م + ن =
کے سروں پر کے حماس [دفعہ ۱۸۹]

$$ف(لا+ما) \times 3 - \Delta (ل+لا+م+ما+ن) = 0$$

ہیں۔

اگر ل + لا + م + ن = ایک مرتب ہے تو یہ خطوط ماسکہ نماؤں
میں سے گذرتے ہیں۔ اس لیے

$$= (1-ب) \Delta - 3(ل-م) \Delta$$

$$= 3 \Delta - 3 \Delta = 0$$

ان سے نسبتیں ل : م : ن معلوم کیجا سکتی ہیں اور پھر مرتب متعین
ہو جاتے ہیں۔

مثال۔ اس محرومی کے ماسکے اور مرتب معلوم کر جس کی مساوات

$$لا^2 + لا + ما - ما^2 - ۶لا + ۴ما + ۹ = 0$$

ہے۔

ماسکوں کے لیے مساواتیں

$$\frac{(لا+۶-۳)(۲+۴-لا)}{۶} = \frac{(۲+۴-لا)^2 - (۳-۶+لا)^2}{۴+۱}$$

$$= \text{ذ (لا' ما)}$$

ہیں۔ پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} ۳(۳-۶+۷) + ۲(۲-۶+۷) &= ۳(۲+۶-۷) \\ ۲(۳-۶+۷) - ۲(۲-۶+۷) &= ۳(۲+۶-۷) \\ ۳-۶+۷ &= ۱-۶+۷ \quad \text{یا} \quad ۳+۶-۷=۱+۶-۷ \end{aligned}$$

پس اگر ہم

(۱) $(۳-۶+۷) = ۲(۲-۶+۷) = \text{ذ (لا' ما)}$ (۱)
میں ۲ کی بجائے ۱-۳ لا درج کریں تو عمل تحویل کے بعد لا' ۱- = حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } لا = ۱ \text{ تو } ما = ۱$$

$$\text{اور جب } لا = ۱ \text{ تو } ما = ۲$$

اس لیے حقیقی ماسکے (۱-۱) اور (۲-۱) ہیں۔

خیالی ماسکے مخروطی (۱) اور خط ۴-لا-۶+۳=۰ کے نقاط تقاطع ہیں
مرتب ماسکوں کے قطبی ہیں اور حقیقی مرتبوں کی مساواتیں

$$۲-لا-۳-ما = ۱-۰ \quad \text{اور} \quad ۲-لا-۳-ما = ۳-۰$$

حاصل ہوں گی۔

لیکن مرتبوں کی مساواتیں ماسکوں کو پہلے معلوم کئے بغیر بھی اوپر کے مضامین
سے معلوم کیجا سکتی ہیں۔

یہ معلوم ہو گا کہ

$$(۱-۴-۵) = ۶-۰ = ب = گ = ۰ = ف = ۲۰-ج = ۴۰-۰$$

(۲۶۳)

$$\Delta = ۴۰۰ - \text{پس}$$

$$\frac{۲۰-۲}{۵} = \frac{۴۰-۴}{۶} = \frac{۴۰-۴}{۷} = \frac{۴۰-۴}{۸} = \frac{۴۰-۴}{۹}$$

$$\frac{۲}{۵} = \frac{۴}{۶} \quad \text{یا} \quad \frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

$$\text{اور } ۲۰-۲ = ۴۰-۴ = ۴۰-۴ = ۴۰-۴ = ۴۰-۴$$

$$\begin{aligned} \text{جب } ۰ &= ۲م + ۳ل \quad \text{تو} \\ ۱۲ل - ۲۴ل - ۱۸ل + ۱۲ل &= ۰ \\ \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳} \quad \text{یا} \quad \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳} \end{aligned}$$

اس لیے یقینی مرتبوں کی مساواتیں

$$۱۲ل - ۲۴م + ۱۸ل = ۰ \quad \text{اور} \quad ۱۲ل - ۲۴م + ۱۸ل = ۰$$

ہیں۔

جب ۲م - ۱۲ل = ۰ ہو تو مرتب خیالی ہوتے ہیں۔

ناقص اور اس کے مرتب دائرہ کی مساواتوں $\frac{۱۲ل}{۱۲} + \frac{۲۴م}{۱۲} = ۱$

اور $۱۲ل + ۲۴م = ۱۲$ سے آسانی معلوم ہوتا ہے کہ مخروطی کے مرتبوں کا ایک زوج 'مخروطی اور اس کے مرتب دائرہ کے نقاط تقاطع میں گزرنے والے متوازی خطوط ہوتے ہیں۔

پس مخروطی ذہ (لا، ما) = ۰ کے مرتب مساوات
ذہ (لا، ما) + لہ (ج لا، ج ما) - ۲گ لا - ۲ف ما + (ب + ج) = ۰
سے معلوم ہوتے ہیں جہاں لہ ایسا ہے کہ دوسرے درجہ کی ارف تمام کامل
مربع ہیں۔

اس لیے لہ مساوات

$$۰ = (۱ + لہ ج) (ب + لہ ج) +$$

$$۱ + لہ (ب + ۱) + لہ ج = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

اوپر کی مثال میں

$$۱ + لہ (۳ -) + (۴۰ -) لہ = ۰ \quad \text{اس لیے لہ} = ۱ \quad \text{یا} \quad ۵ لہ + ۱ = ۰$$

محرومی کا مرتب دائرہ

$$= ۴۰ - ۱۲۰ + ۱۲۰ - ۴۰ = ۰$$

(۲۶۴) ہے۔ اس لیے جب $ل = \frac{۱}{۸}$ تو مرتب

$$= (۱۲۰ - ۱۲۰ + ۱۲۰ - ۴۰) + (۹ + ۱۲ + ۱۲ - ۱۲۰ + ۱۲۰ - ۴۰) = ۰$$

$$= ۴۰ - ۱۲۰ + ۱۲۰ - ۴۰ = ۰$$

$$= (۱ - ۱۲ - ۱۲) (۴۰ + ۱۲ - ۱۲)$$

یعنی سے حاصل ہوتے ہیں۔

جب $ل = \frac{۱}{۴}$ تو مرتبوں کی مساوات

$$= (۱۲۰ - ۱۲۰ + ۱۲۰ - ۴۰) + (۹ + ۱۲ + ۱۲ - ۱۲۰ + ۱۲۰ - ۴۰) = ۰$$

$$= ۱۲۰ - ۱۲۰ + ۱۲۰ - ۴۰ = ۰$$

$$= (۱ - ۱۲ - ۱۲) (۴۰ + ۱۲ - ۱۲)$$

ہے۔

۱۹۵۔ محرومی کے محوروں کی مساوات معلوم کرنا۔

محرومی کے محور متقاربوں کے درمیانی زاویوں کی تضعیف کرتے ہیں اور متقارب ان خطوں کے متوازی ہوتے ہیں جو مساوات $۱۲۰ + ۱۲۰ + ۱۲۰ = ۳۶۰$ سے (دفعہ ۱۷۴) حاصل ہوتے ہیں۔ پس (دفعہ ۳۹) محاور وہ خطوط مستقیم ہیں جو محرومی کے مرکز میں سے گزرتے ہوئے خطوط

$$\frac{۱۲۰}{۳۶۰} = \frac{۱۲۰ - ۱۲۰}{۱ - ۱}$$

کے متوازی ہیں۔

محوروں کی مساواتوں کو ہم حسب ذیل طریقہ پر بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر محرومی کے محور پر ایک نقطہ ن ہو تو وہ خط جن کو محرومی کے

مرکز سے ملتا ہے ن کے قطبی پر عمود ہے۔
 فرض کرو کہ ن کے محدود لا، ما ہیں۔ تب ن کے قطبی کی مساوات
 لا (لا + لا + لا + لا + گ) + ما (لا + لا + لا + لا + ف) + گ (لا + لا + لا + لا + ج) =
 (۱)۔۔۔۔۔۔۔۔

ہے۔ مخروطی کے مرکز میں سے گزرنیوالے کسی خط کی مساوات
 لا + لا + لا + لا + گ + ل (لا + لا + لا + لا + ف) = ۰۔۔۔۔۔۔۔۔ (۲)
 ہے۔ اب چونکہ (۱)، (۲) پر عمود ہے اس لیے
 (لا + لا + لا + لا + گ) + (لا + لا + لا + لا + ف) + (لا + لا + لا + لا + ج) = ۰
 (۳)۔۔۔۔۔۔۔۔

چونکہ (۲) نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتا ہے اس لیے
 لا + لا + لا + لا + گ + ل (لا + لا + لا + لا + ف) = ۰۔۔۔۔۔۔۔۔ (۴)
 لہ کو (۳) اور (۴) سے ساقط کرو تو ہم دیکھتے ہیں کہ (لا، ما) مخروطی
 (لا + لا + لا + لا + گ) = (لا + لا + لا + لا + ف) (لا + لا + لا + لا + ج) (۲۶۵)

۱۔ ب
 پر ہونا چاہیے، یہ مطلوبہ مساوات ہے۔
 محوروں کی مساوات کو دفعہ ۱۹۳ یا دفعہ ۱۹۴ سے بھی ماخوذ کیا
 جاسکتا ہے کیونکہ ان مخروطیوں میں سے ایک جن پر پاسکے واقع ہوتے
 ہیں خطوط مستقیم کا ایک زوج ہے جو مرکز میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے
 یہ زوج محاور ہونا چاہیے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ وہ تمام مخروطی جو ایک مخروطی کے چاروں گوشوں
 سے گزرتے ہیں قائم زائیں ہیں۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اس مخروطی کے پاسکے جس کی مساوات

$$لا + لا + لا + لا + ل = ۱$$

ہے مضمینوں

$$\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab}{b-a} = \frac{a-b}{b-a}$$

پرواقع یہی ہے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ مخروطی

$$= 5 + 6r - 11r - 1 + 60s - 11s$$

کے ترقی یافتہ (۱۰۱) اور (۲۰۰-۲) ہیں۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ $2 - \sqrt{8} + \sqrt{2} = 0$

حقیقی ماسکوں کے محمد

$(\frac{1}{3})$ اور $(\frac{5}{4} - \frac{2}{3})$ ہیں۔

مثال ۵۔ یکانی L^2 و L^4 + L^2 - L^4 + L^2 = L^2 کا اس کے

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right) \text{ انق }$$

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے خیالی ماسکوں سے
اس کے کسی تماس پر عمود نکالے جائیں تو ان عمودوں کا حاصل ضرب نیم محور اعظم
کے مربع کے مساوی ہوگا۔

مثال ۷۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے ایک خیالی ماسک سے ناقص کے کسی نقطہ کے ماس پر عمود نکالا جائے تو اس عمود کا پائین اس دائرہ پر واقع ہوتا ہے جو عمودِ اصغر کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو۔

مثال ۸۔ اگر ایک دائرہ ایک ناقص کے ساتھ دوہرہ تماس رکھے
تو ثابت کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ سے دائرہ کا تماس ایسے بدلتا ہے جیسے
دوہرہ تماس سے اس نقطہ کا فاصلہ۔

۱۹۶۔ مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جبکہ محدودوں کے محاورے

مخروطنی کے کسی نقطہ پر کے ماس اور عوامیوں۔

مسئلہ شان (۱) خطوط وف اور وق کی مساوات

۱. $لَا + ب = ل + م + ف$ (۱) $ل + ل + م + م = ۰$ ۔
ہے۔ اگر وف اور وق محاور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں تو لا ماکا

مسئلہ ۲ - مثلثی ہذا۔۔۔

۱۹۔ مخروطی لا + ب = ماکا کے کسی نقطہ (لا، ماکا) پر کے عماد کی

مساوات۔۔۔

$$\frac{لا - لا}{لا} = \frac{م - م}{م}$$

ہے۔ یہ عماد نقطہ (م، ماکا) میں سے گزرے گا اگر

$$\frac{لا - لا}{لا} = \frac{م - م}{م}$$

یعنی اگر $لا (لا - ب) + ب = م (م - ک) + ک$ ۔
اس لیے ان عمادوں کے پائین جو کسی مخصوص نقطہ (م، ماکا) میں سے
گزریں مخروطی

لا (لا - ب) + ب = م (م - ک) + ک = ۰۔۔۔۔۔ (۱)
پرواقع ہوتے ہیں۔

مخروطی (۱) اور ابتدائی مخروطی کے چار حقیقی یا خیالی نقاط تقاطع وہ
نقطے ہیں جن پر کے عماد نقطہ (م، ماکا) میں سے گزرتے ہیں۔

مخروطی (۱) مہیکہ ایک قائم زاویہ ہے جس کے متقابل محدودوں کے محوروں کے
متوازی ہیں یعنی ابتدائی مخروطی کے محوروں کے متوازی۔ نیز یہ قائم زاویہ
اس مخروطی کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور خود نقطہ (م، ماکا) میں سے بھی۔

۱۹۸۔ اگر دو مخروطوں $لا + م = ۱$ اور $ل + ل + م = ۱$ کے
محوروں پر کے عماد نقطہ (م، ماکا) پر ملیں تو لہ کی کسی خاص قیمت کیلئے مخروطی

$لا + ب = م$ ۔ لہ (ل + ل + م) = ۱ (ل + ل + م) = ۱ = ۰۔۔۔ (۱)

جول کی تمام قیمتوں کے لیے ان دو وتروں کے چار بیروں میں سے گزرتا رہی ہوگا (دفعہ ۱۹۷)

ج۔ لا (۱-ب) + ب = ما۔ ا ک لا = ۰۔۔۔ (۲) ہے۔

اس آخری مساوات میں لا اور ما کے مساوی متعلق رقم صفر ہیں اور اس لیے وہ قبل الذکر مساوات میں صفر ہونے چاہئیں۔ اس لیے
 ۱۔ ل ل ل = ۰۔ ب۔ ل م م = ۰۔ اور ۱۔ ل ل ل = ۰۔

پس وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ وتروں ل لا + م ما = ۰۔ (۳۶۸) اور ل لا + م ما = ۱۔ کے بیروں پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں ہیں کہ

$$\frac{ل}{ل} = \frac{م}{ب} = ۱ = ۰۔۔۔۔۔۔۔ (۳)$$

۱۹۹۔ گزشتہ دفعہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ناقص (مماور ۲) (۲ ب) کے ان وتروں کے بیروں پر کے عماد جن کی مساواتیں
 ل لا + م ما = ۱۔ اور ل لا + م ما = ۰۔ ہیں ایک نقطہ پر ملیں گے اگر

۱۔ ل ل ل = ۰۔ ب م م = ۱۔۔۔۔۔۔۔ (۱) اگر ان چار بیروں کے خارج المرکز زاوے عمادہ اور جہ ضہ ہوں تو وتروں کی مساواتیں

$$\frac{لا}{۱} جم = \frac{ع + ع}{۲} + \frac{ب}{ب} جب = \frac{ع + ع}{۲} جم = \frac{ع - ع}{۲}$$

اور
 $\frac{لا}{۱} جم = \frac{ج + ج}{۲} + \frac{ب}{ب} جب = \frac{ج + ج}{۲} جم = \frac{ج - ج}{۲}$ ہوگی۔ اس لیے (۱) کے ساتھ مقابلہ کرنے پر

$$\text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} + \text{بہ}) \text{ جم } \frac{1}{4} (\text{جہ} + \text{ضہ}) + \text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{بہ}) \text{ جم } \frac{1}{4} (\text{جہ} - \text{ضہ}) = ۰$$

$$\text{اور جب } \frac{1}{4} (\text{عہ} + \text{بہ}) \text{ جب } \frac{1}{4} (\text{جہ} + \text{ضہ}) + \text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{بہ}) \text{ جم } \frac{1}{4} (\text{جہ} - \text{ضہ}) = ۰$$

تفریق کرنے پر $\text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}) = ۰$
 اس لیے $\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} = ۰ \quad (۲) \dots\dots\dots$
 نیز پہلی مساوات سے

$$\text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}) + \text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ})$$

$$+ \text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} + \text{جہ} - \text{بہ} - \text{ضہ}) + \text{جم } \frac{1}{4} (\text{عہ} - \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ}) = ۰$$

اور شرط (۲) کو استعمال کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{جب } (\text{عہ} + \text{بہ}) + \text{جب } (\text{بہ} + \text{جہ}) + \text{جب } (\text{جہ} + \text{ضہ}) = ۰ \quad (۳) \dots\dots\dots$$

(نیز دیکھو دفعہ ۱۳۹)

مثال ۱۔ اگر (ج، ب، ج، ج) وہ اعظم مثلث ہو جو ایک ناقص میں بنایا جائے
 تو ثابت کرو کہ 'ب'، 'ج' پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں گے۔

(۲۶۹)

خارج المکرز زاویے 'عہ'، 'عہ' + $\frac{\pi}{3}$ اور 'عہ' + $\frac{\pi}{3}$ ہو گئے [دفعہ ۱۳۸]۔

وہ شرط کہ عماد ایک نقطہ پر ملیں یہ ہے (دفعہ ۱۹۸) (۳)

$$\text{جب } ۲\text{عہ} + \text{جب } (\frac{\pi}{3} + ۲\text{عہ}) + \text{جب } (\frac{\pi}{3} + ۲\text{عہ}) = ۰$$

جو صریحاً درست ہے۔

مثال ۲۔ ایک مرکز دار مخروطی کے چار نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س'، 'س' پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے گزرنے والا دائرہ مخروطی کو مکرر 'س' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'س'، 'س'، 'س' کا ایک قطر ہے۔

میں سے مخروطی کا ایک قطر ہوگا اگر سر میں اور سر میں مخروط ج
قطروں کے متوازی ہوں (دفعہ ۱۳۴)۔

اب اگر ق ق' ل لا م م' = ۱۔ ہو تو سر میں ق' ل' لا' م' = ۱۔ کے متوازی ہوگا کیونکہ
ق' ق' م' م' ایک دائرہ پر ہیں۔ پس سر میں ق' ق' ایک قطر ہے کیونکہ
[دفعہ ۱۸۲] ل لا م م' = ۱۔ اور ق' ل' لا' م' = ۱۔ لا' م' ب م' = ۱۔ کے

مزدوج قطروں۔
[اس مسئلہ کو دفعہ ۱۹۹ (۲) اور دفعہ ۱۳۶ سے بھی قابل کیا جاسکتا ہے]
مثال ۳۔ اگر ایک ناقص کے نکتوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ کے عادی
ایک نقطہ پر ملیں تو ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ میں سے گزرنے والے ایک مکافی کا محور
مساوی مخروطوں میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی ہوگا۔

اگر (۵، ۶) وہ نقطہ ہو جہاں عادی ملتے ہیں تو ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ مخروطوں
کے چار نقاط تقاطع ہیں۔
ان نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے تمام مخروطی مساوات

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1 \text{ اور لا م م' } \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) + \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$$

میں شامل ہیں۔
اگر یہ ایک مکافی ہو تو دوسرے درجہ کی ارقام ایک کامل مربع ہونی

چاہئیں اور اس لیے $\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'}$ کا مربع ہونی چاہئیں۔ اس لیے ہر ایسے
مکافی کی مساوات شکل $\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'} \right)^2 + (لا + م + ج) = ۰$ کی ہے۔ اس لیے

ان کے محاور، خطوط $\frac{لا}{ا} \pm \frac{با}{ب} = ۰$ میں سے ایک یا دوسرے کے متوازی

ہیں (دفعہ ۱۷۲)۔

مثال ۴۔ ایک محزوطی کے لحاظ سے ایک نقطہ ن کا قطبی لیا گیا ہے اور اس نقطہ سے اس کے قطبی پر عمود کھینچا گیا ہے، اگر یہ عمود ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ (عہ) ن کا طریق ایک قائم زاہد ہے (بہ) اس مثلث کا محاذ دائرہ جون کا قطبی محوروں سے قطع کرتا ہے ہمیشہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتا ہے (جہ) ایک مکانی میں کا ماسکہ و ہے محوروں کو مس کرے گا اور ایسے تمام قطبیوں کو (ضہ) اس مکانی کا مرتب ج و ہے جہاں ج محزوطی کا مرکز ہے، اور (صہ) و اور و باہم تبدیل کئے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ محزوطی کی مساوات $\frac{لا}{ا} + \frac{با}{ب} = ۱$ ہے اور فرض کرو کہ

ثابت نقطہ و کے محدد (حہ) ک ہیں۔

اگر کسی نقطہ ن کے محدد (لا، ما) ہوں تو اس خط کی مساوات جون میں سے گذرے اور اس کے قطبی پر عمود ہو

$$\frac{لا - لا}{ا} = \frac{ما - ما}{ب}$$

$$\frac{لا}{ا} - \frac{با}{ب} = \frac{لا - ما}{ا}$$

ہوگی۔ اگر یہ خط نقطہ (حہ) ک میں سے گذرے تو

$$\frac{لا}{ا} - \frac{با}{ب} = \frac{لا - ما}{ا} \dots \dots \dots (۱)$$

(۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ (لا، ما) ایک قائم زاہد ہے۔ (عہ) اس مثلث کے محاذ دائرہ جون کی مساوات جو (لا، ما) کا قطبی محوروں سے

قطع کرتا ہے

$$لا + ما - \frac{وا}{لا} = \frac{با - ما}{لا}$$

ہوگی۔ یہ دائرہ نقطہ (لہ، لک) میں سے گزرے گا اگر

$$لہ (لہ + ک) = \frac{وا}{لا} - \frac{با - ک}{لا}$$

پس اگر (لا، ما) رشتہ (ا) کو پورا کرتا ہے تو

$$لہ = \frac{وا - با}{لہ + ک}$$

اس لیے ایسے تمام دائرے نقطہ و میں سے گزرتے ہیں جس کے محدد

$$\frac{وا - با}{لہ + ک} = \frac{وا - با}{لہ + ک} \dots \dots \dots (ج)$$

ہیں۔

نقطہ و اس مثلث کے حاملہ دائرہ پر ہے جو محوروں اور کسی ایک قطبی (۲۷۱) سے بنتا ہے، اس لیے وہ مکانی جس کا ماسکہ و ہے اور جو محوروں کو مس کرتا ہے ہر ایک قطبی کو مس کرے گا۔

(ج)۔۔۔۔۔

یہ مکانی ابتدائی مخروطی کے محوروں کو مس کرتا ہے، اس لیے مرکز ج

مکانی کے مرتبہ پر ایک نقطہ ہے نیز خطوط ج و اور ج و محور لا کے ساتھ

مساوی زاویے بناتے ہیں جو مکانی کا ایک ماس ہے، اس لیے و ماسکہ ہوگی

وجہ سے ج و مرتب ہے۔۔۔۔۔ (ضم)

چونکہ ج و ج و = وا - با اور ج و ج و محور لا کے ساتھ مساوی

زاویے بناتے ہیں اور محور ما کی ایک ہی جانب واقع ہیں اس لیے و اور و با ہم

میل پذیر ہیں۔۔۔۔۔ (ص)

۲۰۰۔ تعریف۔ دو منحنیوں کو متشابہ اور متشابہا واقع اس وقت

کہا جاتا ہے جبکہ ایک مخفی کے سمتی نیم قطر جو کسی نقطہ و سے کھینچے گئے ہوں
دوسرے مخفی کے متوازی سمتی نیم قطروں کے ساتھ جو دوسرے نقطہ و سے
کھینچے گئے ہوں ایک مستقل نسبت رکھیں۔

دو مخنیوں کو متشابہ اس وقت کہا جاتا ہے جبکہ دو ثابت نقطوں
و اور و سے کھینچے ہوئے نصف قطر جو ایک دوسرے کے ساتھ ایک
مستقل زاویہ بنائیں مناسب ہوں۔

ان دو ثابت نقطوں و اور و کو تشابہ کے مرکز کہا جاسکتا ہے۔

۲.۱۔ اگر دو مخنیوں کے لیے تشابہ کے مرکزوں کا ایک زوج
موجود ہو تو ایسے زوجوں کی لامتناہی تعداد ہوگی۔

فرض کرو کہ تشابہ کے مرکزوں کا دیا ہوا زوج و، و ہے اور فرض
کرو کہ و، و، و متوازی نصف قطروں کا کوئی زوج ہے۔ کوئی نقطہ
ج لو اور و، و، و کے متوازی اور نسبت و، و، و میں کھینچو۔
تب متشابہ مثلثات ج و، و، و اور ج و، و، و سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ
ج، و، و کے متوازی ہے اور اس کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے
جس سے ثابت ہوتا ہے کہ ج، و، و تشابہ کے مرکز ہیں۔

۲.۲۔ اگر دو مرکز دار مخروطی متشابہ ہوں تو ان دو مخنیوں کے
مرکز تشابہ کے مرکز ہوں گے۔

فرض کرو کہ تشابہ کے دو مرکز و اور و ہیں۔ ایک مخروطی کا کوئی وتر
ن و ق کھینچو اور اس کے جواب میں دوسرے مخفی کا وتر ن و ق کھینچو۔
تب بموجب فرض ن و ق : ن و ق : ن و ق، نظیری وتروں کے
زوج کے لیے مستقل ہے۔ لیکن چونکہ و ایک ثابت نقطہ ہے اس لیے
ن و ق ہمیشہ پہلے مخروطی کے اُس وتر کے مرکز کے ساتھ مستقل نسبت
رکھتا ہے جو اس کے متوازی ہے یہی صورت دوسرے مخروطی کے لیے بھی درست ہے۔ اس لیے

ان دو محروطیوں کے نظیری قطر ایک دوسرے کے ساتھ مستقل نسبت رکھتے ہیں پس ان مخروطوں کے مرکز تشابہ کے مرکز ہیں۔

۲۰۳۔ وہ شرطیں معلوم کرنا کہ دو محروطی متشابہ اور متشابہ ہوا واقع ہوں۔

گذشتہ دفعہ کی روش سے ان کے مرکز تشابہ کے مرکز ہیں۔ نیچے فرض کرو کہ ان محروطیوں کی مساواتیں ان مرکوزوں اور متوازی محوروں

حوالے سے

$$1) \text{ لا}^2 + 2 = \text{لا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ا} + \text{ج} = 0$$

$$2) \text{ لا}^2 + 2 = \text{لا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ا} + \text{ج} = 0$$

ہیں۔ ان مساواتوں کو قطبی محدودوں میں لکھا جائے تو

$$1) (\text{ا} + \text{جم}^2 + 2 = \text{جم}^2 + \text{جم}^2 + \text{ب} + \text{ج}^2 + \text{ا} + \text{ج} = 0$$

$$2) (\text{ا} + \text{جم}^2 + 2 = \text{جم}^2 + \text{جم}^2 + \text{ب} + \text{ج}^2 + \text{ا} + \text{ج} = 0$$

پس اگر $1) : 2)$ مستقل ہو تو طہ کی تمام قیمتوں کے لیے

$$1) \text{ جم}^2 + 2 = \text{جم}^2 + \text{جم}^2 + \text{ب} + \text{ج}^2 + \text{ا}$$

$$2) \text{ جم}^2 + 2 = \text{جم}^2 + \text{جم}^2 + \text{ب} + \text{ج}^2 + \text{ا}$$

کو مستقل ہونا چاہیے۔ اس کے لیے ضروری ہے کہ $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9} = \frac{10}{10}$ ۔ اس لیے

ان دو محروطیوں کے متقارب متوازی ہیں [اس نتیجہ کو حسب ذیل طریقہ پر

مائل کیا جاسکتا ہے: چونکہ $1) : 2)$ مستقل ہے جبکہ ان دو میں سے

ایک لامتناہی ہو جاتا ہے اس لیے دوسرا بھی لامتناہی ہوگا جس سے

ثابت ہوتا ہے کہ متقارب متوازی ہیں۔]

اس کے بالعکس اگر یہ شرطیں پوری ہوں اور اگر ہر کسر لہ کے مساوی ہو

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9} = \frac{10}{10}$$

اس نے نظیری نصف قطروں کی نسبت مستقل ہے اور اس لئے منحنی متشابہ ہیں۔

اگر ج اور لہ ج ایک ہی علامت کے نہ ہوں تو مستقل نسبت خیالی ہوتی ہے، اور صفر یا لامتناہی ہوتی ہے اگر ج یا ج صفر ہو۔

تشابہ کی شرطیں ان تین منحنیوں سے جن کی مساواتیں

$$لا = ج، لا = ج، اور لا = ج$$

ہیں پوری ہوتی ہیں۔ اس لیے ایک زائد اس کا مزدوج زائد اور ان کے متعارف تین متشابہ اور متشابه واقع منحنی ہیں۔ مزدوج زائد کے لیے مستقل نسبت ہے اور متعارفوں کے لیے صفر۔

لیکن یہ منحنی ایک ہی شباهت نہیں رکھتے۔ کیونکہ متشابہ منحنیوں

کے لیے جن کی شباهت وہی ہو مستقل نسبت حقیقی اور معین (محدود) ہوتی چاہیے۔

۲۰۴۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو مخروطی متشابہ ہوں اگرچہ

متشابه واقع نہ ہوں۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ان دو منحنیوں کے مرکز تشابہ کے مرکز ہونے چاہئیں۔ فرض کرو کہ ان منحنیوں کی مساواتیں ان کے اپنے مرکوزوں کے حوالے سے

$$لا + ۲ = لا + لا + ب + ج = ۰ \quad (۱)$$

$$لا + ۲ = لا + لا + ب + ج = ۰ \quad (۲)$$

اور ہیں اور فرض کرو کہ وہ وتر جو پہلے منحنی میں محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے طہ کی تمام قیمتوں کے لیے اس وتر کے متناسب ہے جو دوسرے منحنی میں محور لا کے ساتھ زاویہ (طہ + طہ) بناتا ہے۔ اگر دوسرے منحنی کے محوروں کو زاویہ طہ میں سے گھمایا جائے تو اس وقت ان مخروطیوں کے نصف قطر ایسے ہوں گے جو متعلقہ محوروں کے ساتھ مساوی زاوے بنائیں گے اور

ایک مستقل نسبت میں ہوں گے۔

فرض کرو کہ اس طرح دوسرے مخروطی کی مساوات

$$x^2 + y^2 = z^2 + w^2 + u^2 + v^2 + \dots$$

ہو جاتی ہے۔ تب پچھلی دفعہ کی رُو سے حاصل ہونا چاہیئے

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} = \frac{u}{v}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{z^2 + w^2}{z + w}$$

لیکن [دفعہ ۵۲] $x^2 + y^2 = z^2 + w^2$ اور $x + y = z + w$ (۲۴۳)

۔ اس لیے تشابہ کی شرط

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{z^2 + w^2}{z + w}$$

ہے۔

اوپر کے بیان سے ظاہر ہے کہ متشابہ مخروطیوں کے متقاربوں کے درمیان زاوے مساوی ہوتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۰۴)۔

اس نتیجہ کو حسب ذیل طریقہ پر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے: چونکہ ان دو منحنیوں کے سمتی نیم قطر جو ایک دوسرے کے ساتھ ایک خاص مستقل زاویہ پر مائل ہیں مستقل نسبت میں ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان دو سمتوں کا درمیانی زاویہ جو ایک منحنی کے لیے لامتناہی قیستیں دیتے ہیں دوسرے منحنی کے نظیری زاوے کے مساوی ہونا چاہیئے یعنی ایک مخروطی کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ دوسرے مخروطی کے متقاربوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے۔

اور پھر (۱) ہو جائے گا .

اسی طرح دو اور متشابه مساواتیں حاصل ہونگی۔

۷۱ (۲) ۷۲

$$\frac{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ع} + \text{ب})}{\text{جم} \frac{1}{2} (\text{ع} - \text{ب})} = \frac{\text{جم} \frac{1}{2}}{\text{جم} \frac{1}{2}} = \frac{1}{1}$$

اور $\frac{\text{جب } \frac{1}{2} (\text{ع} + \text{ج})}{\text{جم } \frac{1}{2} (\text{ع} - \text{ج})} = \frac{\text{ك}}{\text{ل}} = \text{جم ج} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}}$ جم ج

اس طرح 'ج' لا = وجم جہ اور ما = ب جب جہ سے تئیں ہو جاتا ہے۔ اسی طرح ڈ اور پ کے لیے۔

پس سی پر کے نقطوں { 'ب' 'ج' کے خارج المرکز زاوے
 $\pi + \epsilon$ ، $\pi + \eta$ ، $\pi + \theta$ جہاں ϵ ، η ، θ 'جہ' نقطوں { 'ب' 'ج' کے
 خارج المرکز زاوے ہیں۔

آبِ ج کے مرکز ہندسی کا طریق معلوم کرنا۔

مسائل و باتوں

$$1 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2, \text{ جب } m = 0, \text{ وغیرہ}$$

سہم دیکھتے ہیں کہ عہدِ جاہِ حبِ ذیل مساوات کی تین اہلیں ہیں:

$$\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{b^3}{a^4} + \dots$$

لیکن $\left(\frac{1}{3} \text{ جم ع جم بہ جم جہ} + \text{جم طہ}\right) - \left(\text{جم طہ}\right) = \frac{1}{3} \text{ جم ع جم بہ جم جہ} + \text{جم طہ} - \text{جم طہ} =$
سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم عہ} + \text{جم بہ} + \text{جم جہ} + \text{جم نہ} = \frac{1}{3} \text{ جم ع جم بہ جم جہ} + \text{جم نہ}$$

$$\text{اور جم ع جم بہ جم جہ جم نہ} = \frac{1}{3} \text{ جم عہ جم بہ جم جہ} + \text{جم نہ}$$

اس لیے

$$\text{جم عہ} + \text{جم بہ} + \text{جم جہ} = \frac{1}{3} \text{ جم نہ}$$

$$\text{اور اسی طرح جم عہ} + \text{جم بہ} + \text{جم جہ} = \frac{1}{3} \text{ جم نہ}$$

$$\text{اب } ۳ \text{ لا} = ۳ \text{ جم} (۱۱ + ع) = ۳ \text{ (جم عہ} + \text{جم بہ} + \text{جم جہ)}$$

$$\text{اور } ۳ \text{ ما} = ۳ \text{ جم} (۱۱ + ع) = ۳ \text{ (جم عہ} + \text{جم بہ} + \text{جم جہ})$$

اس لیے مرکز ہندسی کے طریق کی مسادات

$$۱ = \frac{۹ \text{ لا}}{۲(۱۲ - ۳)} + \frac{۹ \text{ ما}}{۲(۳ - ۱۲)}$$

دسویں باب پر مثالیں

(۲۷۷)

۱۔ اگر ق اور ف کوئی دو نقطے ہوں اور ج ایک مخروطی کامرکز ہو تو ثابت کرو کہ مخروطی کے لحاظ سے نقطہ ف کے قطبی پر ق اور ج سے کہیں چھو عمود ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو ق کے قطبی پر ف اور ج سے کہیں چھوئے عمودوں میں ہے۔

۲۔ اگر کسی نقطہ سے ایک مخروطی کے دو ماس کہیں جائیں تو ثابت کرو ان میں وہی نسبت ہوتی ہے جو نظیری عمادوں میں ہے۔

۳۔ ایک مخروطی پر دو کے مختلف مقاموں کے لیے دفعہ ۱۹۶ میں مندرجہ مثالوں کے ثابت نقطوں کے طریق معلوم کرو۔

۴۔ ایک ناقص کے متوازی وتروں کے ایک نظام میں سے ایک وتر ف وق ہے اور اس پر ایک نقطہ و ایسا ہے کہ ف و + وق مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ و کے مختلف محلوں کے لیے و کا طریق ایک ہم مرکز مخروطی ہے۔

۵۔ اگر و ایک ثابت نقطہ ہو اور و ن کوئی وتر جو ایک مخروطی کو

ن ن پر قطع کرتا ہے اور اگر اس خط پر ایک نقطہ د ایسا لیا جائے کہ $\frac{1}{ود} = \frac{1}{ون}$

+ $\frac{1}{ون}$ تو ثابت کرو کہ د کا طریق ایک مخروطی ہو گا جس کامرکز و ہو گا۔

۶۔ اگر متوازی خطوط مستقیم کے ایک نظام میں سے ایک خط و ف وق ق ہو جو ایک دے ہوئے مخروطی کو ف ف پر اور دوسرے کو ق ق پر قطع کرتا ہے اور و ایسا ہو کہ متیلوں و ن و ن اور وق و ق کی نسبت مستقل ہے تو ثابت کرو کہ و کا طریق ایک مخروطی ہے جو ابتدائی مخروطیوں کے

نقاطِ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

۷۔ ایک مخروطی کے کوئی دو طرف و ف اور ق و ق ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتے ہیں ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ف} + \frac{1}{ق} = \frac{1}{و} \text{ مستقل ہے۔}$$

۸۔ اگر ایک ناقص کے محورِ اعظم پر ایک نقطہ لیا جائے جس کا فاصلہ

$$\sqrt{\frac{1}{ب} - \frac{1}{و}} \text{ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس نقطہ میں سے گذرنے والے}$$

کسی وتر کے مقطوعوں کے متکافوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔

۹۔ اگر ایک قائم زائے کے متوازی دتروں کے ایک نظام میں سے ایک وتر ف و ف ہو اور اگر عمودی قطر کے سرے د و ہوں تو ثابت کرو کہ ف و ف اور ف د ایک ثابت دائرہ پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ انفا قائم زائے اور "دائرہ" باہم بدلے جاسکتے ہیں۔

۱۰۔ اگر ایک مکافی کا کوئی ماسکی وتر ن و ن ہو اور ن و ن م و م ایک ثابت خطِ مستقیم پر عمود ہوں تو

$$\frac{ن}{ن} + \frac{ن}{ن} = \frac{ن}{ن}$$

مستقل ہوگا۔

۱۱۔ ایک دائرہ کے وتر ایک ثابت نقطے میں سے گذرتے ہوئے کھینچے گئے ہیں اور ان دتروں کو قطر مان کر دائرہ مرتسم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں میں سے کسی ایک کے لحاظ سے ثابت نقطہ کا قطبی ایک ثابت مکافی کو مس کرتا ہے۔

۱۲۔ ایک مخروطی پر کے ایک ثابت نقطے سے وتر کھینچے گئے ہیں جو

ایک ثابت قطر پر مساوی نقطوں سے قطع کرتے ہیں جہاں ان نقطوں کو مرکز سے
بیانٹنیا گیا ہے۔ ان وتروں کے دوسرے سروں پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع
کا طریق معلوم کرو۔

۱۳۔ اگر ایک ناقص کے کسی مماسی وتر کے سروں کے محدد (لا، ما) اور
(لا، ما) ہوں اور اس کے وسطی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو ثابت کرو کہ
ما، ما ایسے بدلیں گے جیسے لا۔ مکانی کی صورت میں کیا ہو جائے گا؟

۱۴۔ ایک ناقص کے محور پر دو ثابت نقطے میں 'ھ' ہیں جن کا فاصلہ
مرکز ج سے مساوی ہے۔ ان نقطوں میں سے گزرتے ہوئے دو طرف سے ق
اور ف 'ق' کیچنے گئے ہیں اور مماسین مرق کو س تک اس طرح غا۔ کیا گیا ہے
کہ مرق 'ق' کے فضلہ کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ س کا طریق ایک قائم
زاں ہے۔

۱۵۔ ایک ناقص کے محور پر دو ثابت نقطے میں 'ھ' ہیں جو مرکز سے مساوی
فاصلہ پر ہیں اور ان نقطوں میں سے گزرتے ہوئے دو طرف سے ق اور ف 'ق'
کیچنے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف پر کا مماس اور مرق 'ق' محور کے ساتھ ایسے
زاوے بناتے ہیں جن کے مماس ایک مستقل نسبت میں ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک ناقص کے دو متوازی و تر جو مماسوں میں سے کیچنے گئے ہیں
منحنی کو نقطوں ف، ف پر محور اعظم کی ایک ہی جانب قطع کرتے ہیں اور نقطوں
ف، ف میں سے گزرنے والا خط نیم محوروں ج، ج (ج، ج) کو علی الترتیب
ع، و پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\frac{ج}{ع} + \frac{ج}{و}$ مستقل ہے۔

۱۷۔ ایک ناقص کے دو مماس کسی بیرونی نقطہ سے کیچنے گئے ہیں۔
ثابت کرو کہ اگر وہ چار نقطے جہاں مماس محوروں کو قطع کرتے ہیں ایک دائرہ پر واقع
ہوں تو نقطہ کا طریق ایک ثابت قائم زاں ہوگا۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے مماس محور اعظم اور محور اصغر کے ساتھ
مساوی زاوے بنائیں لیکن وہ علی التوائم نہ ہوں تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک

قائم زائر ہو گا جس کے پاس ناقص کے ماس کے مول گئے۔

۱۹۔ اگر ایک مخروطی کے ماسوں کا ایک زون ایک ثابت نقطہ سے دو نقطوں پر ملے اور مرکز سے ان کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کر دو کہ نقطہ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے۔ نیز ثابت کر دو کہ نقطہ تقاطع کا ذریعہ ایک مخروطی ہے اگر متکافیوں کا حاصل ضرب یا مجموعہ مستقل ہو۔

۲۰۔ نقطہ و میں سے جو ایک ناقص کے ایک وتر اب کا نقطہ وسطی ہے کوئی وتر ف و ق لھنیا گیا ہے۔ ف اور ق پر کے ماس (ب) ت۔ علی الترتیب میں اور ت پر ملتے ہیں۔ ثابت کر دو کہ اس = ب ت۔

۲۱۔ مخروطی ع لا + ب ما = ا کے ماسوں کے ایسے زمرج کھینچے گئے ہیں کہ وہ ہمیشہ مخروطی لا + ۲ھ لا ما + ب ما = ا کے مزدون نقطوں کے متوازی رہتے ہیں۔ ثابت کر دو کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق

$$لا + ۲ھ لا ما + ب ما = ا = \frac{1}{ع} + \frac{1}{ب}$$

۲۲۔ ایک ناقص کے دو ماس ف ت و ف ت ہیں جو ایک ثابت نقطہ ق پر کے ماس سے نقطوں ت و ت پر ملتے ہیں۔ ف کا طریق معلوم کر دو (۱) جبکہ ق ت اور ق ت کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہو اور (۲) جبکہ ستطیل ق ت و ق ت مستقل ہو۔

۲۳۔ ایک مخروطی کے پاس (پ) کے ماس پر ایک ثابت نقطہ و ہے اور اس ماس پر و سے مساوی فاصلوں پر دو نقطے ف و ف ہیں۔ ثابت کر دو کہ اگر ف اور ف سے مخروطی کے دوسرے ماس کھینچے جائیں تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۲۴۔ اگر ایک دہ ہوئے مربع کے ماٹڈ دائرہ کے کسی نقطہ سے اس دائرہ کے ماس کھینچے جائیں جو مربع کے اندر کھینچا گیا ہو تو یہ ماس مربع کے وتروں

ایسے چار نقطوں پر ملیں گے جو ایک قائم زاؤ پر واقع ہوں گے۔

۲۵۔ ایک مخروطی کے ایسے دو محاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو جو ایک ثابت خط مستقیم پر مستقل طول کا مقطوعہ قلع کریں۔

۲۶۔ ایک مخروطی کے دو محاس ایک ثابت خط مستقیم ص من سے نقطوں ف اور ق پر ملتے ہیں۔ اگر ف، ق ایسے ہوں کہ ایک ثابت نقطہ و پر ف ق کے محاذی ایک قائمہ زاویہ بنے تو ثابت کرو کہ محاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دوسرا مخروطی ہوگا۔

۲۷۔ ایک دائرہ کے قطر کے سروں کو کسی نقطہ سے ملایا گیا ہے اور اس نقطہ سے دائرہ کے دو محاس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ عمود وار قطر پر کا وہ مقطوعہ جو ایک خط اور ایک محاس کے درمیان قطع ہوتا ہے اس مقطوعہ کے مساوی ہے جو دوسرے خط اور دوسرے محاس کے درمیان قطع ہوتا ہے۔

۲۸۔ مثلثات ایک ناقص کے گرد ایک دے ہوئے قاعدہ پر جو ناقص کو نقطہ ف پر مس کرتا ہے کھینچے گئے ہیں۔ اگر قاعدہ پر کے زاوے مرکز سے مساوی حاصل پر ہوں تو ثابت کرو کہ اسوں کا طریق وہ محاذ ہے جو ف میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر کھینچا گیا ہے۔

۲۹۔ ایک مکانی قائم محوروں کے درمیان پھلتا ہے۔ وہ منحنی معلوم کرو جو اس کے محور پر کا کوئی نقطہ مرسم کرتا ہے۔ اس سے ثابت کرو کہ ماسک اور اس ایسے منحنی مرسم کریں گے جن کی مساواتیں

$$لا^۲ = ل(لا + ما^۲)، لا^۲ = لا(لا + ما^۲ + ۳) = ل$$

ہیں جہاں ل، مکانی کا وتر خاص ہے۔

۳۰۔ اگر محدود کے محاذ اور ایک دوسرے سے زاویہ عہ پر ماٹل ہوں اور اگر ان کے درمیان ایک ناقص پھیلے تو ثابت کرو کہ مرکز کے طریق کی مساوات

$$جب عہ (لا + ما^۲ - ف^۲) - ۴ جم عہ (لا + ما^۲ جب عہ - ق^۲) = ۰$$

ہے جہاں ف اور ق سے علی السریب ناقص کے نیم محوروں کے مربعوں کا مجموعہ اور حاصل ضرب تعبیر ہوتے ہیں۔

۳۱۔ اگر ایک ناقص کے دو ماس وف، وق ہوں اور ان کے متوازی نیم قطر ج ف، ج ق ہوں تو ثابت کرو کہ

$$وف \times وق + ج ف \times ج ق = وس \times وھ$$

جہاں س، ھ، ماسکے ہیں۔

۳۲۔ دو ثابت نقطوں ف، ق میں سے خطوط مستقیم اب ف،

ج ق د کھینچے گئے ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور ایک دے ہوئے خط مستقیم کو نقطوں ا، ج پر اور دوسرے دے ہوئے خط مستقیم کو نقطوں ب، د پر قطع کرتے ہیں۔ خطوط مستقیم ا، د، ب، ج کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر دے ہوئے خطوط کے نقطہ تقاطع پر اس خط کے محاذی جو ف اور ق کو ملاتا ہے ایک قائم زاویہ بنے تو طریق ایک قائم زائد ہوگا۔

۳۳۔ ایک ناقص کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی پر اس نقطہ سے عمود کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس عمود کے پائین کا طریق ایک قائم زائد ہے اگر نقطہ ناقص کے ایک ثابت قطر پر واقع ہو۔

۳۴۔ دو ہم مرکز اور ہم محور مخروطیوں کے لحاظ سے ایک نقطہ ف کے قطبی نقطہ ق پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو ق ایک قائم زائد منقسم کریگا۔

۳۵۔ اگر دو دے ہوئے مخروطیوں کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی (۱) متوازی ہوں یا (۲) علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے کسی صورت میں نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے مرکز کا طریق جیکہ دو دے ہوئے نقطوں کے قطبی دے ہوئے خطوط مستقیم ہوں ایک ثابت خط مستقیم ہے۔

۳۷۔ نیم محوروں ا، ب کا ایک ناقص دو ثابت عمود وار خطوں کے درمیان پھیلتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے ماسکوں کا طریق منحنی

$$(لا + ما) (لا + ما + ب) - م = لا + ما = .$$

ہے۔

۳۸۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے ماسکوں کا طریق جنکا مرکز دیا گیا ہو اور جو دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کریں ایک زائد ہے۔

۳۹۔ مخروطیوں کے ایک سلسلہ کے ماسکے ایک دئے ہوئے متوازی، اضلاع کے دو متصل اضلاع پر ہیں اور یہ مخروطی متوازی الاضلاع کے دوسرے دو ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے مرکز ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔

۴۰۔ وہ دائرے جو ایک مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام پر انہیں قطع کر کھینچے گئے ہوں دوسرے مخروطی کو لف کرتے ہیں جس کے ماسکے ان ماسکوں کے نقاط تماس ہیں جو وتروں کے متوازی ہیں۔

۴۱۔ ایک قائم زائد ایک ثابت مرکز دار مخروطی کے ساتھ دوسرا تماس رکھتا ہے۔ اگر دوسرا تماس ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے تو قائم زائد کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہو گا جو ثابت مخروطی کے مرکز میں سے گزرے گا۔

۴۲۔ ایک دائرہ ایک قائم زائد کو نقطوں 'ف' 'ق' 'س' پر قطع کرتا ہے۔ مثلثات 'ق' 'س' 'س' 'س' 'ف' 'ف' 'ق' اور 'ف' 'ق' 'س' کے مراکز عمودی علی الترتیب 'ف' 'ق' 'س' 'س' 'ف' ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' 'ق' 'س' 'س' 'س' 'ف' 'س' 'س' 'ف' زائد کے قطر ہیں۔

۴۳۔ کوئی قائم زائد جس کے مقارب ایک ناقص کے محوروں کے متوازی ہوں ناقص کو ایسے نقطوں پر قطع کرے گا جن کے خارج المرکز زاوے $\epsilon + \beta + \gamma + \delta$ رشتہ

(۲۸۲)

$$\pi(1 + n^2) = \epsilon + \beta + \gamma + \delta$$

کو پورا کرینگے۔

۴۴۔ نصف قطر کے ایک دائرہ پر پانچ نقطے دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان پانچ قائم زائدوں کے مرکز جن میں سے ہر ایک اوپر کے نقطوں میں سے

چار نقطوں میں سے گزرتا ہے نصف قطر $\frac{1}{2}$ کے ایک دائرہ پر واقع ہوں گے۔
 ۴۵۔ اگر ایک قائم زائد کے متقارب ایک مخروطی کے محوروں کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے چار نقاط تقاطع کے وسط محل کا مرکز انہیں کے مرکزوں کے درمیان وسط میں ہے۔

۴۶۔ تین خطوط مستقیم علی الترتیب ایک مثلث کے تین ضلعوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ چھ نقطے جہاں وہ مثلث کے اضلاع کو قطع کرتے ہیں ایک مخروطی پر واقع ہیں۔

۴۷۔ اگر ایک ناقص کے نقطہ ف پر کا عماد محوروں سے لگے گی۔

۴۸۔ اور اس پر ایک نقطہ ایسا ہو کہ $\frac{1}{2} \text{ ف و} = \frac{1}{2} \text{ ف ب} + \frac{1}{2} \text{ ف ج}$ ۔ تو وہ میں سے گزرنے والا کوئی وتر ف پر ایک قائمہ زاویہ بنائے گا۔

۴۸۔ ایک ناقص کے ایک ثابت نقطہ و میں سے دو وتر و ف و ف کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر و میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے و پر کا ماس مدودہ خطوں کو ایسے دو نقطوں ق ق پر قطع کرے کہ مستطیل و ق x و ق مستقل ہو تو خط و ف خط و کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرے گا۔

۴۹۔ ایک مخروطی کے کسی نقطہ ف پر کے ماس کے متوازی وتر ل م کھینچا گیا ہے اور خط و ف ماس جو زاویہ ل ف م کی تنصیف کرتا ہے ل م سے ماس پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ماس کا طریق ایک زائد ہے جس کے متقارب ابتدائی مخروطی کے محوروں کے متوازی ہیں۔

۵۰۔ ایک دے ہوئے مرکز دار مخروطی کو ایک دوسرا مخروطی جو اول الذکر کے مرکز میں سے گزرتا ہے ایسے نقطوں پر مس کرتا ہے جو اول الذکر کے اس وتر کے سرے ہیں جو اس کے قاطع محور کے ایک دے ہوئے نقطہ میں سے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے مخروطی کے مرکز کا طریق بھی ایک مرکز دار مخروطی ہے۔

۵۱۔ ایک ناقص کا وتر ق ق مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے۔ ناقص کا مرکز ج ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ ق ج ق کا

مرکز 'ق' کے مختلف محلوں کے لیے ایک زائد ترسم کرے گا۔

۵۲۔ ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} =$ اکو کسی

(۳۸۳)

نقطہ پرس کرتا ہے اور مرکز میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس عمود کے پائین کا طریق جو ناقص کے مرکز سے ناقص اور دائرہ کے وتر تقاطع پر کھینچا گیا ہے ناقص

$$لا + ب^۲ ما^۲ = \frac{لا}{(لا - ب^۲)}$$

۵۳۔ ج کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ زائد ۲ لا - ما - ج = ۰، ناقص

$$\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} =$$

مزدوج قطروں میں سے ایک کا ایک سرا ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ ان دو محنیوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی اس قطر پر پڑے۔

۵۴۔ اگر دو دائروں کے متوازی وتر ج 'د' ع ف ہوں اور وہ

(دائرے) 'ا' اور 'ب' پر متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ چھ نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ع' 'ف' میں سے ایک مخروطی کھینچا جاسکتا ہے۔ محور اعظم کے محل کے لیے

عمل معلوم کرو۔

۵۵۔ اگر ایک دائرہ اور ایک مخروطی کے چار نقاط تقاطع میں سے دو پر

مخروطی کے ماس کھینچے جائیں اور ان ماسوں کا نقطہ تقاطع 'ف' دائرہ پر واقع

ہو تو دوسرے دو نقطوں پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع 'ت' بھی اسی دائرہ پر

واقع ہوگا۔ اس صورت میں وہ رشتہ معلوم کرو جو ایک مرکز دار مخروطی میں 'ف' اور

'ت' کے محلوں کو مل کر رہتا ہے اور نیز اس سے ایک مکافی کی صورت میں 'ف' اور 'ت' کے اضافی محل متعین کرو۔

۵۶۔ اگر ایک مکافی کے مرتب سے مساوی فاصلوں پر اور اس کی

مخالف سمتوں میں دو نقطے 'ت' 'ت' ہوں اور 'ت' سے ماس 'ت' 'ف' اور

'ت' 'ق' ہوں اور 'ت' سے 'ت' 'ف' اور 'ت' 'ق' تو ثابت کرو کہ 'ت' 'ف' 'ق' 'ت' 'ق' سب کے سب ایک قائم زائد پر واقع ہوں گے۔

۵۷۔ اگر ایک دے ہوئے مکانی کے ماسوں کے دوزوج 'وق' اور 'وق' 'وق' ہوں تو 'وق' 'ق' 'و' 'ق' میں سے گزرنے والا محرومی مکانی ہوگا اگر 'و' کا وسطی نقطہ دے ہوئے مکانی یہ ہو۔

۵۸۔ ایک ثابت نقطہ و کو مرکز مان لے دائرہ کھینچے گئے ہیں جو ایک محرومی کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ اور محرومی کے مشترک دتروں کے نقاط وسطی کا طریق ایک قائم زاہد ہے۔

(۲۸۴) ۵۹۔ ایک ثابت نقطہ و کو مرکز مان کر کوئی دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک محرومی کو چار حقیقی یا خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان چار نقطوں میں سے گزرنے والے تمام محرومیوں کے مرکوزوں کا طریق ایک قائم زاہد ہے جو دائرہ کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہے۔

۶۰۔ کسی نقطہ سے $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ کے تین عماد کھینچے گئے ہیں

ثابت کرو کہ اس شلث کا مرکز ہندسی جس کے اس ان عمادوں کے پائین

ہیں ناقص $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ پر ہے۔

۶۱۔ اگر کسی نقطہ سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے جائیں اور وہ ایک محرومی نقطوں گ، گ، گ، گ پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} = \frac{1}{h}$$

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} + \frac{1}{g} = \frac{1}{h}$$

۶۲۔ اگر ایک ناقص کے نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' پر کے عماد و ملیں

محرومی 'ا' 'ب' 'ج' 'د' کی مساوات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ثابت نقطہ و کیلئے اس محرومی کے مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے بشرطیکہ ناقص ہم محور ناقصوں کے

ایک نظام سے متعلق ہو۔

۶۳۔ ایک ناقص کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں اور نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' سے خطوط کھینچے گئے ہیں جو ناقص کے محور کے ساتھ وہی زاوے بناتے ہیں جو علی الترتیب ج 'ف'، 'ج'، 'ق'، 'ج' 'س' بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ چار خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۶۴۔ ایک ناقص کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں اور نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے خطوط کھینچے گئے ہیں جو ناقص کے محور کے ساتھ وہی زاوے بناتے ہیں جو علی الترتیب خطوط 'ف'، 'ق'، 'س' و 'س' بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ چار خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۶۵۔ 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور امدادی دائرہ پر 'ف'، 'ق'، 'س' وہ نقطے ہیں جو علی الترتیب 'ف'، 'ق'، 'س' کے متناظر ہیں۔ اگر 'ف'، 'ق'، 'س' میں سے خطوط کھینچے جائیں جو علی الترتیب 'ف'، 'ق'، 'ج'، 'س'، 'ج'، 'ق'، 'س' اور 'س' کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۶۶۔ اگر ایک مخروطی کے راس سے ان چار عمادوں پر عمود کھینچے جائیں جو ایک نقطہ و پر ملتے ہیں تو یہ خطوط مکرر مخروطی سے ایسے نقطوں پر ملیں گے جو ایک دائرہ واقع ہوں گے۔

$$۶۷۔ \text{مخروطی } \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۴ \text{ پر کے کسی نقطہ سے مخروطی } \frac{لا}{۱}$$

$$+ \frac{ما}{۲} = (\text{کے تماس کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ نقاط تماس پر کے عماد مخروطی } \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = (\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۲}) \text{ پر ملیں گے۔}$$

۶۸۔ اگر ایک ناقص ایک مثلث (ب ج کو محیط کرے اور مثلث کے راسوں پر کے تماس متقابل اضلاع کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ (ب' ج' پر کے

عماد کسی نقطہ و پر ملیں گے۔ یہ ثابت کرو کہ مثلث کے مختلف طولوں کے ۱
و کا طریق ناقص ۴ ل' لا + ۴ ب' ما = (۱ - ب') ہے۔

۶۹۔ اگر $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کے ایک وتر کے سرے پر کے قاس
ناقص پر کے ایک نقطہ پر ملیں اور و تر خود عماد نہ ہوتے ثابت کرو کہ وہ ہم مرکز قاص
 $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = \frac{۱}{(۱-ب')}$ کو سس کہے گا۔

۷۰۔ اس مثلث کا مرکز عمودی معلوم کر دس کے اس (اجمعیہ) جب
(اجمعیہ) ب' جب (ب' اور (اجمعیہ) ب' جب (ب' ثابت نہ کر لے اگر خالص
مرکز ہندسی ایک ثابت نقطہ ہو تو مرکز عمودی کا طریق ایک محرومی ہے۔

۷۱۔ زائد ۴ لا ما = ۱ ب' کا کوئی قاس ناقص $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$ سے
نقطوں 'ف' 'ق' پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطوں 'ف' 'ق' پر ناقص کے عماد
ناقص کے ایک ثابت قطر پر ملتے ہیں۔

۷۲۔ اگر ناقص ب' لا + ۴ ب' ما = ۱ ب' کے پار عماد نقطہ و سے کہیں

جائیں اور اگر ع' ع' ع' ع' وہ عمود ہوں جو مرکز سے ان قاصوں پر کہیں
گئے ہیں جو ان عمادوں کے بایں پر ناقص کے ہیں تو و کا طریق ایک زائد ہو گا
اگر

$$\frac{۱}{ج} = \frac{۱}{ع} + \frac{۱}{ع} + \frac{۱}{ع} + \frac{۱}{ع}$$

یہاں ۳ مستقل ہے۔
۷۳۔ ایک نقطہ سے ایک ناقص کے پار عماد کہیں گے ہیں اگر ان عمادوں کے
مربعوں کا مجموعہ مستقل ہو تو نقطہ کا طریق معلوم کرو۔
۷۴۔ نقطہ (ف' 'ب' سے ایک ناقص کے عماد کہیں گے ہیں۔ ثابت

کرکہ ان عمادوں کے پائین پر ناقص کے ماس ایک ایسا ذو اربعۃ الاضلاع بناتے ہیں کہ اگر (لا، ما) اور (لا، ما) متقابلہ راسوں کا کوئی زوج ہو تو

$$\frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب} = ۱ - ۱$$

نیز ثابت کرکہ ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں کے

نقاط وسطی کو ملانے والے خط مستقیم کی مسادات ف لایہ گ ما = ۰ ہے۔

۷۵۔ ایک ناقص کے چار نقطوں پر ماس کھینچے گئے ہیں جو ایسے ہیں کہ ان نقطوں پر کے عماد باہم متقاطع ہوتے ہیں۔ چار مستطیل بنائے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک کے دو متضاد اضلاع ناقص کے محوروں پر ہیں اور ایک وتر اوپر کے ماسوں میں سے ایک ماس پر ہے۔ ثابت کرکہ دوسرے وتروں کے بعید میرے ایک خط مستقیم میں واقع ہوتے ہیں۔

۷۶۔ ایک نقطہ ن سے ایک ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں جو ناقص سے نقطوں ا، ب، ج، د پر ملتے ہیں۔ اگر ایک ایسا محور ملی کھینچا جائے جو نقطوں ا، ب، ج، د میں سے اوپر ناقص کے ماسکے میں سے گزرے اور ناقص کے نظیری مرتب کو مس کرے تو ثابت کرکہ ن، دو ثابت خطوں میں سے ایک پر واقع ہوتا ہے۔

۷۷۔ اگر ا، ب، ج، د پر کے عماد ایک نقطہ و پر ملیں تو

$$ا \times ب \times ج \times د = ک \times م \times و$$

جہاں م ایک ماسکے ہے۔

۷۸۔ کسی نقطہ سے ایک قائم زائد کے چار عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کرکہ ان عمادوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اس فاصلہ کے مربع کے تین گنے کے مساوی ہے جو قائم زائد کے مرکز سے نقطہ کا ہے۔

۷۹۔ ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کا ایک وتر کھینچا گیا ہے جو محور اعظم

سے ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے جس کا فاصلہ مرکز سے $\frac{۱-ب}{ا+ب}$ ہے۔ اس وتر

کے سروں پر ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کرکہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے۔

دو نقطوں میں سے گزرنے والا خط محو یا عظم کو کہاں قطع کرتا ہے۔

۸۷۔ اگر دو مرکز دار مخروطیوں کی مساداتیں ع = و = ہوں اور ان کے مرکزوں پر ع اور و کی قیمتیں ع = و = ہوں تو ثابت کرو کہ خطوط ج ن ج ن کے نقطہ تقاطع کے طریق کی مسادات ع = و = ہے جہاں ن ایک منحنی پر اور ن دوسرے منحنی پر ہے اور ن ج ج کے متوازی ہے۔ اس صورت کا امتحان کرو جبکہ مخروطی متشابہ اور متشابهہ واقع ہوں۔

۸۸۔ دو دائرے ایک ناقص کے ساتھ دو ہر اندرونی تماس رکھتے ہیں اور ایک تیسرا دائرہ چار نقاط تماس میں سے گزرتا ہے۔ اگر ناقص کے کسی نقطہ سے ان تین دائروں کے تماس ت ت ت ہوں تو ثابت کرو کہ ت ت = ت ت۔

۸۹۔ اس مخروطی کی عام مسادات معلوم کرو جو دو دائروں (لا۔ لا) + م = ج (لا۔ ب) + م = ا کے ساتھ دو ہر تماس رکھے۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے وتر خاص کے سرے کے طریق کی مسادات م (لا۔ لا) (لا۔ لا) = (لا + ج) = ج لا ہے جبکہ مخروطی دائروں (لا ± لا) + م = ج ا کے ساتھ دو ہر تماس رکھے۔

۹۰۔ ثابت کرو کہ خطوط لا م = ا اور لا م = ا جو دو مخروطیوں

(ل م۔ ل م) لا + ۲ (ل۔ ل) م م لا + (م۔ م) م م م = ۲ (ل م۔ م ل) لا اور (م ل۔ م ل) م م لا + ۲ (م۔ م) ل ل لا + (ل۔ ل) ل ل لا = ۲ (م ل۔ ل م) لا کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں ایک مخروطی کے مزدوج قطر ہیں۔

۹۱۔ اگر ایک ثابت نقطہ میں سے ایک ناقص کے وتر کھینچے جائیں اور ان پر انہیں قطران کردائرے مرسم کئے جائیں تو ثابت کرو کہ ناقص کے ساتھ ان دائروں کے دوسرے وتر تقاطع بھی ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

۹۲۔ ثابت کرو کہ مخروطی لا لا ب م = (لا۔ ب) ۲ میں مثلثوں کی

(۲۸۵)

لا انتہا تعداد بنائی جاسکتی ہے جبکہ اضلاع مخروطی لا + م = ا کو مس

کرتے ہوں۔

۹۳۔ اگر ایک ذوالربعۃ الاضلاع کے مین اضلاع جہاں ذوالربعۃ الاضلاع ایک محوطی میں بنا باگیات نہیں ثابت نقطوں میں۔ جو ایک ہی خط مستقیم میں واقع ہیں گزریں تو ثابت کرو کہ جو اضلاع بھی ایک ثابت نقطہ یا سے جو اسی خط مستقیم میں واقع ہو گا گزریں گے۔

۹۴۔ اگر ایک ناقص کا ایک وتر ق ایک دے ہوئے ہم مرکز دائرہ کو مس کرے اور وہ دائرہ جس کا قطر ق ہے ناقص کے مرکز نقطوں ق ق پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ق ق ایک دوسرے ہم مرکز ثابت دائرہ کو لف کرے گا۔

۹۵۔ ایک خط جو ایک ناقص کے مساوی مردون قطروں میں سے ایک سے متوازی ہے محور اعظم کے سروں کے مساوی کو نقطوں ق ق پر قطع کرتا ہے اور نقطوں ق ق سے ناقص کے دوسرے مساوی نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ و کا طریق ایک قائم زاویہ ہے۔

۹۶۔ ایک قائم زاویہ پر چار ثابت نقطے ل' م' ن' س' ہیں اور اس کے دن کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ ن' (ل' م' پر عمود ہے اور وہ ن' س' سے ل' پر ملتا ہے؛ ن' ج' ل' ن' پر عمود ہے اور وہ م' س' سے ج' پر ملتا ہے؛ ن' ب' ل' س' پر عمود ہے اور وہ م' ن' سے ب' پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن' (م' ن' = ن' ب' = ن' ج' = ن' ج'۔

۹۷۔ ایک مکانی کے ایک ثابت قطر پر ن کوئی نقطہ ہے۔ ن سے نغنی کے عماد نغنی کو (ب' ج' پر قطع کرتے ہیں۔ ن' (ن' ب' ن' ج' کے متوازی ماس' (ب' ج' پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثوں (ب' ج' اور (ب' ج' کے رقبوں میں نسبت مستقل ہے۔

۹۸۔ ایک دائرہ (مرکز ج') کے قطر (ب' پر نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ن اور ب' کو قطر یا مرکز دائرہ کے بیچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اسی دائرہ کے مرکز کا طریق ن' دائروں کو مس کرتا ہے دونوں اقصوں پر مستقل ہے جن کا ایک اس کے ج' ہے۔

۹۹۔ ایک مخروطی کے مرکز اور ماسکوں میں سے کسی نقطہ تک خطوط کھینچے گئے ہیں اور یہ خطوط متناظر و تراکب سے نقطوں 'گ' 'گ' پر تقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں کا بنیادی محور جو 'س' 'گ' میں 'گ' پر نہیں قطر مانکر کھینچے گئے ہیں، وہ میں سے گزرتا ہے۔

۱۰۰۔ اگر ایک مثلث (ب ج کے اضلاع دو دو کے ہوں) خطوط متناظر و تراکب سے علی الترتیب نقطوں 'ا'، 'ا'، 'ب'، 'ب'، 'ج'، 'ج' پر ملیں اور آزادانہ لٹا دیں تو 'ب' 'ب'، 'ج' 'ج'، 'ا' 'ا'، 'ب' 'ب'، 'ج' 'ج' کے گرد مخروطی مرتسم کئے جائیں تو ان مخروطیوں کے تین دوسرے مشترک وتروں میں سے ہر ایک، مثلث (ب ج کے ایک راس میں سے گزرے گا اور یہ سب و تراکب نقطہ پر ملیں گے۔



گیارہواں باب

مخروطیوں کے نظام

۲۰۶ — مخروطی کی عام سے عام مساوات

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k = 0$$

میں چھ مستقل و، ہ، ب، گ، ف، ج ہیں۔ لیکن چونکہ ہم مساوات کو کسی مستقل مقدار سے ضرب دے سکتے ہیں یا تقسیم کر سکتے ہیں اور اس سے لا اور ما کے درمیانی رشتہ میں جو مساوات سے بیان ہوتا ہے کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی اس لیے فی الحقیقت صرف پانچ مستقل کسی مخصوص مخروطی کی مساوات میں ہوا کرتے ہیں چنانچہ یہ مستقل مقادیر وہ پانچ نسبتیں ہیں جو چھ مقادیر و، ہ، ب، گ، ف، ج ایک دوسرے کے ساتھ رکھی ہیں پس ایک مخروطی سے پانچ شرطیں پوری کرائی جاسکتی ہیں اور اس سے زیادہ نہیں۔ مثلاً مخروطی کو پانچ مفروضہ نقطوں میں سے گذارا جاسکتا ہے یا اس طرح کھینچا جاسکتا ہے کہ وہ چار مفروضہ نقطوں میں سے گذرے اور ایک دئے ہوئے خط کو مس کرے۔ ان پانچ شرطوں سے جن کو کوئی مخروطی پورا کرے مستقلوں کے درمیان پانچ مساواتیں پیدا ہوتی ہیں اور یہ پانچ غیر تابع مساواتیں پانچ نسبتوں کو متعین کرنے کے لیے ضروری اور کافی دونوں ہیں یہ ہو سکتا ہے کہ دی ہوئی مساواتوں سے نسبتوں کی قیمتوں کا ایک

زیادہ جٹ حاصل ہوں اور اس لیے ایک سے زیادہ مخروطی دی ہوئی شرطوں کو پورا کریں لیکن ایسے مخروطیوں کی تعداد محدود ہوگی اگر شرطیں فی الحقیقت ایک دوسرے پر منحصر نہ ہوں۔

اگر صرف چار شرطیں (یا چار سے کم) دی گئی ہوں تو مخروطیوں کی لامتناہی تعداد ان شرطوں کو پورا کرے گی۔

دو پانچ شرطیں جن کو کوئی مخروطی پورا کر سکتا ہے ایسی ہونی چاہئیں کہ ہر ایک شرط سے مستقلوں کے درمیان ایک رشتہ حاصل ہو مثلاً ایک مفروضہ نقطہ میں سے گزرنے کی شرط یا ایک مفروضہ خط مستقیم کو مس کرنے کی شرط۔

بعض شرطیں ایسی ہوتی ہیں کہ ان سے مستقلوں کے درمیان دو یا زیادہ رشتے حاصل ہوتے ہیں اور کسی ایسی شرط کو مذکورہ پانچ شرطوں میں سے دو یا زیادہ سمجھنا ہوگا۔ مثلاً

اگر ایک دے ہوئے نقطہ کو مخروطی کا مرکز بنانا ہے تو دو شرطیں پوری ہونی چاہئیں (صفحہ ۱۶۸)۔

اگر ایک ماسک دیا گیا ہے تو یہ دو ماس دے جانے کے معادل ہے [صفحہ ۱۹۴]۔ اگر یہ دیا گیا ہے کہ ایک خط ایک مخروطی کو ایک دے ہوئے نقطہ پر مس کرتا ہے تو یہ دو شرطوں کے لئے ہے کیونکہ دے ہوئے مخروطی پر دو متصلہ نقطے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ایک متقارب کی سمت دی گئی ہے تو یہ اس کے معادل ہے کہ ایک نقطہ (لاتنا ہی پر) دیا گیا ہے۔

اگر متقارب کا محل دیا گیا ہے تو یہ دو شرطوں کے معادل ہے کیونکہ دو نقطے (لاتنا ہی پر) معلوم ہوتے ہیں۔

اگر محوروں کے محل دے گئے ہیں تو یہ تین شرطوں کے معادل ہے۔ اگر خروج المرکز دیا گیا ہے تو یہ بالعموم ایک شرط کے معادل ہے لیکن چونکہ

$$\frac{z^2}{1-z^2} = \frac{(1-b)^2 + 4}{1-b^2} \quad \text{[صفحہ ۱۹۲] اس لیے اگر } z=0 \text{ دیا گیا}$$

ہے تو دوسرے میں ۱ = ب اور ۲ = ماسل ہوتی ہیں۔

۲۰۷۔ پانچ نقطوں میں سے چھیں کوئی چار ایک خط مستقیم میں نہ ہوں ایک اور صرف ایک مخروطی کھینچا جاسکتا ہے۔

اگر ان میں سے تین نقطے ایک خط مستقیم میں ہوں تو ان پانچ نقطوں میں سے گزرنے والا مخروطی خطوط مستقیم کا ایک زوج ہونا پائے کیونکہ کوئی خط مستقیم کسی کافی ناقص یا زائد کو تین نقطوں پر نہیں مل سکتا۔ ان پانچ نقطوں میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کا محمولہ بالزوج یہ ہے کہ وہ خط مستقیم جس پر تین نقطے واقع ہیں اور (۲) وہ خط مستقیم جو دوسرے دو نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

لیکن اگر پانچ نقطوں میں سے دو نقطوں سے زیادہ ایک خط مستقیم نہ ہوں تو فرض کرو کہ ان میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کو محور لا اور دوسرے دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کو محور مایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ ان محوروں کے حوالے سے محمولہ بالا چار نقطوں کے محدود (۱) (۲) (۳) (۴) اور (۵) (۶) (۷) (۸) ہیں۔
خطوط مستقیم کے زوج

(۲۹۱)

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(1 - \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) = 0 \text{ اور } لا = 0$$

وہ مخروطی ہیں جو ان چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔ اس لیے وہ تمام مخروطی جو ان چار نقطوں میں سے گزریں گے مساوات

$$لا = 0 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(1 - \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) = 0$$

سے حاصل ہوں گے۔ یہ مخروطی پانچویں نقطہ میں سے جس کے محدود لا مایا ہیں گزرے گا اگر نہ کو ایسا منتخب کیا جائے کہ

$$L = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = 1$$

نہ کی ایک اور صرف ایک قیمت ہے جو اس مساوات کو پورا کرتی ہے اور اس لیے ایک اور صرف ایک مخروطی ہے جو ان پانچ نقطوں میں سے گزرے گا۔

اگر ان میں سے چار نقطے ایک خط مستقیم پر ہوں تو ایک سے زیادہ مخروطی ان پانچ نقطوں میں سے گزریں گے کیونکہ ایسا مخروطی دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہوگا جن میں سے ایک تو وہ خط مستقیم ہے جس پر چار نقطے واقع ہیں اور دوسرا کوئی خط مستقیم ہے جو پانچویں نقطے میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۱۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو پانچ نقطوں

$$(1, 2), (1, 1), (3, 1), (3, 0), (0, 1) \text{ اور } (3, 2)$$

میں سے گزرتا ہے۔

نقطوں $(1, 2), (1, 1), (3, 1), (3, 0)$ اور $(0, 1)$ کے زوج پہلے چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے مخروطی

$$L = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = 1$$

بھی ان چار نقطوں میں سے گزرتا ہے۔ نقطہ $(3, 2)$ اس مخروطی پر ہوگا اگر

$L = 1$ اس لیے مطلوبہ مساوات

$$L = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = 1$$

مثال ۲۔ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطی

کی عام مساوات معلوم کرنا۔

ان میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط کو محور لا اور دوسرے دو نقطوں کو ملا کر محور لا قرار دو اور فرض کرو کہ وہ خطوط جن کی مساواتیں $L = 1$ اور $L = 2$ ہیں محوول کو دے ہوئے نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔

اب $L = 1$ اور $L = 2$ کے مساواتیں $(L = 1)$ اور $(L = 2)$ کے مساواتیں

ہیں جو دے ہوئے چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے وہ تمام مخروطی جو چار
نقطوں میں سے گزرتے ہیں مساوات

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (1) \quad \text{یا} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad (2)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۰۹۔ دفعہ ۲۰۸ کی مساوات (۲) مکانی کو تعبیر کر کے اگر درجہ دوم
کی رقبیں ایک کامل مربع ہوں یعنی اگر

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

اس مساوات کی دو اصلیں ہیں اور اس لئے دو مکانی چار دے ہوئے
نقطوں میں سے گزریں گے۔ یہ مکانی حقیقی ہوں گے اگر مساوات کی اصلیں
حقیقی ہوں اور یہ اس وقت ہو گا جبکہ $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ مثبت ہو۔ یہ ثابت
کرنا آسان ہے کہ اگر $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ منفی ہو تو ذرا بعد از اصلاح متداخل ہو گا۔
اس صورت میں مکانی خیالی ہوتے ہیں جیسا کہ ہندیسی طور پر واضح ہے۔
جب مساوات (۲) دفعہ ۲۰۸ کی درجہ دوم کی رقبیں ایک کامل مربع

ہوں تو یہ مربع $(x^2 + y^2 + z^2)$ ہونا چاہئے۔ پس [دفعہ ۱۸۲]
مذکورہ بالا دو مکافیوں کے محاور ان خطوں کے متوازی ہیں جن کی مساواتیں

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{یا} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

یہ دو خطوط مستقیم دے ہوئے چار نقطوں میں سے گزرنے والے کسی
مخروطی کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں [دفعہ ۱۸۴]

پس وہ تمام مخروطی جو مفروضہ چار نقطوں میں سے گزرتے
ہیں مزدوج قطروں کا ایک زوج رکھتے ہیں جو ان نقطوں میں سے

گزرنے والے دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں۔

۲۱۔ ان مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرنا جو چار ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

اس نظام کے کسی مخروطی کی مساوات حسب دفعہ ۲۰۸

$$لہ لا + (ا + لا + ب - ما - ا) = ۰$$

ہے۔ اس مخروطی کے مرکز کے محدود مساواتوں

$$لہ لا + (ا + لا + ب - ما - ا) + (ا + لا + ب - ما - ا) = ۰$$

$$اور لہ لا + ب - (ا + لا + ب - ما - ا) + (ا + لا + ب - ما - ا) = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

ان مساواتوں کو علی الترتیب لا اور ما سے ضرب دو اور تفریق کر دو تو

لہ کی تمام قیمتوں کے لیے حاصل ہوگا

$$(ا - لا - ب + ما) + (ا + لا + ب - ما - ا) = ۰$$

$$یا ۲ا - ۲لا - ۲ب + ۲ما - (ا + لا + ب - ما - ا) = ۰$$

اس لیے مرکز کا طریق ایک مخروطی ہے جس کے مقاب خطوط $ا$ و $لا$ - $ب$ + $ما$ = کے متوازی ہیں یعنی ان دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی

ہیں جو چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔ [یہ دو مکافی نظام کے مخروطی ہیں

اور اس لیے ان کے مرکز مرکزوں کے طریق پر لاتنا ہی پر کے نقطے ہیں]۔

ثبوت دیگر۔ اگر $ف = ۰$ اور $ف = ۰$ کوئی دو مخروطی ہوں جو چار دے ہوئے

نقطوں میں سے گزرتے ہیں تو ان چار نقطوں میں سے گزرنے والا کوئی اور مخروطی مساوات

$$لہ ف + لہ ف = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ پس مرکز مساواتوں

$$لہ ف + لہ ف = ۰$$

$$\text{اور } \frac{1}{2} = \frac{\text{فرقہ ۱}}{\text{فرقہ ۲}} + \frac{\text{فرقہ ۱}}{\text{فرقہ ۲}} = 0$$

سے حاصل ہوگا۔ اس سے مرکزوں کا طریق مخروطی

$$\frac{\text{فرقہ ۱}}{\text{فرقہ ۲}} - \frac{\text{فرقہ ۱}}{\text{فرقہ ۲}} = \frac{\text{فرقہ ۱}}{\text{فرقہ ۲}} = 0$$

۲۱۱۔ دفعہ ۲۱۰ میں حاصل شدہ مرکزوں کا طریق مبدا میں سے گزرتا ہے یعنی دے ہوئے چار نقطوں میں سے دو کو ملانے والے خط اور دیگر دو کو ملا کر خط کے نقطہ تقاطع میں سے۔ پس تشاکل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس طریق کو ان چار نقطوں میں سے گزرنے والے دو خطوں کے دیگر زوجوں کے نقاط تقاطع میں سے بھی گزرتا پایا ہے۔ (یہ فوراً ملاحظہ کیا جاسکتا تھا کیونکہ خطوں کے زوج نظام کے مخروطی ہیں اور ان کے تقاطع ان مخروطیوں کے مراکز ہیں اور اس لیے یہ نقاط تقاطع مرکزوں کے طریق پر واقع ہیں)۔

مرکز طریق محور لا کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں لا = ۰ اور جہاں لا = $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ۔

اس لیے طریق نقطوں $(\frac{1}{2}, 0)$ اور $(0, \frac{1}{2})$ کے درمیان وسط میں سے گزرتا ہے یعنی اس خط کے نقطہ وسطی میں سے جو ان دو ثابت نقطوں کو ملاتا ہے اسی طرح یہ طریق اس خط کے نقطہ وسطی میں سے بھی گزرتا ہے جو چار نقطوں میں سے کسی اور دو کو ملاتا ہے۔

(۹۴) پس اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کوئی چار نقطے ہوں تو 'ا'، 'ب' اور 'ج'، 'د' اور 'ا'، 'ب' اور 'ج' کے تین نقاط تقاطع اور خطوط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' اور 'ا'، 'ب'، 'ج' کے نقاط وسطی سب ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں (اس مخروطی کو 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کا ہے نو نقطہ مخروطی کہہ سکتے ہیں) اور یہ مخروطی ان مخروطیوں کے مراکزوں کا طریق

جو چار نقطوں 'د' 'ب' 'ج' 'د' میں سے گزرتے ہیں۔
'د' 'ب' 'ج' 'د' کے نو نقطوں مخروطی کا مرکز

$$۴ = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} = ۲ \quad \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} = ۲$$

سے حاصل ہوتا ہے اور اس لیے وہ چار نقطوں 'د' 'ب' 'ج' 'د' کا مرکز ہندسی ہے۔
۲۱۲۔ اگر 'د' اور 'ب' کی علامتیں ایک ہی ہوں تو ہم دفعہ ۱۰۲ سے
یہ دیکھتے ہیں کہ مرکزوں کا طریق ایک زائد ہے۔ اگر 'د' اور 'ب' کی علامتیں
مختلف ہوں تو مرکزوں کا طریق ایک ناقص ہے۔ اگر 'د' = 'ب' یعنی اگر چار
نقطے ایک دائرہ پر ہوں تو مرکزوں کا طریق یکساں قائم زائد ہے۔ اگر 'د' = 'ب'
اور محاور علی القواثم ہوں تو نظام کے تمام مخروطی قائم زائد ہیں اور مرکزوں کا
طریق ایک دائرہ ہے۔ اس صورت میں چار نقطوں میں سے کسی دو کو ملائیو والا
خط اس خط پر عمود ہوتا ہے جو دوسرے دو نقطوں کو ملاتا ہے اس لیے 'د'
مثلث 'د' 'ب' 'ج' کا مرکز عمودی ہے۔

پس ایک دائرہ مثلث 'د' 'ب' 'ج' کے عمودوں کے پائینوں میں
اور 'د' 'ب' 'ج' 'د' 'ب' 'ج' 'د' کے نقاط وسطی میں سے
گزرے گا جہاں 'د' مثلث 'د' 'ب' 'ج' کا مرکز عمودی ہے۔ یہ دائرہ ان
تمام مخروطیوں کے مرکزوں کا طریق ہے (جو سب کے سب قائم زائد ہیں) جو
'د' 'ب' 'ج' 'د' میں سے گزرتے ہیں۔ اس دائرہ کو نو نقطوں کا طریق دائرہ کہتے ہیں۔
۲۱۳۔ دفعہ ۲۰۸ میں جن چار نقطوں کی تعریف کی گئی ہے ان میں سے
گزرنے والے کسی مخروطی کے متقابل خطوط

$$ل + لا + ب + با = (لا + ب + با) = ۴$$

$$لا + لا + ب + با = (لا + ب + با) = ۴$$

کے متوازی ہوتے ہیں لیکن یہ خطوط (دفعہ ۱۸۴) مرکزوں کے طریق کے مزدوج
قطروں کے متوازی ہیں۔ اس لیے چار نقطوں میں سے گزرنے والے کسی مخروطی کے
متقابل مرکزوں کے طریق کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں چنانچہ

(۲۹۵)

اُس قائم زائد کے متقارب جو چار نقطوں میں سے گزرتا ہے مرکزوں کے طریق کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے محروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک ثابت نقطہ کا قطبی ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔
ثابت نقطہ کو مبداء قرار دو اور فرض کرو کہ محروطیوں میں سے دو

$$س = (لا + لا) + (ب + ما) + (گ + لا) + (ف + ما) + ج =$$

اور $س = (لا + لا) + (ب + ما) + (گ + لا) + (ف + ما) + ج =$ ۔
ہیں۔ تب اس نظام کا کوئی محروطی $س = ل$ سے ملے گا۔
مبداء کا قطبی

$$گ + لا + ف + ما + ج = ل \quad (گ + لا + ف + ما + ج) =$$

ہے اور یہ ل کی تمام قیمتوں کے لیے خطوط

$$گ + لا + ف + ما + ج = ۰ \quad اور \quad گ + لا + ف + ما + ج = ۰$$

کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

مثال ۲۔ چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے محروطیوں کے نظام کے لحاظ سے کسی دئے ہوئے خط مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک محروطی ہوگا۔
ثابت خط مستقیم کو محور لا قرار دو اور فرض کرو کہ ایک محروطی کی مساوات
مثال کے نمونہ کی ہے۔ $(لا + لا) + (ب + ما) + (گ + لا) + (ف + ما) + ج =$ کا قطبی

$$لا + لا + (ب + ما) + (گ + لا) + (ف + ما) + ج =$$

$ل = (لا + لا + (ب + ما) + (گ + لا) + (ف + ما) + ج) + (لا + لا + (ب + ما) + (گ + لا) + (ف + ما) + ج) =$
ہے۔ اگر یہ وہی خط ہے جو $ل = ۰$ ہے تو لا کا سر اور مستقل رقم صفر ہونی چاہئے۔ انکو
صفر کے مساوی رکھو اور لہ کو سا فطر کرو۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ کسی محروطی کے لحاظ سے جو ایک دئے ہوئے مربع
راسوں میں سے گزرتا ہے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

پر مخروطی کے کسی نقطہ سے کھینچے گئے ہیں۔

۲۱۵۔ اگر ایک مخروطی پر چار نقطے 'ق' 'س' 'ف' 'ب' ہوں اور
 'ق' 'ف' 'س' میں نقطہ 'ا' پر 'ق' 'س' 'ف' میں نقطہ 'ب' پر اور
 'ف' 'س' 'ق' میں نقطہ 'ج' پر ملیں تو تین نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' میں سے
 ہر ایک 'مخروطی' کے لحاظ سے 'اُس' خط کا قطب ہوگا جو دوسرے
 دو نقطوں کو ملاتا ہے۔

(ا) کو مبدا اور خطوط 'ا' 'س' 'ق' کو علی الترتیب محور
 اور محور ماقرار دو۔

فرض کرو کہ 'ف' 'س' اور 'ق' 'س' کی مساواتیں

$$(۱) \quad \dots \dots \dots ' = ۱ - \text{ب} + \text{ا} - \text{ق}$$

$$(۲) \quad \dots \dots \dots ' = ۱ - \text{ب} + \text{ا} - \text{س}$$

ہیں۔ تب 'ف' 'س' اور 'ق' 'س' کی مساواتیں

$$(۳) \quad \dots \dots \dots ' = ۱ - \text{ب} + \text{ا} - \text{ق}$$

$$(۴) \quad \dots \dots \dots ' = ۱ - \text{ب} + \text{ا} - \text{س}$$

ہوں گی۔

مخروطیوں 'ا' 'ب' = . اور (ا + لا + ب - ا) (ا + لا + ب - ا) = . کے
 نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے کسی مخروطی کی مساوات

$$\text{لا} + \text{ا} + (ا + لا + ب - ا) (ا + لا + ب - ا) = .$$

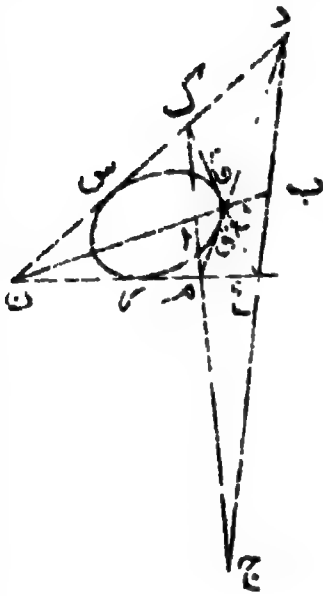
ہے۔ اس مخروطی کے مبدا کا قطبی [دفعہ ۱۸۰]

$$(ا + لا) (ا + لا + ب - ا) = ۲ - \text{ا}$$

ہے۔ اس کو شکلوں

$$\text{ا} + \text{ا} + \text{ب} - \text{ا} - ۱ + \text{ا} + \text{لا} + \text{ب} - \text{ا} = ۱$$

تب مثل میں $ل$ ، $ف$ ق کا قطب ہے اور $ن$ ، $س$ کا قطب ہے۔
 اس لیے $ل$ ، $ن$ ، $ف$ ق اور $س$ کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہے۔ اسی طرح
 $ک$ ، $م$ ، $س$ ، $ف$ اور $س$ ق کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہے۔
 پس $ا$ ، $ج$ ، $ل$ ، $ن$ اور $ک$ کے نقطہ تقاطع ہے اس خط کا قطب ہے جو
 $ف$ ق، $س$ کے نقطہ تقاطع اور $س$ ق



س ق کے نقطہ تقاطع کو ملا آئے۔

لیکن (دفعہ ۲۱۵) $ف$ ، $س$ اور
 $س$ ق کا نقطہ تقاطع اس آخری خط کا قطب
 اس لیے $ا$ ، $ک$ ، $س$ اور $س$ ق کا
 نقطہ تقاطع ہے۔

اس طرح $ب$ ، $س$ ، $ف$ اور $س$ ق
 کا بھی نقطہ تقاطع ہے اور $ج$ ، $ف$ ق اور
 $س$ کا بھی نقطہ تقاطع ہے۔

پس دفعہ ۲۱۵ کی رو سے مثلث
 $ا$ ، $ب$ ، $ج$ خود قطبی ہے [نیز دیکھو دفعہ ۲۸۶]

۲۱۷۔ اس مخروطی کی عام مساوات معلوم کرنا جو محوروں کے محوروں کو مس کرے۔

اگر نقاط $ا$ ، $ب$ ، $س$ کو ملانے والے خط کی مساوات
 $ا$ ، $لا$ ، $ب$ ، $ما$ ۔ $ا = ۰$ ہو تو اس مخروطی کی مساوات جو مخروطی $لا$ ، $ما$ ۔ کے ساتھ ان نقطوں
 دو ہر اتنا $س$ رکھے جہاں خط $ا$ ، $لا$ ، $ب$ ، $ما$ ۔ $ا = ۰$ ۔ اس سے ملتا ہے جو جب دفعہ ۱۸۷
 $(ا$ ، $لا$ ، $ب$ ، $ما$ ۔ $ا$ ۔ ۲ ۔ $لا$ ، $ما$ ۔ $ا = ۰$ ۔

ہے۔

۲۱۸۔ اس مخروطی کی عام مساوات معلوم کرنا جو
 چار دئے ہوئے خطوں کو مس کرے۔

ان میں سے دو خطوط مستقیم کو محاور قرار دو اور فرض کرو کہ دوسرے دو خطوط مستقیم کی مساواتیں

ل لا + م ما = ۱ اور ل لا + م ما = ۱۔
ہیں۔ محزوطی کو مس کرنے والے کسی محزوطی کی مساوات

$$(۱) (ل لا + ب با - ۱) = ۱ - ل لا + م ما = ۱ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے۔
وہ خطوط جو مبداء کو ان نقطوں سے ملاتے ہیں جہاں (۱) ل لا + م ما = ۱ کو قطع کرتا ہے مساوات

$$(۲) (ل لا + ب با - ل لا - م ما) = ۲ - ل لا + م ما \dots \dots \dots (۲)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

خط محزوطی کو مس کریگا اگر خطوط (۲) منطبق ہوں جس کے لیے شرط

$$(۱ - ل لا) (ب با - م ما) = (۱ - ل لا) (ب با - م ما) - ل لا$$

ہے۔ اس لیے

پس چار خطوط مستقیم

(۲۹۹)

لا = ۱، ما = ۱، ل لا + م ما = ۱، اور ل لا + م ما = ۱۔
کو مس کرنے والے محزوطی کی عام مساوات

$$(۱) (ل لا + ب با - ۱) = ۱ - ل لا + م ما$$

ہے جہاں مبدلوں 'ب با' 'ل لا' میں ربط

$$ل = ۲ - (۱ - ل لا) (ب با - م ما) = ۲ - (۱ - ل لا) (ب با - م ما)$$

ہیں۔

۲۱۹۔ ان محزوطیوں کے مرکوزوں کا طریق معلوم کرنا جو چار دے ہوئے

خطوط مستقیم کو مس کریں۔

اگر دے ہوئے خطوں میں سے دو کو محاور قرار دیا جائے اور دیگر دو کی

مساواتیں

$$ل + م - م = ۱ \quad اور \quad ل + م - م = ۱$$

ہوں تو مخروطی کی مساوات

$$(۱ + ل + ب - م) - ۲ = ل + م - م = ۱$$

ہوگی بشرطیکہ

$$ل = ۲ - (۱ - ل) (ب - م) \dots (۱)$$

$$ل = ۲ - (۱ - ل) (ب - م) \dots (۲)$$

مخروطی کا مرکز مساواتوں

$$(۱ + ل + ب - م) - ل = م = ۱ \quad اور \quad (۱ + ل + ب - م) - ل = ل = ۱$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے

$$ل = ۱ = ب - م \quad اور \quad ل = ۲ - (۱ - ل) = ل = م \dots (۳)$$

مطلوبہ طریق معلوم کرنے کے لیے مساواتوں (۱) (۲) اور (۳)

سے 'ل' اور 'ب' کو ساقط کرنا چاہئے۔

(۱) اور (۳) سے

$$ل = ۲ - (۱ - ل) (ب - م) = ۲ - (۱ - ل) (ب - م) = ل$$

اس لیے

$$ل = ۲ - (۱ - ل) (ب - م) = ل$$

کیونکہ $ل = ب - م$

اسی طرح (۲) اور (۳) سے

$$ل = ۲ - (۱ - ل) (ب - م) = ل$$

ل کو ساقط کرنے پر مرکوزوں کے طریق کی مساوات

$$\frac{ل + ل + م - م = ۱}{ل} = \frac{ل + ل + م - م = ۱}{ل}$$

حاصل ہوتی ہے۔

پس مطلوبہ طریق وہ خط مستقیم ہے جس کی مساوات

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) m^2 + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) n^2$$

۲۱۔ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ خط مستقیم ذواربعتہ الاضلاع کے وتروں کے نقاط وسطی میں سے گزرتا ہے، مگر یہ درست ہے کیونکہ کوئی وتر چار خطوط کو مس کرنے والے ایک بہت ہی پتلے ناقص کی انتہائی شکل ہے اور اس ناقص کا مرکز انتہائی وتر کا نقطہ وسطی ہے۔ پس ذواربعتہ الاضلاع کے تین وتروں کے نقاط وسطی ان مخروطیوں کے مرکوزوں کے طریق پر واقع ہوتے ہیں جو ذواربعتہ الاضلاع کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔ [دیکھو صفحات ۲۴۴، ۲۸۶]

۲۲۔ وہ تمام مخروطی جو محوروں کو ان نقطوں پر مس کرتے ہیں جہاں خط ۱ لا + ب - ۱ = ۰ محوروں کو قطع کرتا ہے مساوات
 $(1 \text{ لا} + \text{ب} - 1) = 1^2$
 سے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ مخروطی مکافی ہوگا اگر لہ ایسا ہو کہ درجہ دوم کی رتھیں ایک کامل مربع بنائیں، اس کے لیے شرط
 $1^2 \text{ ب} = (1 \text{ ب} - 1)^2$

۲۳۔

لہ = ۰ یا لہ = ۱ ب
 قیمت لہ = ۰ سے منطبق خطوط مستقیم کا ایک زوج (۱ لا + ب - ۱) = ۰ حاصل ہوتا ہے۔

پس مکافی کے لیے لہ = ۱ ب چنانچہ منحنی کی مساوات

$$(1 \text{ لا} + \text{ب} - 1) = 1^2 \text{ ب}$$

حاصل ہوتی ہے جس کو شکل

$$1 \text{ لا} + \text{ب} - 1 = 1$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

۲۲۱۔ مکانی $\overline{لا} + \overline{اب} = \overline{ا}$ کے کسی نقطہ پر ماس کی (۳۰۱)

مساوات معلوم کرنا۔

ہم منحنی کی مساوات کو منطبق بنا سکتے ہیں اور اس کے بعد دفعہ ۸، میں حاصل شدہ ضابطہ کا استعمال کر سکتے ہیں۔ لیکن نتیجہ کو سادہ تر شکل میں حسب ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے:

منحنی پر کے دو نقطوں $(\overline{لا}، \overline{ا})$ اور $(\overline{لا}، \overline{ا})$ کو ملانے والے خط مستقیم کی مساوات

$$\frac{\overline{لا} - \overline{لا}}{\overline{لا} - \overline{لا}} = \frac{\overline{ا} - \overline{ا}}{\overline{ا} - \overline{ا}} \dots \dots \dots (۱)$$

جسے مع شرائط $\overline{لا} + \overline{اب} = \overline{ا}$ اور $\overline{لا} + \overline{اب} = \overline{ا}$ کے ... (۲) ان شرطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\overline{لا} (\overline{لا} - \overline{لا}) = (\overline{لا} - \overline{لا}) \overline{اب} \dots \dots \dots (۳)$$

(۱) اور (۳) کی متناظر طرفوں کو ضرب دو تو

$$\overline{لا} \frac{(\overline{لا} - \overline{لا})}{\overline{لا} + \overline{لا}} = (\overline{لا} - \overline{لا}) \frac{\overline{اب}}{\overline{لا} + \overline{لا}} (\overline{ا} - \overline{ا})$$

اس لیے $(\overline{لا}، \overline{ا})$ پر کے ماس کی مساوات

$$\overline{لا} \frac{(\overline{لا} - \overline{لا})}{\overline{لا}} + (\overline{ا} - \overline{ا}) \frac{\overline{اب}}{\overline{لا}} = ۰$$

لیکن چونکہ $\overline{لا} + \overline{اب} = \overline{ا}$ اس لیے ماس کی مساوات

$$لا = \sqrt{\frac{1}{لا}} + \sqrt{\frac{ب}{م}} = ۱$$

ہے۔ مخروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کی مساوات معلوم کرنا ہوتا
مکانی کی مساوات کی منطق شکل استعمال کرنی چاہئے۔

مثال ۱۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ خط لا + م = ۱۔ مکانی

$$لا + لا = ب + م = ۱ \text{ کو مس کرے۔}$$

کسی نقطہ (لا، م) پر کے ماس کی مساوات

$$لا = \sqrt{\frac{1}{لا}} + \sqrt{\frac{ب}{م}} = ۱$$

ہے۔ یہ مساوات خط کی مساوات کے مائل ہوگی اگر $\sqrt{\frac{1}{لا}} = م$ اور $\sqrt{\frac{ب}{م}} = لا$ (۳۰۲)

$$\text{یا اگر } \sqrt{\frac{1}{لا}} = م \text{ اور } \sqrt{\frac{ب}{م}} = لا$$

پس مطلوبہ شرط

$$۱ = \sqrt{\frac{ب}{م}} + \sqrt{\frac{1}{لا}}$$

ہے۔

مثال ۲۔ مکانی لا + لا = ب + م کا ماسکہ معلوم کرنا۔

وہ دائرہ جو ت ق کو ت پر مس کرتا ہے اور جو ف میں سے گزرتا ہے
ماسکہ میں سے [دیکھو دفعہ ۱۶۵ (۴)] دو ماس منطق ہوتے ہیں [بھی گزرتا ہے۔

یہ دو نقطے ف اور ق (۱، ۰) اور (۰، ۱) ہیں۔ اس لیے ماسکہ ان دونوں

دائرہوں پر ہے جن کی مساواتیں

$$لا + ۲ لا ما جم سہ = ما - \frac{لا}{و}$$

$$لا + ۲ لا ما جم سہ = ما - \frac{لا}{ب}$$

اور

ہیں۔ پس ماسک مساواتوں

$$لا + ما + ۲ لا ما جم سہ = \frac{لا}{و} = \frac{لا}{ب}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{لا}{و} = \frac{لا}{ب} = \frac{لا}{و + ب + ۲ لا ما جم سہ}$$

مثال ۳۔ مکانی $\frac{لا}{و + ب + ۲ لا ما جم سہ} = \frac{لا}{و}$ کا مرتب معلوم کرنا۔

مرتب علی القوائم ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ہے۔ اب خال لا + م ما = 'ا'۔ پر عمود ہوگا اگر م۔ ل جم سہ = 'و' اور خط مکانی کو مس کرے گا

اگر $\frac{لا}{و} + \frac{لا}{ب} = ۱$ ۔ پس محور لا پر کا وہ مقطوعہ جو ماس سے جو محور لا پر عمود ہے

منقطع ہوتا ہے $\frac{لا}{و} (۱ + \frac{ب}{و}) = ۱$ سے حاصل ہوتا ہے۔

پس نقطہ $(\frac{ب}{و}, \frac{لا}{و})$ مرتب پر ہے۔

اسی طرح نقطہ $(\frac{ب}{و}, \frac{لا}{و})$ بھی مرتب پر ہے۔

اسی لیے مطلوبہ مساوات $لا (ب + و جم سہ) + ما (و + ب جم سہ) = جم سہ$ ہے۔

مثال ۴۔ مکانی $\frac{لا}{و + ب + ۲ لا ما جم سہ} = \frac{لا}{و}$ کا محور معلوم کرنا۔

چونکہ $(\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2) - \text{ا}^2 \text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2 = 0$
 $\text{ا}^2 (\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2) = \text{ا}^2 \text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2 = 0$ اور $\text{ا}^2 (\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2) = 0$ علی القوام
 ہیں [دفعہ ۴۲] اگر

$\text{ا}^2 - \text{ب}^2 + \text{ا}^2 (\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2) = 0$
 پس محور کی مساوات

$\text{ا} - \text{ب} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2 = (\text{ا} + \text{ب})(\text{ا} - \text{ب})$

۴۔

[اس پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{\text{ا}}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2} = \frac{\text{ا}}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2} + \frac{\text{ا}}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2}$$

حاصل ہوگی]۔

ہم ماسکی مخروطی

۲۲۲۔ چونکہ کسی مخروطی کے ماس کے اس کے محور پر ہوتے ہیں اس لیے
 اگر دو مخروطی ہم ماسکی ہوں تو ان کے محاور ایک ہی ہونے چاہئیں۔
 مساوات

$$1 = \frac{\text{ا}^2}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2} + \frac{\text{ا}^2}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2}$$

لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے ہم ماسکی نظام کے مختلف مخروطیوں کو تعبیر کریں گے
 کیونکہ مرکز سے ماس کا فاصلہ

$$\left\{ (\text{ا} + \text{ب}) - (\text{ا}^2 + \text{ب}^2) \right\} \text{ یا } \frac{1}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2} - \frac{1}{\text{ا} + \text{ب} - \text{ا}^2}$$

۴۔

۲۲۳ — ہم ماسکی مخروطیوں کے نظام کی مساوات

$$1 = \frac{a^2}{b^2 + d} + \frac{a^2}{d + a^2}$$

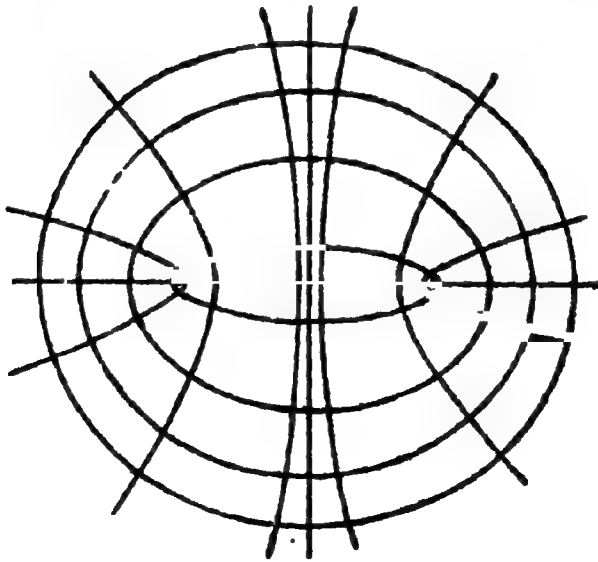
ہے۔

اگر یہ مثبت ہو تو منحنی ایک ناقص ہے۔

منحنی کے صدر محور بڑھنے کے جبکہ b بڑھے اور a کی نسبت ایک قریب اور قریب تر ہوتی جائے گی جیسے کہ زیادہ اور زیادہ تر بڑھے گا چنانچہ انتہا میں ایک ہم ماسکی ناقص الاستہابی نصف قطر کا ایک دائرہ ہوگا۔

اگر یہ منفی ہے تو صدر محور گھٹنے کے جبکہ b بڑھے اور نسبت $\frac{b^2}{d + a^2}$ بھی

گھٹنے کے جیسے کہ بڑھے گا اور اس لیے ناقص چپٹا اور زیادہ چپٹا ہوتا جائے گا حتیٰ کہ b^2 کے مساوی ہو جائے اور اس انتہائی صورت میں محور آخر (۳-۳) معدوم ہوگا اور محور اعظم ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کے مساوی ہوگا۔ پس ماسکوں کو ملائیوا لاخلی ناقص ہم ماسکی مخروطیوں کی ایک انتہائی شکل ہے۔



اگر $\beta + \lambda$ نہ منفی ہو تو منحنی ایک زائد ہے۔
 اگر $\beta + \lambda$ ایک چھوٹی منفی مقدار ہو تو زائد کا قاطع محور اسکوں کے
 درمیانی فاصلہ کے تقریباً مساوی ہے چنانچہ اس خط کا مکملہ (Complement)
 جو اسکوں کو ملاتا ہے زائد کی ایک انتہائی شکل ہے۔

زائد کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ کبیر اور کبیرہ ہوتا جائے گا جیسے
 نہ کبیر اور کبیرہ ہوگا اور انتہائی منحنی کی دونوں شاخیں محور ماپر منطبق ہونگی۔
 اگر نہ منفی ہو اور λ سے عدداً بڑا ہو تو منحنی خیالی ہوگا۔

۲۲۴۔ ہم ماسکی نظام کے دو مخروطی کسی دے ہوئے نقطہ میں سے گزرتے
 ہیں ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ ایک مخروطی ناقص ہے اور دوسرا زائد۔
 فرض کرو کہ ابتدائی مخروطی کی مساوات

$$1 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \beta^2} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \alpha^2}$$

ہے تو کسی ہم ماسکی مخروطی کی مساوات

$$1 = \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \beta^2)} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \alpha^2)}$$

ہوگی۔ یہ دے ہوئے نقطہ (λ^2, α^2) میں سے گزرے گا اگر

$$1 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \beta^2} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \alpha^2}$$

اس میں رکھو $\beta + \lambda = \lambda^2$ تو

$$\lambda^2 + \alpha^2 = (\lambda^2 + \beta^2) - (\lambda^2 + \alpha^2) = 0$$

$$\lambda^2 = (\lambda^2 + \alpha^2) - (\lambda^2 + \beta^2) = 0$$

یہ مساوات λ میں دو درجی ہے اور اس کی دونوں اصلیں حقیقی ہیں
 اور مختلف علامت ہیں۔ اس لیے دو مخروطی ہیں جن میں سے ایک کے لیے
 $\beta + \lambda$ مثبت ہے اور دوسرے کے لیے منفی ہے، اس لیے ایک مخروطی

ناقص ہے اور دوسرا زائد۔

۲۲۵۔ ہم ماسکی نظام کا ایک مخروطی اور صرف ایک مخروطی

ایک دئے ہوئے خط مستقیم کو مس کرے گا۔

فرض کرو کہ دئے ہوئے خط کی مساوات

$$ل = لا + م - ۱ = ۰$$

ہے۔ یہ خط مستقیم مخروطی

$$۱ = \frac{لا}{لا + ل} + \frac{۱}{ب + لا}$$

کو مس کرے گا اگر

$$(۱ + ل) + (ب + لا) م = ۱ \quad [دفعہ ۱۱۶]$$

جس سے ل کی ایک اور صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ پس ایک ہم ماسکی مخروطی دئے ہوئے خط کو مس کرے گا۔

۲۲۶۔ دو ہم ماسکی مخروطی اپنے تمام مشترک نقطوں پر ایک

دوسرے کو علی القواہم قطع کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطیوں کی مساواتیں

$$۱ = \frac{لا}{لا + ل} + \frac{۱}{ب + لا} \quad \text{اور} \quad ۱ = \frac{لا}{لا + ل} + \frac{۱}{ب + لا}$$

ہیں اور فرض کرو کہ (لا، ما) ایک مشترک نقطہ ہے۔ تب محدود لا، ما اور پر کی دونوں مساواتوں کو پورا کریں گے۔ اس لیے عمل تفریق سے

$$۰ = \frac{لا}{لا + ل} + \frac{۱}{ب + لا} - \left(\frac{لا}{لا + ل} + \frac{۱}{ب + لا} \right) \quad (۱) \dots\dots$$

اب (لا، ما) پر کے محاسنوں کی مساواتیں علی الترتیب

ہیں۔ پس شرط (۱) سے ظاہر ہے کہ یہ ماس ایک دوسرے کے علی القوم میں
 ۲۲۷۔ دو دئے ہوئے ہم ماسکی مخروطیوں کے کوئی دو متوازی
 ماس کھینچے گئے ہیں اور ان ماسوں پر مرکز سے عمود نکالے گئے
 ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے۔

فرض کرو کہ مخروطیوں کی مساواتیں

$$1 = \frac{a^2}{b^2 + l^2} + \frac{a'^2}{b'^2 + l'^2} \quad \text{اور} \quad 1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a'^2}{b'^2}$$

ہیں۔

فرض کرو کہ خطوط

لاجم عہ + مابجب عہ = ع اور لاجم عہ + مابجب عہ = ع
 علی الترتیب ان مخروطیوں کو مس کرتے ہیں۔ تب [دفعہ ۱۱۶ نتیجہ صریح]
 $ع^2 = لاجم^2 عہ + مابجب^2 عہ$

اور $ع^2 = (ل + لہ)^2 + (ب + بہ)^2 + مابجب^2 عہ$

$$\therefore ع^2 - ع'^2 = لہ^2$$

۲۲۸۔ اگر دو ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ایک کا ماس دوسرے
 مخروطی کے ایک ماس پر عمود ہو تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریقی
 ایک دائرہ ہو گا۔

فرض کرو کہ ہم ماسکی مخروطیوں کی مساواتیں

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ اور } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

ہیں۔

وہ خط ماجن کی مساواتیں

$$\text{لاجم ع} + \text{ماجب ع} = \boxed{\text{لاجم ع} + \text{بجب ع} + \text{ع}} \dots (1)$$

اور لاجم ع۔ ماجب ع = $\boxed{\text{لاجم ع} + \text{بجب ع} + \text{ع}}$ (۲)۔
ہیں محرومیوں کو مس کرتے ہیں اور ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔
مساواتوں (۱) اور (۲) کی طرفین کا مربع لیکر جمع کر دو تو مطلوبہ
طریق کی مساوات

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

مائل ہوگی۔

اگر ہم دوسرے ناقص کے محور اصغر کو لا انتہا چھوٹا فرض کریں تو
اس کے تمام تماس ماسک کے بہت ہی قریب سے گزریں گے، اس لیے
دفعہ ۱۲۶ (ع) اوپر کی خصوص صورت ہے۔

مثال ۱۔ کوئی دو مکانی جن کا ماسک مشترک اور محاور مخالف سمتوں میں
ہوں علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ دو مکافوں میں ماسک مشترک ہے اور ان کے محاور ایک ہی
خط مستقیم میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ت ف ایک مکانی کا تماس اور ت ق
دوسرے مکانی کا تماس ہو اور ت ف، ت ق علی القوائم ہوں تو ت کا طریق
ایک خط مستقیم ہے۔

مثال ۳۔ دو ہم ماسکی محرومیوں کا مرکز ج ہے، ان میں سے ایک کا
ماس ت ق ہے اور دوسرے کا ت ف۔ ثابت کرو کہ اگر تماس ایک دوسرے
کے علی القوائم ہوں تو ج ت، ف ق کی تخیف کرے گا۔

فرض کرو کہ ماس

$$1 = \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} \quad \text{اور} \quad 1 = \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب}$$

میں توجہ کی مساوات

$$لا = \left(\frac{لا}{ب} - \frac{لا}{ب} \right) + \left(\frac{لا}{ب} - \frac{لا}{ب} \right)$$

ہوگی۔ یہ خط، ق کے وسطی نقطہ میں سے گزرنے کا اگر (۳۰۸)

$$= (لا + لا) \left(\frac{لا}{ب} - \frac{لا}{ب} \right) + (لا + لا) \left(\frac{لا}{ب} - \frac{لا}{ب} \right)$$

$$= لا + لا \left(\frac{لا}{ب} - \frac{لا}{ب} \right) + لا + لا \left(\frac{لا}{ب} - \frac{لا}{ب} \right)$$

$$= لا + لا \left(\frac{لا}{ب} - \frac{لا}{ب} \right) + لا + لا \left(\frac{لا}{ب} - \frac{لا}{ب} \right)$$

کیونکہ مخروطی ہم ماسکی ہیں۔ یعنی اگر ماس علی القوائم ہوں۔

مثال ۴۔ دو مکانیوں میں ماسکے مشترک ہے اور ان کے محاورے ایک ہی خط مستقیم میں ہیں۔ ان میں سے ایک کا ماس ق اور دوسرے کا ق ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ق میں سے گزرنے والا وہ خط جو محور کے متوازی ہے ق کی تنصیف کرے تو ماس علی القوائم ہوں گے۔

مثال ۵۔ دو ہم ماسکی مخروطیوں پر کے وہ نقطے جن کے خارج المرکز زاوے ایک ہی ہوں نظیری نقطوں سے موسوم کئے جائیں تو ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص پر کوئی دو نقطے ق ہوں اور اس کے ایک ہم ماسکی ناقص پر نظیری نقطے ق ہوں تو ق = ق = ق۔

۲۲۹۔ ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک سلسلہ کے لحاظ سے

ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے

فرض کرو کہ ہم ماسکیوں کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا}{ا + ۲ل} + \frac{ما}{ب + ۲ل}$$

ہے اور دئے ہوئے خط مستقیم کی مساوات

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ = لا + م$$

ہے۔

نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات بلحاظ (۱)

$$(۳) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا لا}{ا + ۲ل} + \frac{ما ما}{ب + ۲ل}$$

ہے۔

اگر (۲) اور (۳) ایک ہی خط مستقیم کو تعبیر کریں تو

$$لا = \frac{لا لا}{ا + ۲ل} \quad ل = \frac{ما}{ب + ۲ل} \quad م =$$

حاصل ہونا چاہئے، اس لیے

$$\frac{لا}{ل} - \frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب} - \frac{ما}{ل}$$

(۳۰۹)

پس قطبوں کا طریق وہ خط مستقیم ہے جس کی مساوات

$$\frac{لا}{ل} - \frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب} - \frac{ما}{م}$$

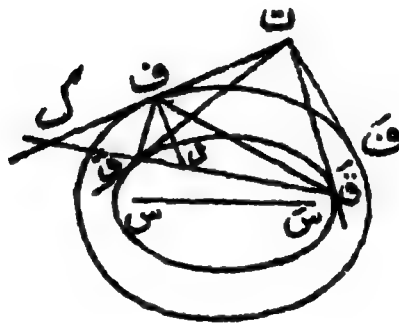
ہے۔

یہ خط مستقیم خط (۲) پر عمود ہے۔ نظام کا ایک ہم ماسکی مخروطی خط

(۲) کو مس کرے گا اور نقطہ تماس، اس ہم ماسکی کے لحاظ سے خط کا قطب ہوگا۔

اس لیے قطبوں کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو دئے ہوئے خط پر عمود ہے اور اس نقطہ میں سے گزرتا ہے جہاں وہ ایک ہم ماسکی کو مس کرتا ہے۔

۲۳۰۔ کسی نقطہ ت سے ایک مخروطی کے دو ماس ت ف ت ف ت ف کھینچے گئے ہیں اور نیز ایک ہم ماسکی مخروطی کے دو ماس ت ق ت ق کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم ق ف اور ق ف ف پر کے ماس سے مساوی زاوے بنائیں گے۔
 فرض کرو کہ ت ف اور ف پکا عا د ق ق کو علی الترتیب ک ل پر قطع کرتے ہیں۔
 تب ت ف کا قطب اُس مخروطی کے لحاظ سے جس پر ق اور ق ق واقع ہیں خط ف ل پر ہے (دفعہ ۲۲۹)۔ نیز چونکہ ت اسی مخروطی کے لحاظ سے ق ق کا قطب ہے اس لیے ت ف کا قطب ق ق پر ہے [دفعہ ۱۸۱]۔ اس لیے ت ف کی کا قطب ل پر ہے جو ق ق اور ف ل کا نقطہ تقاطع ہے۔



اس لیے [صفحہ ۱۸۲] سہیت 'گ' 'ق' 'ل' 'ق' اور پیل فک'
 ف' 'ق' 'ل' 'ق' 'ق' موسیقی ہیں۔
 پس چونکہ زاویہ ک ف ل ایک قائمہ زاویہ ہے اس لیے

ف ق اور ف ق ف ل یا ف ک کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں [صفحہ ۵۶]۔

نتیجہ صریح ۱۔ فرض کرو کہ وہ مخروطی جس پر ق ق واقع ہیں اُس خطی ناقص میں تحویل ہوتا ہے جو ماسکوں کو ملاتا ہے، تب سلیہ بالا ہو جاتا ہے؛ وہ خطوط جو ایک مخروطی کے ماسکوں کو منحنی کے کسی نقطہ

ف سے ملاتے ہیں ف پر کے ماس کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔
نتیجہ صریح ۲۔ فرض کرو کہ وہ مخروطی جس پر ف ق واقع ہیں خطی ناقص میں تحویل ہوتا ہے، تب ایک مخروطی کے دو ماس ایک ماسک پر مساوی زاوے بناتے ہیں۔

نتیجہ صریح ۳۔ فرض کرو کہ وہ مخروطی جس پر ف ق واقع ہیں ف میں سے گذرتا ہے، تب وہ دو ماس جو کسی نقطہ ت سے ایک مخروطی کے کھینچے جائیں ت پر کے اُس ماس کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں جو ہم ماسکی مخروطیوں میں سے جو ت میں سے گذریں کسی ایک کا کھینچا گیا ہو۔

نتیجہ صریح ۴۔ خطوط مستقیم ف ق، ف ق، ف ق، ف ق ایک ہی ہم ماسکی کو مس کرتے ہیں۔

۲۳۱۔ اگر ایک دے ہوئے مخروطی کا کوئی وتر ق ق ہو جو ایک ثابت ہم ماسکی مخروطی کو مس کرتا ہے تو ق ق ایسے بدلیگا جیسے متوازی قطر کا مربع۔ نیز اگر ج ع کو مرکز میں سے ق پر کے ماس کے

متوازی کھینچا جائے اور وہ ق ق سے ع پر ملے توق ع مستقل
 طول کا ہوگا۔ فرض کرو کہ ناقص

$$= 1 - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

پر نقطے ق اور ق' ط اور ط' ہیں اور فرض کرو کہ ق ق مخروطی

$$1 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

کو مس کرتا ہے۔ تب

$$ق ق' = (جم ط - جم ط') + (جب ط - جب ط')$$

$$= ۴ جب ط' \frac{1}{4} (ط - ط') \{ ۱ جب ط' \frac{1}{4} (ط + ط') \}$$

$$+ ب' جم ط' \frac{1}{4} (ط + ط')$$

$$ج د' = ۱ جب ط' \frac{1}{4} (ط + ط') + ب' جم ط' \frac{1}{4} (ط + ط')$$

لیکن چونکہ ق ق' دوسرے مخروطی کو مس کرتا ہے ایسے

$$\frac{۱}{۲} (ط + ط') جم ط' \frac{1}{4} (ط + ط') + \frac{۱}{۲} (ط + ط') جب ط' \frac{1}{4} (ط + ط')$$

$$= جم ط' \frac{1}{4} (ط + ط')$$

$$۱ ۱ ب' جب ط' \frac{1}{4} (ط - ط') = ل' \{ ۱ جب ط' \frac{1}{4} (ط + ط') \}$$

$$+ ب' جم ط' \frac{1}{4} (ط + ط') \dots \dots (۱)$$

پس $وُ ب ا ق ق^2 = ۲ ر ج د^2 \dots (۲)$
 پھر چونکہ ع ، خط ط

$$\frac{۱}{۲} ج ط + (ط + ط) + \frac{۱}{۲} ب جب ط - ج ط - (ط - ط) =$$

$$\frac{۱}{۲} ج ط + \frac{۱}{۲} ب جب ط =$$

اور
 کا نقطہ تقاطع ہے اس لیے

$$\frac{ج ط - (ط - ط)}{ب جب ط - ج ط - (ط - ط)} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

پس $ق ع^2 ب ا^2 (ط - ط)$

$$= \{ ج ط ج ط - ج ط جب ط - ج ط جب ط - (ط - ط) \}$$

$$+ ب ا^2 \{ ج ط ج ط - ج ط جب ط - ج ط جب ط - (ط - ط) \}$$

$$= وُ ب ا^2 (ط + ط) + ب ا^2 ج ط (ط + ط)$$

$$ق ع^2 = \frac{وُ ب ا^2}{ر} ، (۱)$$

مثال۔ دو ثابت ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ایک کا
 ماس تا ف اور دوسرے کا ت ق ہے۔ ثابت کرو کہ اگر
 ماس ایک دوسرے کے علی التواء ہوں تو خط ف ق ہمیشہ
 ایک تیسرے ہم ماسکی مخروطی کو مس کرے گا۔

اگر مشترک مرکز ج ہو تو ماسوں کے علی القوائم ہونے کی وجہ سے ج ت، ف ق کی تنصیف کرے گا [مثال ۳ دفعہ ۲۲۸]۔ اس لیے ج ت اور ق ف، ق پر کے ماس کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ پس اگر ج ع ق پر کے ماس کے متوازی ہو اور ق ف سے ع پر ملے تو ق ع = ج ت۔ لیکن ج ت مستقل ہے [دفعہ ۲۲۸]۔ اس لیے ق ع مستقل ہے اور اس لیے ق ع ف ایک ثابت ہم ماسکی کو مس کرتا ہے۔

ثبوت دیگر۔ $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} = ۱$ ۔ کے دو ماس جن کا وتر ماس ظل لا + م ما = ۱۔ پر ہے حسب دفعہ ۱۸۹

$(\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} - ۱)(۱ - (وا + با)) = (۱ - (لا + م ما)) = ۰$ ۔
ہیں۔ یہ ماس

$\frac{لا}{وا} (با + م - ۱) - ۲ ل م لا + \frac{ما}{با} (وا - ۱) = ۰$ ۔ (۱)
کے متوازی ہیں۔

$\frac{لا}{وا + ل} + \frac{ما}{با + ل} = ۱$ ۔ کے دو ماس جن کا وتر ماس بھی یہی ہے

$\frac{لا}{وا + ل} \{ (با + ل) - م - ۱ \} - ۲ ل م لا + \frac{ما}{با + ل} \{ (وا + ل) - ل - ۱ \} = ۰$ ۔
کے متوازی ہیں۔ وہ خطوط جو ان ماسوں پر عمود ہیں اور نقطہ (۰، ۰) میں سے گزرتے ہیں (۱۲)

$\frac{ما}{وا + ل} \{ (با + ل) - م - ۱ \} + ۲ ل م لا + \frac{لا}{با + ل} \{ (وا + ل) - ل - ۱ \} = ۰$ ۔

(۲)

ہیں۔

پس وہ دائرے جو کسی منحنی کے لٹھی دائرے ہوتے ہیں اس کے ساتھ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہیں۔

وہ دائرہ جو ایک دے ہوئے منحنی کے ساتھ دے ہوئے نقطہ پر دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے اس نقطہ پر کا دائرہ انحناء کہلاتا ہے اور اس دائرہ کا نصف قطر نصف قطر انحناء کہلاتا ہے۔

دو مخروطی چار نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں۔ اس لیے دو مخروطی ایک دوسرے کے ساتھ تیسرے رتبہ سے بڑے رتبہ کا تماس نہیں رکھ سکتے۔ اگر وہ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتے ہوں تو ان میں ایک اور نقطہ مشترک ہونا چاہئے۔

۲۳۳۔ ایک مخروطی کسی دے ہوئے مخروطی کے ساتھ ایک دے ہوئے نقطہ پر دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے۔ مخروطی کی عام مساوات معلوم کرو۔ (۳۱۳)

فرض کرو کہ دے ہوئے مخروطی کی مساوات $z = 0$ ہے اور فرض کرو کہ $z = 0$ کے دے ہوئے نقطہ (لا، ما) پر کے تماس کی مساوات $t = 0$ ہے۔
(لا، ما) میں سے گزرنے والے کسی خطِ مستقیم کی مساوات
ما - ۱ - م (لا - لا) = ۰
ہے۔ پس مساوات

س - ل ت (ما - ما) - م (لا - لا) = ۰ (۱)

ایک ایسے مخروطی کی مساوات ہے جو ان نقطوں میں سے گزرتا ہے جہاں خطوطِ مستقیم $t = 0$ اور ما - م (لا - لا) = ۰ مخروطی $z = 0$ کو قطع کرتے ہیں۔

پس (۱) میں = کو تین منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔
چونکہ دو مستقل لہ اور م اختیاری ہیں اس لئے مخروطی (۱) سے
دوسری شرطیں پوری ہو سکتی ہیں۔ چنانچہ ان کا انتخاب اس طرح عمل میں
آ سکتا ہے کہ مساوات (۱) ایک دائرہ کو تعبیر کرے۔
اگر خط م-ا-م (لا-لا) = ماس پر منطبق ہو تو چاروں نقاط
تقاطع منطبق ہوتے ہیں۔ اس لئے مخروطی میں - لہ تبا = ماس =۔
کے ساتھ تیسرے رتبہ کا ماس رکھتا ہے یعنی وہ ایک نئی مخروطی ہے۔
مثال ۱۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی ۱ لا^۲
۲ + ب لا + ج ما + د لا = کو مبدا و پہ لثم کرے۔

مساوات

لا^۲ + ۲ ب لا + ج ما + د لا = لہ لا (ما-م لا) =۔
میں جسے مخروطی شامل ہیں سب کے سب دوسرے رتبہ کا ماس رکھتے ہیں:
دائرہ کے لئے شرطیں ۲ ب-لہ = اور کو د لہ م = ج ہیں۔
اس لیے مطلوبہ دائرہ ج لا + ج ما + د لا = ہے۔
مثال ۲۔ اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی ۱ لا^۲
۲ + ب لا + ج ما + د لا = کے ساتھ تیسرے رتبہ کا ماس رکھے۔
مخروطی لا^۲ + ۲ ب لا + ج ما + د لا = لہ لا = دے، ہوئے
مخروطی کو چار منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

یہ نئی مکانی ہے اگر (لہ-لہ) ج = ب-۲۔ اسلئے مطلوبہ مکانی کی مساوات (۳۱۴)
حسب ذیل ہے:

$$ب لا^2 + ۲ ب لا + ج ما + د لا = لہ لا =$$

$$۲۳۴ - \frac{لا^2}{۱} + \frac{ما^2}{۱} = ۱ - پر کے نقطہ عہ پر دائرہ انحناء
کی مساوات معلوم کرنا۔$$

اس دائرہ کا مرکز جو نقطوں (عہ-بہ-جہ) میں سے گزرتا ہے

$$\frac{1}{2} \text{ گ } 1 = \frac{1}{2} \text{ ب } 1 = \text{جم } 1 + \text{جم } 2 + \text{جم } 3 + \text{جم } 4 + \text{جم } 5$$

$$\frac{1}{2} \text{ ب } 1 = \frac{1}{2} \text{ ب } 2 + \text{جب } 1 + \text{جب } 2 + \text{جب } 3 + \text{جب } 4 + \text{جب } 5 \quad (\text{رقعہ } ۱۳۶)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

پس اگر $\text{ع} = \text{ب} = \text{ج} = \text{د}$ تو

$$\frac{1}{2} \text{ گ } 1 = \frac{1}{2} \text{ ب } 1 = \text{جم } 1 + \text{جم } 2 + \text{جم } 3 = \text{جم } 4$$

$$\text{اور } \frac{1}{2} \text{ ب } 2 = \text{جم } 2 + \text{جب } 1 = \text{جب } 2 = \text{جب } 3 = \text{جب } 4$$

پس نقطہ مرکز کے دائرہ انحناء کا مرکز

$$\text{و لا} = (\text{ب}^1 - \text{ب}^2) \text{جم}^2 \text{ع} = \text{ب}^1 \text{ب}^2 = (\text{ب}^1 - \text{ب}^2) \text{جب}^2 \text{ع}$$

سے حاصل ہوگا۔

اس دائرہ کے نصف قطر کا مربع

$$\left(\frac{\text{ب}^1 - \text{ب}^2}{2} \text{جم}^2 \text{ع} - \text{جم}^2 \text{ع} \right) + \left(\frac{\text{ب}^1 - \text{ب}^2}{2} \text{جب}^2 \text{ع} + \text{جب}^2 \text{ع} \right)$$

$$= \frac{\text{جم}^2 \text{ع}}{2} (\text{و جب}^2 \text{ع} + \text{ب}^2 \text{جم}^2 \text{ع}) + \frac{\text{جب}^2 \text{ع}}{2} (\text{و جب}^2 \text{ع} + \text{ب}^2 \text{جم}^2 \text{ع})$$

$$= \frac{(\text{و جب}^2 \text{ع} + \text{ب}^2 \text{جم}^2 \text{ع})}{2} \text{و ب}^1$$

ہے۔ اس لیے مطلوبہ مساوات ہے

$$(\text{لا} - \frac{\text{ب}^1 - \text{ب}^2}{2} \text{جم}^2 \text{ع}) + (\text{لا} - \frac{\text{ب}^1 - \text{ب}^2}{2} \text{جب}^2 \text{ع})$$

$$= (\text{و جب}^2 \text{ع} + \text{ب}^2 \text{جم}^2 \text{ع}) \text{و ب}^1$$

مرکز انحناء کا طریقہ صریحاً (۱۱۱) + (ب ۱۱) = (ا ۱۱) ہے۔

۲۳۵۔ اگر ایک ناقص پر چار نقطوں کے خارج المرکز زاویہ \angle بنائے جائے (۱۱۱) ہوں تو ان چار نقطوں میں سے ایک دائرہ گزرے گا اگر

ع + ج + د + ح = π (دفعہ ۱۳۶) پس نقطہ ع پر کا دائرہ انحناء، ناقص کو مکرر نقطہ π پر قطع کرے گا چنانچہ

$$\pi = \text{ضہ} + \text{ع} = \pi \quad (۱)$$

(۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی مخصوص نقطہ ضہ میں سے انحناء گزرتے ہیں، دائرے گزریں گے یعنی نقطوں $\frac{1}{2}(\pi - \text{ضہ})$ ، $\frac{1}{2}(\pi - \text{ضہ})$ ، $\frac{1}{2}(\pi - \text{ضہ})$ اور $\frac{1}{2}(\pi - \text{ضہ})$ پر کے انحناء کے دائرے یہ تین نقطے اس اعظم مثلث کے راس ہیں جو ناقص میں کھینچا جاسکتا ہے [دفعہ ۱۳۹ مثال ۱]۔ نیز چونکہ $\text{ضہ} + \frac{1}{2}(\pi - \text{ضہ}) = \pi$ (۱۱۲) ضہ

$$+ \frac{1}{2}(\pi - \text{ضہ}) + \frac{1}{2}(\pi - \text{ضہ}) = \pi \quad (۱۱۲)$$

وہ تین نقطے جن پر کے انحناء کے دائرے ضہ میں سے گزرتے ہیں ایک دائرہ پر واقع ہیں۔

مثال ۱۔ اگر دو مخروطیوں میں سے ہر ایک، ایک تیسرے مخروطی کے ساتھ دو ہر اتاس رکھے تو اس مخروطی کے ساتھ ان کے وترتاس اور ان کے مشترک نقطوں میں سے گزرنے والے خطوں میں سے دو خط، ایک نقطہ پر ملیں گے اور ایک موسیقی پنسل بنائیں گے۔

فرض کرو کہ تیسرے مخروطی کی مساوات $\text{س} = ۰$ ہے اور فرض کرو کہ دو وترتاس کی مساواتیں $\text{ع} = ۰$ ، $\text{ج} = ۰$ ہیں تب۔ [دفعہ ۱۱۸] مخروطیوں کی مساواتیں

$$\text{س} = ۰ \quad \text{لہ} \quad \text{ع} = ۰ \quad (۱)$$

$$\text{س} = ۰ \quad \text{لہ} \quad \text{ج} = ۰ \quad (۲)$$

ہیں۔ اب خطوط مستقیم

لہ ۲۔ مہ ۲ بہ ۲ = ۰ (۳)
(۱) اور (۲) کے مشترک نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔ نیز خطوط (س) مہ = ۰ اور بہ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے بھی گذرتے ہیں اور [دفعہ ۵۶] چار خطوط مہ = ۰، بہ = ۰، لہ ۲۔ مہ ۲ بہ ۲ = ۰ اور لہ ۲۔ مہ ۲ بہ ۲ = ۰ ایک موسیقی پنل بناتے ہیں۔

مثال ۲۔ دے ہوئے نصف قطر کا ایک دائرہ ایک ناقص کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ مشترک دتروں کے متوازی ناقص کے جو قطر ہیں ان کا مسلسل حاصل ضرب مستقل ہے۔

فرض کرو کہ ناقص کی مساوات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ہے اور دائرہ کی مساوات $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$ ہے۔ تب مشترک دتروں کے کسی زوج کی مساوات

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2 \quad \text{اور} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (۱)$$

ہے جہاں لہ مساوات

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (۲)$$

سے حاصل ہوتا ہے ناقص کے ان قطروں کی مساوات جو خطوط (۱) کے متوازی ہیں

$$x^2 + y^2 - 2cx - 2dy + c^2 + d^2 - r^2 = 0 \quad (۳)$$

ہے۔ (۳) سے حاصل شدہ دو نیم قطر مریچا محور کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں اور ان میں سے ایک کے طول کا مربع لہ کے مساوی ہے۔

پس چھ نیم قطروں کا مسلسل حاصل ضرب لہ کی ان تین قیمتوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے جو (۳) سے حاصل ہوتی ہیں اور یہ صحیحاً $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ہے۔

مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی کا مرکز چار دس ہوئے نقطوں میں سے کوئی ایک ہو اور وہ مثلث جو دوسرے تین نقطوں کو ملانے سے بنے خود قطبی مثلث ہو تو ثابت کرو کہ مخروطی کے متقارر ان دو مکایفوں کے محوروں کے متوازی ہوں گے جو ان چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو کہ چار نقطے خطوط مستقیم

$$لا + م = ۰، \text{ اور } (ل + لا + م - ا) = (ل - لا + م - ا) = ۰$$

کے نقاط تقاطع ہیں۔ وہ خط جو مخروطی کے مرکز کو خود قطبی مثلث کے کسی ایک راس سے ملاتا ہے اس خط کا مزدوج ہے جو دوسرے دو راسوں کو ملاتا ہے۔ اس لیے چاروں مخروطیوں کے لیے خطوں کے دو تین زوج جو چار دس ہوئے نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتے ہیں مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔ فرض کرو کہ ایک مخروطی کی مساوات

$$لا + لا + م + م + ا + ک + ز + ف + ج = ۰ \dots (۱)$$

ہے۔

$$\text{خطوط } (ل + لا + م - ا) = (ل - لا + م - ا) = ۰$$

مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔ اس لیے خطوط

$$ل - لا + م + م + (ل + لا + م - ا) = ۰$$

بھی مزدوج قطروں کے متوازی ہیں پس [دفعہ ۱۸۴]

۱ م م + ب ل ل = ۰ (ل م + ل م)
 خطوط ۱ = ۰، ' مزدوج قطروں کے متوازی ہیں، اس لیے ۰ = ۰۔ او
 حاصل ہوتا ہے

۱ م م + ب ل ل = ۰
 (۱) کے متقارب خطوط ۱ لا + ب ما = ۰ کے متوازی ہیں یا (۲)
 کی رُو سے خطوط

(۳۱۷)

ل ل - م م = ما = ۰
 کے متوازی ہیں اور اس سے مسئلہ ثابت ہے [دفعہ ۲۰۹]
 مثال ۴۔ کسی ایسے مثلث کا حاطہ دائرہ جو ایک مخروطی
 کے لحاظ سے خود قطبی ہو مخروطی کے مرتب دائرہ کو علی القوائم
 قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات ۱ لا + ب ما = ۱ ہے اور فرض کرو کہ مثلث
 کے راس (لا، ما)، (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں۔
 چونکہ ان میں سے ہر نقطہ دوسرے کے قطبی پر ہے اس لیے

۱ لا لا + ب ما ما = ۱ (۱)

۱ لا لا + ب ما ما = ۱ (۲)

۱ لا لا + ب ما ما = ۱ (۳)

مثلث کے حاطہ دائرہ کی مساوات

(۳) =

۱	ما	لا	لا + ما
۱	لا	ما	لا + ما
۱	لا	ما	لا + ما
۱	لا	ما	لا + ما

ہے۔

اب اگر ایک دائرہ کی مساوات

$$(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0$$

ہو تو اس معادس کا مربع جو مبدا سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو نسبت $g^2 + f^2$ کے مساوی

ہے۔

اس لیے دائرہ (۳) کے معادس کا مربع اس نسبت کے مساوی ہے جو

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & 2gx & 2fy & c \\ 2gx & x^2 + y^2 & 2fy & c \\ 2fy & 2gx & x^2 + y^2 & c \\ c & c & c & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 0$$

پہلا متعلق

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 - c) + 2g(x - gx) + 2f(y - fy) \\ & + 2g(x - gx) + 2f(y - fy) + 2g(x - gx) + 2f(y - fy) \dots (۴) \end{aligned}$$

کے مساوی ہے۔

اب مساواتوں (۱) (۲) (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{x^2 + y^2 - c} = \frac{2g}{x^2 + y^2 - c} = \frac{2f}{x^2 + y^2 - c}$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2 - c} = \frac{2g}{x^2 + y^2 - c} = \frac{2f}{x^2 + y^2 - c}$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2 - c} = \frac{2g}{x^2 + y^2 - c} = \frac{2f}{x^2 + y^2 - c} \quad \text{اور}$$

ان مساواتوں کے ذریعہ (عد) ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{a}(\bar{a}-\bar{a}) + \frac{1}{b}(\bar{b}-\bar{b}) + \frac{1}{c}(\bar{c}-\bar{c}) + \frac{1}{d}(\bar{d}-\bar{d}) + \frac{1}{e}(\bar{e}-\bar{e}) + \frac{1}{f}(\bar{f}-\bar{f})$$

(۳۱۸)

$$- \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{f} \right)$$

پس مخروطی کے مرکز سے مائٹڈ دائرہ کا ماس $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ کے مساوی ہے یعنی مرتب دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

نویں باب پر مثالیں

۱۔ دے ہوئے طول کے دو خطوط مستقیم کو دو دے ہوئے خطوط مستقیم اس طرح متحرک کیا گیا ہے کہ ان کے چار سروں میں سے ایک دائرہ گزرتا ہے ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

۲۔ ایک مخروطی کے دو تروف ف، وق ق ہیں اور و میں سے گزرنے والا کوئی خط مخروطی کو س، س پر اور خطوط ف، ق، ق کو س، س پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{os} + \frac{1}{os} = \frac{1}{os} + \frac{1}{os}$$

۳۔ مخروطیوں کا ایک نظام ان ہی چار نقطوں میں سے گزرتا ہے اور ان میں سے ایک مخروطی کے ایک دے ہوئے نقطہ و س کا ماس

مخروطیوں میں سے کسی دوسرے مخروطی کو 'ف' پر قطع کرتا ہے ثابت کر کہ $\frac{1}{\text{وقت}} + \frac{1}{\text{وقت}}$ مستقل ہے۔

۴۔ ایک دائرہ اور ایک قائم زاہہ چار نقطوں پر تقاطع ہوتے ہیں اور ان کے مشترک وتروں میں سے ایک 'زائد' کا قطر ہے۔ ثابت کر کہ دو سر او تر دائرہ کا قطر ہے۔

۵۔ ان تمام مخروطیوں میں سے جو چار دے ہوئے نقطوں میں گزرتے ہیں کم سے کم خروج المرکز والے مخروطی کے مساوی مزدوج قطر ان دو مکافیوں کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں جو ان نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

۶۔ ان تمام مخروطیوں میں سے جو دو دے ہوئے خطوط مستقیم کو دے ہوئے نقطوں پر مس کرتے ہیں کم سے کم خروج المرکز کا مخروطی وہ ہوگا جس میں مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک دے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں سے گزرے گا۔

۷۔ ایک مخروطی کے دو ثابت ماس 'و' و 'ب' ہیں۔ ثابت کر کہ ان ماسوں کے درمیان مخروطی کے ایک متغیر ماس کے مقطوعہ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے جو ایک خط مستقیم میں تحویل ہوتا ہے اگر ابتدائی مخروطی مکانی ہو۔

۸۔ ایک مخروطی کے دو ماس 'و' و 'ب' کیے گئے ہیں یہ ماس ایک متغیر ماس سے نقطوں 'ف' اور 'ق' پر منقطع ہوتے ہیں۔ ثابت کر کہ مثلث 'و ف ق' کے مائٹ دائرہ کا مرکز ایک ناگزیر قسم کرتا ہے۔

۹۔ ایک مخروطی کی بنا گیا ہے جو محدودوں کے محوروں 'و' و 'ما کو' پر مس کرتا ہے اور نقطہ 'د' میں سے گزرتا ہے جہاں 'و' و 'د' ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ثابت کر کہ اگر مثلث 'و' و 'ب' کا

رقبہ مستقل ہو تو محرومی کے مرکز کا طریق ایک زائد ہے۔

۱۰۔ ایک ثابت نقطہ سے محرومیوں کے ایک نظام کے ماس کھینچے گئے ہیں جو دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کو دے ہوئے نقطوں پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطہ تماس کا طریق ایک محرومی ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ ایک ہی ذراعۃ الاضلاع میں مرتبہ محرومیوں کے ایک سلسلہ کے لحاظ سے ایک دے ہوئے خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۱۲۔ ایک ناقص کھینچا گیا ہے جو ایک زائد کے متقابلوں کو مس کرتا ہے اور زائد سے چار نقطوں پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مشترک وتروں میں دو اس خط کے متوازی ہیں جو متقابلوں اور ناقص کے نقاط تماس کو ملاتا ہے اور یہ وتر اس خط سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔

۱۳۔ محرومیوں کے ایک نظام میں مرکز کا محل، محاور کی سمت اور محاور کا مجموعہ دے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک دے ہوئے خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک مکانی ہے جو محوروں کو مس کرتا ہے۔

۱۴۔ ایک مکانی کھینچا گیا ہے جو تین دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ نقاط تماس کو ملانے والے وتروں میں سے ہر ایک ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

۱۵۔ اگر ایک مکانی دو دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے اور نقاط تماس کو ملانے والا خط ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۱۶۔ اگر مکانی $\sqrt{a} + \sqrt{b} = m$ کا محور ایک ثابت نقطہ میں

(۳۲۰)

سے گزرے تو ماسکہ کا طریق ایک قائم زائد ہوگا۔

۱۷۔ ایک ثابت نقطہ سے قاطعوں کا ایک زوج کھینچا گیا ہے جو ایک دے ہوئے محرومی سے چار نقطوں پر ملتے ہیں جو ایک دائرہ پر واقع

ہیں۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق وہ عمود ہے جو د سے و کے قطبی پر کھینچا گیا ہے۔

۱۸۔ ت ف اور ت ق، ایک محزوطی کے تماس ہیں اور منحنی پر کوئی دوسرا نقطہ سرا ہے۔ ت میں سے گزرتا ہوا کوئی خط کھینچا گیا ہے جو سرا ق اور سرا ف سے علی الترتیب گ اور ل پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق ل اور ف ق، منحنی پر تقاطع ہوتے ہیں۔

۱۹۔ ایک ثابت خط مستقیم کے کسی نقطہ ف کو ایک محزوطی کے دو ثابت نقطوں ق، سرا سے ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ب ق اور سرا کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک محزوطی ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ا$ کے اس نقطہ میں سے گذرنے والا ہم ماسکی زائد جس کا خارج المرکز زاویہ عہ ہے حسب ذیل ہے:-

$$\frac{لا}{جم} - \frac{ما}{جب} = ا - ب$$

۲۱۔ ایک دئے ہوئے نقطہ سے ہم ماسکی محزوطیوں کے ایک سلسلہ کے تماس کھینچے گئے ہیں جہاں دیا ہوا نقطہ محور اعلم میں ہے۔ نقاط تماس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۲۔ اگر ل، م، ا، ان ہم ماسکیوں کے مبدل ہوں جو ایک دئے ہوئے ناقص کے دو نقطوں ف، ق میں سے گذرتے ہیں تو ثابت کرو کہ (۱) اگر ف، ق مزدوج قطروں کے سرے ہوں تو ل، م مستقل ہوگا اور (۲) اگر ف اور ق پر کے تماس علی القوائم ہوں تو $\frac{ا}{ب} + \frac{ا}{م} = مستقل$ ہوگا۔

۲۳۔ ثابت کرو کہ ہم ماسکی ناقصوں کے ایک سلسلہ کے مساوی مزدوج قطروں کے سرے ایک ہم ماسکی قائم زائد پر واقع ہوتے ہیں۔

۲۴۔ کسی نقطہ سے ایک ناقص کے دو تماس کھینچے گئے ہیں۔

ان کا درمیانی زاویہ ان ہم ماسکیوں کے مبدلوں کی رقوم میں معلوم کر دو جو اس نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور ثابت کرو کہ ان دو ماسوں کی مساوات، ہم ماسکیوں کے عمودوں کو محاور قرار دینے سے

$$= \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1}$$

ماصل ہوتی ہے۔

۲۵۔ خطوط مستقیم و ف و ف و ق و ق، ایک ناقص کو علی الترتیب ف و ف اور ق و ق پر قطع کرتے ہیں اور نیز ایک ہم ماسکی ناقص کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$وف \times وف \times قق = وق \times وق \times فف$$

۲۶۔ ایک دے ہوئے نقطہ سے ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک نظام کے ماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط تماس کا طریق ایک کبھی خمی ہے جو دے ہوئے نقطہ میں سے اور نیز ماسکوں میں سے گزرتا ہے۔

۲۷۔ ثابت کرو کہ اگر ہم ماسکیوں کے ایک نظام کے متوازی ماس کھینچے جائیں تو نقاط تماس کا طریق ایک قائم زاہد ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس ماس کی تمام ممکن سمتوں کے لیے ان زائدوں کے راسوں کا طریق وہ خمی ہے جس کی مساوات

$$r = (r_1 - r_2) \cos \theta$$

ہے۔

۲۸۔ اگر ایک ناقص میں ایک مثلث کھینچا جائے اور وہ ایک ہم ماسکی ناقص کو لف کرے تو نقاط تماس مثلث کے باہری دھروں پر واقع ہوں گے۔

۲۹۔ اگر ایک ناقص، دو ہم ماسکیوں میں سے ہر ایک کے ساتھ دو ہر تماس رکھے تو نقاط تماس پر کے ماس ایک مستطیل بنائیں گے۔

۳۰۔ اگر ایک ثابت نقطہ سے ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ایک ماس کھینچے جائیں اور نقاط تماس پر کے عماد نقطہ ق پر ملیں تو ثابت کرو کہ ق

کامیابی ایک خط مستقیم ہے۔
 ۳۱۔ ایک ناقص کے گرد ایک مثلث کھینچا گیا ہے جس کے دورے
 ایک ہم ماسکی ناقص پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا اس دوسرے ہم ماسکی
 ناقص پر واقع ہے۔

۳۲۔ ایک ناقص اور ایک زائد ہم ماسکی ہیں اور زائد کے متقارب
 ناقص کے مساوی مزدوج قطروں پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ زائد ان تمام
 محفوظیوں کو علی القواکم قطع کرے گا جو ناقص کے محوروں کے بیروں میں سے
 گزرتے ہیں۔

۳۳۔ ایک نقطہ ف سے ایک ناقص کے چار عماد کھینچے گئے ہیں
 ثابت کرو کہ ان کا حاصل ضرب

$$لہ، لہ، (لہ - لہ)$$

۳۴۔ ہے جہاں لہ، لہ، ان ہم ماسکیوں کے تبدیل ہیں جو دے ہوئے ناقص کے
 ہم ماسکیوں اور ف میں سے گزرتے ہیں اور دے ہوئے ناقص کے نیم محاورے
 و ب ہیں۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے عمودوں کے پائین کسی مساوی المحاور
 زائد کے لحاظ سے جو مثلث کو مانٹ کرتا ہے ایک مزدوج تلامبہ ہوتے ہیں۔

۳۶۔ ایک نقطہ ت سے ایک محفوظی کے محاسن ت ف
 ت ق ہیں اور زاویہ ف ت ق کا نصف ف ق سے و پر ملتا ہے۔
 ثابت کرو کہ اگر و میں سے گزرنے والا کوئی اور وتر و س ہو تو زاویہ
 س ت س و ت سے تنصیف ہوگا۔

۳۷۔ اگر دو مکانی کھینچے جائیں جن میں سے ہر ایک ایک دائرہ کے
 تین نقطوں میں سے گزرتا ہے اور ان میں سے ایک دائرہ سے کمزور پر ملتا ہے
 اور دوسرا ع پر تو ثابت کرو کہ ان کے محوروں کا درمیانی زاویہ اس زاویہ کا ایک
 چوتھائی ہے جو د ع کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔

۳۷۔ اگر (ب ج) وہ اعظم ثلث ہو جو ایک ناقص میں کھینچا گیا ہے اور (ب ج) کا حاطہ دائرہ ناقص کو مرکز دہ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ان دو مکافیوں کے محوروں کے نقطہ تقاطع کا طریق جو (ب ج) د میں سے گزرتے ہیں ایک محرومی ہے جو ابتدائی محرومی کے مشابہ ہے۔

۳۸۔ اگر نصف قطر (ب ج) کے دائرہ پر کوئی نقطہ محسودوں (ب ج) طہ (ب ج) طہ سے حاصل ہو تو ثابت کرو کہ چار نقطوں (ب ج) طہ (ب ج) طہ (ب ج) طہ (ب ج) طہ گزرنے والے دو مکافیوں کے محوروں کی مساواتیں

$$\begin{aligned} & \text{لاجم مس} + \text{ماجب مس} = \frac{1}{\rho} \{ \text{جم (مس عه)} + \text{جم (مس ب)} \} \\ & + \text{جم (مس ج)} + \text{جم (مس ضه)} \} \\ & \text{اور لاجب مس} - \text{ماجب مس} = \frac{1}{\rho} \{ \text{جب (مس عه)} + \text{جب (مس ب)} \} \\ & + \text{جب (مس ج)} + \text{جب (مس ضه)} \} \end{aligned}$$

ہیں جہاں

$$\rho = \text{مس} = \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}$$

۳۹۔ ایک محرومی کے اندرونی ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع (ب ج) د ہیں۔ محرومی کے کسی نقطہ سے ان اضلاع پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ (ب ج) د پر کے عمودوں کے حاصل ضرب اور جہ (ب ج) د پر کے عمودوں کے حاصل ضرب میں نسبت مستقل ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر محرومی کے اندرونی کثیر الاضلاع کے اضلاع (ب ج) د (ب ج) د (ب ج) د ہوں اور اضلاع کی تعداد جفت ہو تو محرومی کے کسی نقطہ سے اضلاع (ب ج) د پر کے عمودوں کا مسلسل حاصل ضرب اضلاع (ب ج) د (ب ج) د (ب ج) د پر کے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ مستقل نسبت میں ہوگا

$$۴۰۔ ناقص = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \text{ کے کسی نقطہ پر کمر کرنا خنار دہ ہے۔}$$

و سے ناقص کے دوسرے دو عمادوں کے پائین ق، س ہیں۔ اگر ق
اور س پر کے تماس ت پر میں تو ثابت کرو کہ ت کے طریق کی مساوی
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

۴۱۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ ایک مکافی کو چار حقیقی نقطوں پر
قطع نہیں کر سکتا اگر اس کے مرکز کا فصلہ نیم وتر خاص سے کم ہو۔
ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک مکافی کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔
مکافی کے اس میں سے خطوط ان چھ خطوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں
جو نقاط تقاطع کے زوجوں کو ملاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان نقطوں کے
فصلوں کا مجموعہ جہاں یہ خطوط مکافی کو قطع کرتے ہیں مستقل ہے اگر دائرہ کے
مرکز کا فصلہ مستقل ہو۔

۴۲۔ تین خطوط مستقیم ایک قائم: اند کے لحاظ سے ایک خود قطبی مثلث
بناتے ہیں۔ اگر منحنی کو متغیر کیا جائے لیکن خطوط ثابت رہیں تو مرکز کا طریق معلوم کرو۔
۴۳۔ اگر ایک ناقص کے ہم مرکز ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت
کرو کہ ناقص میں مثلثوں کی لا انتہا تعداد کھینچی جاسکتی ہے اور دائرہ کے گرد
مثلثوں کی لا انتہا تعداد کھینچی جاسکتی ہے اگر $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ جہاں ج
دائرہ کا نصف قطر ہے اور ا، ب، ناقص کے نیم محاور۔

۴۴۔ ایک ناقص پر ایسے نقطے معلوم کرو کہ ف پر کالشی دائرہ
ق میں سے گزرے اور ق پر کالشی دائرہ ف میں سے گزرے۔

۴۵۔ قائم زائد ایک دے ہوئے مکافی کے ساتھ تیسرے رقبہ کا
تماس رکھتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان زائدوں کے مرکروں کا طریق ایک مساوی
مکافی ہے۔

۴۶۔ ایک ناقص پر دو نقطے ف، ق ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر
ف پر کا عماد اس زاویہ کی تنصیف کرے جو ق پر کے عماد کے محاذی ف پر

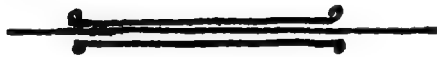
بنتا ہے تو ق پر کا عماد اُس زاویہ کی تنصیف کرے گا جو ف پر کے عماد کے محاذی ق پر بنتا ہے۔

۴۷۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص کے کسی نقطہ ف پر کامرکز انحناء ف پر کے ماس کا قطب بلحاظ اُس ہم ماسکی زائد کے ہے جو ف میں سے گذرتا ہے۔ (۳۲۲)

۴۸۔ ا ب ج ایک مثلث ہے جو ایک ناقص میں کھینچا گیا ہے۔ ایک ہم ماسکی ناقص ضلعوں کو 'ا'، 'ب'، 'ج' پرس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ا' میں سے گذرتا ہوا ہم ماسکی زائد اندرونی ناقص سے 'ا' پر ملتا ہے۔

۴۹۔ دو قائم زائدوں میں سے ایک کے مقارب دوسرے کے محوروں کے متوازی ہیں اور ہر ایک کامرکز دوسرے پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ ایک محرومی کے مرکز میں سے دائروں کی لاتینہا تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو دوسرے کو دیگر ایسے تین نقطوں ف، ق، س میں قطع کریں کہ مثلث ف ق س پہلے محرومی کے لحاظ سے خود قطبی ہو۔

۵۰۔ ایک قائم زائد کے مرکز میں سے گذرتا ہوا ایک دائرہ منحنی کو نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' میں قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا عاظمہ دائرہ جو 'ا'، 'ب'، 'ج' پر کے ماسوں سے بنتا ہے زائد کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور اس کامرکز زائد کے اُس نقطہ پر ہے جو د کا متقاطع ہے۔



بارہواں باب

الفاف اور محاسنی مساواتیں

۲۳۶۔ ہم ایک متحرک خط کا الفاف بعض سادہ صوتوں میں معلوم کر چکے ہیں [دفعہ ۱۰۸]۔
اب ہم خط

ل + لا + م - ما - ا = ۰
کا الفاف معلوم کرینگے جہاں ل اور م درجہ دوم کی کسی مساوات سے مربوط ہیں۔

۲۳۷۔ خط ل + لا + م - ما - ا = ۰ کا الفاف معلوم کرنا جہاں

۱ ل + ۲ ل + م + ب م + ۲ گ ل + ۲ ف م + ج = ۰
اگر کسی مخصوص نقطہ (لا م) میں سے گزرے تو ل + لا + م - ما - ا = ۰۔ دیکھو
شرطاً ل اور م میں متجانس بنانے کے لیے اگر اسے استعمال کیا جائے تو

۱ ل + ۲ ل + م + ب م - ۲ (گ ل + م ف) (ل لا + م ما)

+ ج (ل لا + م ما) = ۰

نسبت $\frac{ل}{م}$ کی دو قیمتوں سے ان دو خطوط کی سمتیں حاصل

ہونگی جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔
 اگر (لا، ما) اس منحنی پر کا نقطہ ہو جس کو متحرک خط مس کرتا ہے تو
 اس سے کھینچے ہوئے ماس منطبق ہونے چاہئیں اور اس لیے اوپر کی
 مساوات کی اصلیں مساوی ہونی چاہئیں۔ اس کے لیے شرط ہے

$$(1-2) \text{ گ} + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} = (2-3) \text{ ف} + \text{ما} + \text{ج} + \text{لا} = (3-4) \text{ گ} + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ما}$$

$$\text{جو} \quad (3-2) \quad \text{لا} + (\text{ب} + \text{ج} - \text{ف}) + 2\text{لا} + \text{ما} + (\text{گ} - \text{ج} + \text{ف}) + \text{ما} + (\text{ج} - \text{ا} - \text{گ}) + 2\text{لا} + (\text{ا} - \text{ف} - \text{گ} + \text{ب}) + 2\text{ما} + (\text{گ} - \text{ف} - \text{ا}) + \text{ا} + \text{ب} - 2 = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

اس لیے مطلوبہ لفاف مخروطی

$$1\text{لا} + 2\text{لا} + 2\text{ما} + \text{ب} + \text{ما} + 2\text{گ} + \text{لا} + 2\text{ف} + \text{ما} + \text{ج} = 0$$

ہے جہاں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ف'، 'گ'، 'ہ' کے وہی معنی ہیں جو دفعہ ۹ء ۱۱ میں
 لئے گئے ہیں۔

وہ شرط کہ خط لا + م + ا = ۱ = منحنی

$$1\text{لا} + 2\text{لا} + 2\text{ما} + \text{ب} + \text{ما} + 2\text{گ} + \text{لا} + 2\text{ف} + \text{ما} + \text{ج} = 0$$

کو مس کرے یہ ہے کہ

$$1\text{ا} + 2\text{ا} + \text{ل} + \text{م} + \text{ب} + 2\text{ا} + \text{گ} + \text{ل} + 2\text{ا} + \text{ف} + \text{م} + \text{ج} = 0$$

پس دفعہ ۹ء ۱۱ میں حاصل شدہ شرط کے ساتھ مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ 'ا'، 'ب'، 'ج'،
 وغیرہ متعلق

ا	ہ	گ
ب	ف	ج
گ	ف	ج

میں 'ا' 'ب' 'ج' وغیرہ کے صغیروں کے متناسب ہونے چاہئیں۔
اس کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو جاتی ہے کیونکہ (ا) کا صغیر

ب ج - ف ا ہے یا

(ج ۱ - گ ۱) (ا ۱ ب - ط ۱) - (گ ۲ - ا ۲ ف) یعنی ۱۵
اور اسی طرح دوسروں کے لیے -

یہ بھی مشاہدہ طلب ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۱ \\ \hline ۲ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۱ \\ \hline ۲ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

کیونکہ پہلا قطع (۱۵ + ۱۵ + ۱۵ = ۴۵) گ ۱ = ۱۵ ہے۔

مخروطی فہ (ل' م) = . کامرکز معلوم کرنا۔

وہ دو ماس جو محور ما کے متوازی ہیں مساوات

$$۱ل' + ۲گ' ل = ج' = .$$

سے حاصل ہوتے ہیں -

اب اگر ما = . کے متوازی ماس ل' لا + ا = . اور ل' لا + ا = . ہوں تو

$$\frac{۱}{ل} + \frac{۱}{ل} = ۲ - \frac{۱}{ج}$$

لیکن کسی مخروطی کامرکز ایسے خط پر ہوتا ہے جو متوازی ماسوں کے
کسی زوج کے درمیان وسط میں ہوتا ہے۔

اس لیے مرکز خط

$$۲لا + \frac{۱}{ل} + \frac{۱}{ل} = . یعنی ج لا - گ = . پر ہے۔$$

اسی طرح مرکز خط ج ما - ف = . پر ہے۔

اس لیے مخروطی کا مرکز ہے

$$\left(\frac{گ}{ج}, \frac{ف}{ج} \right)$$

مثال ۱۔ خط ل لا + م ما + ا =۔ کا لفاف معلوم کرنا اس شرط کے

ساتھ کہ

$$\frac{ف}{ل} + \frac{گ}{م} + \frac{ا}{ا} = ۰$$

اُن دو خطوں کی سمتیں جو (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں

$$ل م - (ف م + گ ل) (ل لا + م ما) = ۰$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔ یہ خطوط منطبق ہو چکے اگر

$$م گ ف لا ما = (ف لا + گ ما - م)$$

$$ل لا + ل لا گ ما + ل ا = ۰$$

کے حاصل ہے۔

مثال ۲۔ مخروطی س = $\frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} - ۱$ میں مثلث

کھینچے گئے ہیں اور اضلاع میں سے دو مخروطی س = $\frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} - ۱$ ۔

کو مس کرتے ہیں۔ تیسرے ضلع کا لفاف معلوم کرو۔

س کے نقطہ ۱ (لا، ما) سے مخروطی م =۔ کے عاسوں کی مساوات

$$\left(\frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} - ۱ \right) \left(۱ - \frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} \right) - \left(۱ - \frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} + \frac{لا لا}{و} \right) = ۰ \quad (۱)$$

۴۔

اب اگر ج ج ' ل لا م م + ن = ہو تو

$$\frac{ل}{۲} + \frac{م}{۲} - ۱ = ل (\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱) (ل لا م + ن) = ۰$$

(۲).....

ر کی کسی خاص قیمت کے لیے وہی خطوط ہو گئے جو (۱) سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{پس } \frac{ل}{۲} + \frac{م}{۲} = \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲}$$

$$ل - ن = \frac{لا}{۲} = \frac{ل}{۲}$$

$$\text{اور } م - ن = \frac{ما}{۲} = \frac{م}{۲}$$

$$۱، \frac{ما}{۲}، \frac{لا}{۲} \text{ سے ترتیب وار ضرب دو تو}$$

$$\frac{ل}{۲} = \frac{ل}{۲} (\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱) = \frac{لا}{۲} - \frac{ل}{۲} + \frac{لا}{۲}$$

$$\frac{م}{۲} = \frac{م}{۲} (\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱) = \frac{ما}{۲} - \frac{م}{۲} + \frac{ما}{۲}$$

$$\text{اور } \frac{ن}{۲} = \frac{ن}{۲} (\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱) = \frac{لا}{۲} - \frac{ن}{۲} + \frac{ما}{۲}$$

$$\text{لیکن } \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰ \text{ اس لیے}$$

(۳۲۸)

$$\frac{ل}{۲} + \frac{م}{۲} = \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} \text{ (۳).....}$$

اس لیے ل لا م م + ن = کا لغاف شرط (۳) کے ساتھ

$$\frac{ل}{ل} = لا + \frac{م}{ب} = ما = ن$$

۷۔

یہ لفاف خود محرومی میں ہوگا اگر

$$\frac{ل}{ل} = \frac{با}{ب} = ن$$

اور یہ $\frac{ل}{ل} \pm \frac{ب}{ب} \pm ۱ = ۰$ میں تحویل ہوتا ہے [مب دفعہ ۲۰۵]

۲۳۸۔ اگر ایک خط مستقیم کی مساوات

$$ل = لا + م + ۱ = ۰$$

ہو تو خط کا محل متعین ہوگا اگر ل، م معلوم ہوں۔ اور ل اور م کی قیمتوں کو بدلنے سے یہ مساوات کسی خط مستقیم کو تعبیر کر سکتی ہے۔ مقداروں ل اور م کو جو اس طرح ایک خط کے محل کو متعین کرتی ہیں خط کے محدود کہتے ہیں۔ خط ل + م + ۱ = ۰ ثابت نقطہ (۱، ب) میں سے گزرے گا اگر ل + م + ۱ = ۰ اس لئے اس کو نقطہ کی مساوات کہتے ہیں۔

اگر ایک خط مستقیم کے محدود کسی رشتہ میں مربوط ہوں تو خط ایک منحنی کو لف کیرے گا۔ اور وہ مساوات جو رشتہ کو بیان کرتی ہے منحنی کی محاسن مساوات کہلائی ہے۔

اگر منحنی کی مساوات ل میں درج کی ہو تو منحنی کے ن محاسن کسی نقطہ سے کہنے جاسکتے ہیں۔

تعریف۔ منحنی کو ن میں جماعت کا منحنی کہتے ہیں جبکہ اس کے

ن محاسن کسی نقطہ سے کہنے جاسکیں۔

ہم دیکھ چکے ہیں [دفعہ ۲۳۷] کہ دوسرے درجہ کی ہر محاسن مساوات

اب فرض کرو کہ $ل، لا، م، ما، ا = ۱$ ۔ ماس نہیں ہے۔
 فرض کرو کہ وتر $ل، لا، م، ما، ا = ۱$ ۔ کے سروں پر کے ماس $(ل، م، ا)$
 $(ل، م، ا)$ ہیں۔
 ان ماسوں کے نقاط ماس کی مساواتیں

$ل (ول + م + گ) + م (ل + ب + م + ف) + گ ل$
 $+ ف م + ج = ۰$ ، وغیرہ ہیں۔ وہ شرطیں کہ یہ دو نقطے خط $ل، لا، م، ما، ا = ۱$ پر ہوں۔
 $ل (ول + م + گ) + م (ل + ب + م + ف) + گ ل + ف م + ج = ۰$ وغیرہ

یعنی
 $ل (ول + م + گ) + م (ل + ب + م + ف) + گ ل + ف م + ج = ۰$ وغیرہ ہیں۔ اس لیے یہ نیچے نکلتا ہے کہ خطوط $(ل، م، ا)$ اور
 $(ل، م، ا)$ اس نقطہ میں سے گزرتے ہیں جس کی مساوات

$ل (ول + م + گ) + م (ل + ب + م + ف) + گ ل + ف م + ج = ۰$
 ہے۔ اس لیے معین خط $ل، لا، م، ما، ا = ۱$ کے قطب کی مساوات ہے۔
 مثال — مخروطی کا مرکز لاتا ہی پر کے خط کا قطب ہوتا ہے یعنی خط $(ول، م، ا)$ کا قطب۔

(۳۳۰)

اس لیے مرکز کی ماسی مساوات $گ ل + ف م + ج = ۰$ ہے۔
 ۲۳۹ — مخروطی کا مرتب دائرہ معلوم کرنا جبکہ مخروطی کی
 ماسی مساوات دی گئی ہو۔

فرض کرو کہ مخروطی کی ماسی مساوات

$ول + ۲ل + م + ب + ۲گ ل + ۲ف م + ج = ۰$

— ٤ —

حسب دفعہ ۲۳۷، مساوات

۱. ل + ر = ل م + ب م - ر (گ ل + ف م) (ل لا + م م)

$$0 = j + (l + m + n)$$

سے اُن دو ماسوں کی سمیت حاصل ہوتی ہیں جو مخصوص نقطہ (لاما) میں گزرتے ہیں۔ یہ ماس ایک دوسرے کے علی القوم ہوں گے اگر

$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ ۔ یعنی اگر l اور m کے سروں کا مجموعہ صفر ہو۔

پس اگر (لا، ما) مخزومی کے مرتبہ دائرہ پر ہوتا حاصل ہونا چاہئے

۱۔ گ لا ج لا + ب۔ ف ما + ج ما = (۱)

مخرومی کا مرکز جو مرتب دائرہ کے مرکز پر منطبق ہے نقطہ (ج، ف) ہے۔

اگر ج = ۰۔ تو مساوات (۱) ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

منحنی اس صورت میں ایک مکافی ہے اور اس کے مرتب کی مساوات

۲ گ لاء ۲ ف م ا - ۱ - ب = ۰ (۲)

-4

ہے۔
 اوپر ہم نے محوروں کو قائم فرض کیا ہے، لیکن اگر محدودوں کے
 محاور ایک دوسرے سے زاویہ سے پر مائل ہوں تو وہ شرط کہ خطوط مستقیم

علی القوا تم ہوں

۱۔ گ ل ا ج ل ا ب - ۲ ف م ا ج ا ۲ ج م - (۳ گ م)

$$= (f + j) \cdot$$

-4

اس دائرہ کا مرکز (گ، ج، ف) ہے۔

(۳۳۱)

پس خواہ محاور قائم ہوں یا مائل، مخروطی کا مرکز جو مرتب دائرہ کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے (کج، ف) ہے حسب دفعہ، ۱۳۔

۲۴۔ مخروطی کے ماسکے معلوم کرنا جبکہ مخروطی کی حماسی مساوات دی گئی ہو۔

فرض کرو کہ ماسکوں کا زوج (لا، با) اور (لا، ما) ہے خواہ یہ دونوں حقیقی ہوں یا دونوں خیالی۔ تب کسی حماس ل + لا + م + ما = ۱ پر کے عمودوں کا حاصل ضرب ایک نیم محور کے مربع کے مساوی ہونا چاہئے۔ پس

$$(ل + لا + م + ما) (ل + لا + م + ما) = ۱ \quad (۱)$$

چونکہ یہ ل اور م کی ان تمام قیمتوں کے لیے درست ہے جو حقیقی حماسی مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لیے مساوات (۱) مساوات

$$(ل + لا + م + م + ب + م + گ + ل + ف + م + ج) = ۱ \quad (۲)$$

کے معادل ہونی چاہئے۔ اس لیے

$$\frac{لا + لا - ر}{۱} = \frac{لا + ما + لا + ما}{۲} = \frac{ما + ما - ر}{۱} = \frac{لا + لا}{۲}$$

$$\frac{۱}{۲} = \frac{لا + ما}{ف} =$$

اس لیے ج لا لا = ج لا ما = ۱ - ب اور ج لا ما + ج لا ما = ۱

نیز ج لا = گ - ج لا اور ج ما = ف - ج ما

ادھ کی مساواتوں سے لا اور با کو ساقتہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ
اسکے (لا، با) دو مخروطیوں

$$\begin{aligned} & \text{ج لا} + \text{ج ما} - \text{گ لا} + \text{ف ما} + \text{د} - \text{ب} = \\ & \text{ج لا} + \text{ما} - \text{ف لا} - \text{گ ما} + \text{د} = \end{aligned}$$

اور

یہ ہے۔

ادھ محوروں کو قائم فرض کیا گیا ہے۔ اگر محاور زیادہ سے پر مائل ہوں تو
ساوات (۱) میں ل + م کی بجائے ل + م - ۲ ل م جم سے بکھٹا جائے۔

(۳۳۲)

۲۔ اس مخروطی کے محوروں کے طول معلوم کرنا جسکی
ماسی مساوات دی گئی ہو۔

دفعہ مابقی کے بموجب اگر (لا، با) (لا، با) ماسلوں کا زوج ہو تو

$$\text{ج (ل لا + م ما + ا)} - \text{(ل لا + م با + ا)} - \text{ج ز (ل + م)} =$$

$$= \text{ل + ل + م + ل م + م + ب م + گ ل + ف م + ج}$$

$$= \text{(ل + ج ز) ل + ل + م + (ب + ج ز) م + گ ل + ف م + ج}$$

رائے ضربی کا حاصل ضرب ہے اس کے لیے شرط

$$\begin{vmatrix} \text{گ} & \text{د} & \text{ج + ل} \\ \text{ف} & \text{ب + ج ز} & \text{د} \\ \text{ج} & \text{ف} & \text{گ} \end{vmatrix} =$$

پس مساوات جس سے نیم محوروں کے مربع حاصل ہوتے ہیں

یہ ہے۔

$$\text{ج ز + ج ز (ب ج - ف + ج ل - گ) + د} =$$

۲۴۲۔ ہم ماسکی مخروطی۔ اگر (لا، با) (لا، ما) (لا، م) ایک مخروطی کے ماسکے ہوں تو اس کی ماسی مساوات

$$(ل + لا + م + با + ا) (ل + لا + م + با + ا) - ر (ل + م) = ۰$$

کے معادل ہے۔ پس اگر

$$ل + لا + م + با + ا = ر (ل + م) + ج = ۰$$

ایک مخروطی کی ماسی مساوات ہو تو کسی ہم ماسکی مخروطی کی ماسی مساوات

$$ل + لا + م + با + ا = ر (ل + م) + ج + لا + م = ۰$$

ہوگی۔

پس ف (لا، ما) = کے ہم ماسکی مخروطیوں کی عام مساوات معلوم کرنے کے لیے ہم حسب ذیل طریقہ اختیار کرتے ہیں:

ف (لا، ما) = کی ماسی مساوات

$$ل + لا + م + با + ا = ر (ل + م) + ج = ۰$$

ہے۔ اس لیے کسی ہم ماسکی مخروطی کی ماسی مساوات

$$(ل + لا + م + با + ا) (ل + لا + م + با + ا) - ر (ل + م) + ج = ۰$$

ہے۔ اس لیے متناظر کاریزی مساوات

$$ل + لا + م + با + ا = ر (ل + م) + ج + لا + م = ۰$$

۲۴۳۔ ہے جہاں لا و غیرہ

گ	ب + لا	لا + م
ف	ب + لا	لا + م
ج	ف	گ

سے معلوم کرنے ہونگے۔

پس $ا = ب + ج - ف + ل + ج = ف + گ - ج = د$
 $ب = ب + د + ل + ج = گ - گ = د - ل + گ = ف - ل + ف$

اور $ج = ج + د + (ب + ل) + ل = د$
 اس لیے $ف = (لا + ما) =$ کے ہم ماسکی مخروطی کی عام مساوات

$د = ف = (لا + ما) + ل + د + ل = د$

یہ جہاں $د = ج = (لا + ما) - گ - لا - ف + ما + ا + ب$
 اسی طرح مرتب دائرہ کی مساوات $د =$ ہے۔

۲۴۳۔ اگر دو مخروطیوں کی ماسی مساواتیں $س =$ اور $س =$ ہوں تو $س = ل = س =$ اس مخروطی کی عام ماسی مساوات ہوگی جو $س =$ اور $س =$ کے مشترک ماسوں کو مس کرتا ہے۔

اگر $س =$ ، مساوات $ا = ل + ل = ل + م + ب + م + گ = لا$
 $+ ف + ما + ج =$ کو اور $س =$ ، مساوات $ا = ل + ل = ل + م + ب + م + گ = لا$

$+ ف + ما + ج =$ کو تعبیر کرے تو $س = ل = س =$ ایک مخروطی کی ماسی مساوات ہے اور $ل = م$ کی کوئی قیمتیں جو $س =$ اور $س =$ دونوں کو پورا کریں $س = ل = س =$ کو بھی پورا کریں گی خواہ $ل$ کی قیمت کچھ ہی ہو۔

اس لیے مخروطی $س = ل = س =$ ، مخروطیوں $س =$ اور $س =$ کے مشترک ماسوں کو مس کرتا ہے۔

۲۴۴۔ ان مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق معلوم کرنا جو چار ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ $م = ل$ اور $م = پ$ ۔ کسی دو مخروطیوں کی عامی مساواتیں ہیں جو چار خطوں کو مس کرتے ہیں۔ تب $م = ل$ اور $م = پ$ ۔ اس مخروطی کی عامی مساوات ہے جو ان خطوں کو مس کرتا ہے۔
 اب $م = ل$ اور $م = پ$ ۔ کا مرکز مساواتوں
 (ج۔ ل۔ ج)۔ لا۔ (گ۔ ل۔ گ)۔ اور (ج۔ ل۔ ج)۔ ما۔ (ف۔ ل۔ ف)۔
 سے حاصل ہوتا ہے۔

لہ کو سا قط کرنے پر مطلوبہ مساوات
 لا (ج۔ ف۔ ج۔ پ) + ما (ج۔ گ۔ ج۔ گ) + ف (گ۔ ف۔ گ)۔

حاصل ہوتی ہے۔ (۳۳۲)
 مثال۔ مخروطیوں کا ایک نظام ہے جن میں سے ہر مخروطی چار دئے ہوئے خطوں کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

مساوات $م = ل$ اور $م = پ$ ۔ اس مخروطی کی عام مساوات ہے جو ان دو مخروطیوں کے مشترک مماسوں کو مس کرتا ہے جن کی مساواتیں $م = ل$ اور $م = پ$ ۔ ہیں۔

۱۔ اس خط کے قطب کی مساوات جس کے محد مخروطی میں ہلے ہیں۔
 کے لحاظ سے ل، م (دفعہ ۲۳۹) ہیں

ل (ل۔ ل + م۔ م + گ۔ گ) + م (م۔ ل + پ۔ پ + ف۔ ف) + ج (ج۔ ل + ف۔ ف + گ۔ گ)

+ ل (ل۔ ل + م۔ م + گ۔ گ) + م (م۔ ل + پ۔ پ + ف۔ ف)

۱۔ گ۔ ل۔ + ف۔ م۔ + ج۔ =

۲۔ اوپر کی مساوات سے ظاہر ہے کہ عزولی میں + ل۔ میں پ۔ = کے لحاظ سے خط (ل۔ م۔) کا قطب اُن نقطوں کو ملانے والے خط پر ہے جن کی مساواتیں

ل (۱۔ ل۔ + م۔ م۔ + گ۔) + م (م۔ ل۔ + ب۔ م۔ + ف۔)

+ گ۔ ل۔ + ب۔ م۔ + ج۔ =

اور ل (۱۔ ل۔ + م۔ م۔ + گ۔) + م (م۔ ل۔ + ب۔ م۔ + ف۔)

+ گ۔ ل۔ + ف۔ م۔ + ج۔ =

ہیں۔ پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۲۲۵۔ اُن تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو چار

دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کریں ہم محور ہوتے ہیں۔

چار دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرنے والے مخروطی کی عام مساوات

میں ۱۔ ل۔ میں پ۔ = ہے جہاں میں ۲۔ = اور میں ۳۔ = نظام کے کسی

د مخروطیوں کی محاسنی مساواتیں ہیں۔

اب میں ۱۔ ل۔ میں پ۔ = کا مرتب دائرہ

۱۔ + ب۔ - ۲۔ گ۔ لا۔ - ۲۔ ف۔ ما۔ ج۔ (لا۔ ما۔)

- ل (۱۔ ل۔ + ب۔ - ۲۔ گ۔ لا۔ - ۲۔ ف۔ ما۔ ج۔ (لا۔ ما۔)) =

۳۔ جو مرکباً ہم محور دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتا ہے جسکا بنیادی محور

قطبی ایک مکانی کو لف کرتے ہیں۔

۵۔ مستقل نصف قطر کے دائروں کے مرکز ایک دے ہوئے دائرہ پر ہیں۔
ثابت کرو کہ ان دائروں کے لحاظ سے ایک دے ہوئے نقطہ کے قلیوں کا
لغاف ایک قزوطی ہے۔

۶۔ ایک دے ہوئے خط مستقیم کے کسی نقطہ ف میں سے ایک
خط ف ق کھینچا گیا ہے جو ف کے قلی کے متوازی ہے جہاں یہ قلی ایک
دے ہوئے قزوطی کے لحاظ سے لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان خطوط مستقیم کا
لغاف ایک مکانی ہے۔

(۳۳۶)

۷۔ اگر کتاب کے ایک ورق کو اس طرح موڑا جائے کہ اس کا ایک
کونہ مقابل کے ضلع پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ سل کا خط ایک مکانی کو مس
کرے گا۔

۸۔ ایک ناقص اپنے مرکز کے گرد گردش کرتا ہے۔ ابتدائی محل کے
ساتھ تقاطع کے دتروں کا لغاف معلوم کرو۔

۹۔ مستقل مقدار کا ایک زاویہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک
ساق ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتی ہے اور اس کا سر ایک ثابت
خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دوسری ساق ایک مکانی کو لف
کرتی ہے۔

۱۰۔ ناقص کے ایک دتروں ق کا وسطی نقطہ ایک دے ہوئے
خط مستقیم پر ہے۔ ثابت کرو کہ دتروں ق ایک مکانی کو لف کرتا ہے۔

۱۱۔ ایک ناقص کے مزدوج قطروں کا کوئی زوج ایک ثابت دائرہ
سے جو ناقص کے ہم مرکز ہے نقطوں ف ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ
ف ق ایک متشابه اور متشابه واقع ناقص کو لف کرے گا۔

۱۲۔ اگر ایک خط مستقیم پر متعدد ثابت نقطوں سے عمود کھینچے جائیں
اور ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط مستقیم ایک
قزوطی کو لف کرے گا۔

۱۳۔ ایک مثلث کے ضلع (محدودہ بضرورت) ایک خط مستقیم سے نقطوں 'ل'، 'م'، 'ن' پر منقطع ہوتے ہیں۔ اگر 'ل'، 'م'، 'ن' مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط ایک مکانی کو لف کرے گا۔

۱۴۔ ایک ثابت نقطہ میں سے جو ایک مکانی کے محور پر ہے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو منحنی کو 'ف'، 'ق' پر قطع کرتا ہے، اور وہ دائرہ جو 'ف'، 'ق' اور ماسکے میں سے گزرتا ہے مکانی کو مکرر 'ف'، 'ق' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ف'، 'ق' دوسرے مکانی کو لف کرتا ہے جس کا ماسکے میں ہے۔

۱۵۔ اگر کسی مثلث 'ف'، 'ق' کا مرکز ہندسی جس کو 'ت'، 'م'، 'ز'، 'لا'، 'ا' = 'و' میں کھینچا گیا ہو ثابت نقطہ (ع، ہ) پر ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کے ضلع اس محفوظی کو لف کریں گے جس کی مساوات

$$۴(۲ - لا - ع) = (۳ - ا - ب)(۳ - ب) = (۳ - لا + ۳ - ا - ع - ۹ - ب - و) = ۲$$

ہے۔

$$۱۶ - \frac{لا}{۲} + \frac{ا}{۲} = ا کا کوئی وتر 'ف'، 'ق' ایک ثابت نقطہ$$

(ف، گ) میں سے کھینچا گیا ہے۔ اگر 'ف'، 'ق' اور ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والا دائرہ ناقص کو مکرر 'م'، 'س' پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ 'م'، 'س' مکانی

$$(ف + گ) (لا + ا) - \{لاف - ماگ + \frac{۲}{۱} \frac{ا}{ب} - \frac{۲}{۱} \frac{ب}{ا}\} = ۰$$

کو مس کرے گا۔

۱۷۔ ا - م - لا = ۰ میں مثلث کھینچے گئے ہیں جن کے دو ضلع (لا - ۱۳) + ا = م = ج کو مس کرتے ہیں۔ تیسرے ضلع کا لفاف معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ لفاف خود دائرہ ہے اگر ج = ۱۲۔

- ۱۸۔ اُن تمام مخروطیوں کے متقارب جو دو دئے ہوئے خطوط مستقیم کو دئے ہوئے نقطوں پر مس کریں ایک مکانی کو لف کرتے ہیں۔
- ۱۹۔ ایک مکانی دو ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے اور ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا مرتب ایک مخروطی کو لف کرتا ہے۔
- ۲۰۔ ایک ناقص کے نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر دو طرف 'ق' ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے تو وتر 'س' میں ایک مکانی کو لف کرے گا۔
- ۲۱۔ ایک قائم زائد کسی نصف قطر کے ایک دائرہ سے منقطع ہوتا ہے اور اس دائرہ کا مرکز زائد کے محوروں میں سے ایک پر ایک ثابت نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو تقاطع تقاطع کو ملائے ہیں یا تو زائد کے ایک محور کے متوازی ہیں یا ایک ثابت مکانی کے مماس ہیں۔
- ۲۲۔ ناقصوں کا ایک نظام ہے جن کے محور مقدار اور سمت میں دئے گئے ہیں اور مرکز ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نظام کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبی کا لغاف ایک مکانی ہے۔
- ۲۳۔ دو مساوی دائروں میں سے ایک ثابت ہے اور دوسرا ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کا بنیادی محور ایک مخروطی کو جس کا ماسک ثابت نقطہ ہے لف کرتا ہے۔
- ۲۴۔ اگر ایک ناقص کے مرکز سے سمتی نصف قطروں کے زوج محور اعظم کے ساتھ ایسے زاوے بناتے ہوئے کھینچے جائیں جن کا مجموعہ ایک قائمہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ اُن وتروں کے قطبیوں کا طریق جو ان کے سروں کو ملائے ہیں ایک ہم مرکز زائد ہے اور وتروں کا لغاف ایک قائم زائد ہے۔
- ۲۵۔ ایک مخروطی کے مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے کسی نقطہ سے ایک محور کے سروں تک خطوط کھینچے گئے ہیں اور یہ خطوط

منحنی کو مکرر نقطوں 'ف' 'ق' پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' کا لغاف ایک قائم زائد ہے۔

(۳۳۸) ۲۶۔ ایک ناقص کا دو ہر اضعین 'ف' 'ن' ہے جو مرکز 'ج' اور ایک 'راس' سے مساوی فاصلہ پر ہے۔ اگر 'ف' 'ن' 'ج' میں سے مکانی کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ مکانی اور ناقص کے دیگر نقاط تقاطع کو ملانے والے وتر ایک دوسرے ناقص کو مس کریں گے جو ہر طرح دئے ہوئے ناقص کے مساوی ہوگا۔

۲۷۔ دو دئے ہوئے متوازی خطوط مستقیم ایک خط سے جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے نقطوں 'ف' 'ق' پر منقطع ہوتا ہے۔ اس دائرہ کا لغاف معلوم کرو جو 'ف' 'ق' کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو۔

۲۸۔ ایک مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام پر انہیں قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں کا لغاف دوسرا مخروطی ہے۔

۲۹۔ ایک مکانی کا ایک وتر ایسا ہے کہ وہ دائرہ جو اس وتر کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو منحنی کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر ایک دوسرے مکانی کو لف کرتا ہے۔

۳۰۔ ایسے مکانی کھینچے گئے ہیں جن میں 'راس' مشترک ہے اور جو ایک ثابت نقطہ 'ف' میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تمام مکانیوں کے مرتبوں کا لغاف ایک مکانی ہے جس کے وتر خاص کا طول 'ف' ہے۔

۳۱۔ ایک مکانی کے دو حماس کھینچے گئے ہیں، اگر ان حماسوں کے درمیانی داخلی اور خارجی زاویوں کے ناصف مخروطی کے دو دئے ہوئے قطروں کے متوازی ہوں تو وتر حماس ایک زائد کو لف کرے گا جس کے متقارب قطروں کے مزدوج ہوں گے۔

۳۲۔ ایک دئے ہوئے مخروطی میں کے لحاظ سے ایک نقطہ

ف کا قطبی دو ثابت خطوط مستقیم (ب، ج) کو ق' ق پر قطع کرتا ہے۔
 اگر ا ف، ق ق کی تنصیف کرے تو ثابت کرو کہ ف کا طریق ایک مخروطی
 ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ق ق کا لفاف دوسرا مخروطی ہے۔
 ۳۳۔ اگر ایک مخروطی پر دو نقطے ایسے لیے جائیں کہ ایک ماسک
 میں سے ان کے فاصلوں کا اوسط موسیقی مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ان کو
 ملاسنے والا وتر ہمیشہ ایک مخروطی کو مس کرے گا جس کا ایک ماسک میں ہوگا۔
 ۳۴۔ ایک مکانی کے اس وتر کا لفاف جس کے محاذی ماسک پر
 ایک قائمہ زاویہ بنے ناقص

$$(لا - ۱۳) = ۲ + ۸ = ۱۸$$

 ہو گا اگر مکانی کی مساوات $۲ - ۱۸ = ۰$ ہو۔
 ۳۵۔ مخروطی کا ایک وتر منحنی کے ایک دے ہوئے نقطہ پر مستقل
 زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر ایک مخروطی کو جو دے ہوئے مخروطی سے
 ساتھ دو ہر اتنا مس رکھتا ہے لف کرتا ہے۔ (۳۳۹)
 ۳۶۔ ایک ثابت نقطہ میں سے ایک دائرہ کے دو وتر ایک
 دوسرے کے علی التواء کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس چار ضلعی کا
 ہر ضلع جو ان وتروں کے سروں کو ملانے سے بنتا ہے ایک مخروطی کو
 لف کرتا ہے جس کے ماسکے ثابت نقطہ اور دائرہ کامرکز ہیں۔
 ۳۷۔ ایک نقطہ میں سے اس کے قطبی (بلحاظ ایک مکانی کے)
 پر عمود کھینچا گیا ہے جو مکانی کے محور سے ج پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ
 مکانی کے دو وتر جن کے محاذی میں یہ قائمہ زاویہ بنے سب کے سب
 ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں جس کامرکز ج ہے۔
 ۳۸۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے دو ترجمین کے محاذی ایک
 ثابت نقطہ پر قائمہ زاویہ بنے دوسرے مخروطی کو لف کرتے ہیں۔
 نیز ثابت کرو کہ ولفاف کا ماسک ہے اور و کے متناظر مرتبہ
 و کا قطبی (بلحاظ ابتدائی مخروطی) ہے۔

ثابت کرو کہ متشابه اور متشابه واقع ہم مرکز محزوطیوں کے متناظر لفاف ہم ماسکی ہوتے ہیں۔

۳۹۔ ایک ثابت خط مستقیم ہم ماسکی محزوطیوں کے ایک نظام کے ایک محزوطی سے نقطوں 'ف' 'ق' پر ملتا ہے۔ 'ف' اور 'ق' پر عماد کھینچے گئے ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع سے کھینچے ہوئے دو دوسرے عمادوں کو ملانے والا خط 'س' میں ہے۔ ثابت کرو کہ 'س' میں کا لفاف ایک مکانی ہے جو محزوروں کو مس کرتا ہے۔

۴۰۔ ایک خط دو دے ہوئے دائروں کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ خط کے وہ حصے جو دائروں سے منقطع ہوتے ہیں متساوی نسبت میں ہیں ثابت کرو کہ خط ایک محزوطی کو لف کرے گا جو ایک مکانی ہو گا اگر نسبت ایک کے مساوی ہو۔

۴۱۔ ایک قائم زاویہ کے وتر جو ایک دوسرے کے علی القوا میں ایک ثابت نقطہ پر اپنے عمادی قائمہ زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ و کے قطبی پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۴۲۔ مکانی ما^۱ = لا^۱ = ۰ کے دو وتر 'ف' 'ق' ہیں 'ا' میں سے گذرتے ہوئے کھینچے گئے ہیں اور یہ وتر ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{2}$ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط 'ف' 'ق' ہمیشہ ناقص

$$(لا - ۱۲) + ۸ = ۱۲۸$$

کو مس کرے گا۔

۴۳۔ ایک محزوطی پر نقطوں کے ایسے زوج یے گئے ہیں کہ (۳۴۰) وہ خطوط جو ان نقطوں کو ایک دے ہوئے نقطہ سے ملاتے ہیں ایک دے ہوئے خط مستقیم کے ساتھ مساوی میلان رکھتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ وتر جو نقطوں کے کسی ایسے زوج کو ملاتا ہے ایک محزوطی کو لف کرتا ہے جس کا مرتب دائرہ ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۴۴۔ مخروطی مس کے وتر جو ایک ثابت نقطہ پر اپنے محاذی قائمہ زاویہ بناتے ہیں مخروطی مس کو لف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر مس چار ثابت نقطوں میں سے گزرے تو مس چار ثابت خطوط مستقیم کو مس کریگا۔
 ۴۵۔ ایک مخروطی چار ثابت نقطوں (ا، ب، ج، د) میں سے گذرتا ہے اور ب اور ج پر اس کے حماس (ج، ا) اور ج (ب، د) (مردودہ) سے نقطوں (ف، ق) پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (ف، ق) ایک مخروطی کو لف کرتا ہے جو ب (ا، ج) کو مس کرتا ہے۔

۴۶۔ اگر ایک وتر ایک دائرہ کو دو ایسے نقطوں (ا، ب) پر قطع کرے کہ مستطیل (ا، ب) مستقل ہو جہاں و ایک ثابت نقطہ سے تو ثابت کرو کہ وتر کا لفاف ایک مخروطی ہے جس کا مسکہ وہ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر (ا، ب) مستقل ہو تو وتر ایک مکانی کو لف کریگا۔
 ۴۷۔ ایک دائرہ کے ایک قطر پر دو نقطے (ا، ب) مرکز سے مساوی فاصلہ پر لیے گئے ہیں اور وہ خطوط جو ان نقطوں کو دائرہ کے کسی نقطہ (ف) سے ملاتے ہیں دائرہ کو مرکز (ق) پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (ق، س) ایک مخروطی کو لف کرتا ہے جس کا امدادی دائرہ دیا ہوا دائرہ ہے۔

۴۸۔ (ا، لا + ب، ما) = ۱ کے وتر جو نقطہ (ع، ہ) پر اپنے محاذی قائمہ زاویہ بناتے ہیں ایک مخروطی کو لف کرتے ہیں جس کے اعظم امدادی دائرے کی مساوات (ا + ب) (لا + ما) = ۲ ب، ع لا = ۲ ب، ما + ب، ع ا + ا = ۱ ہے۔

۴۹۔ دو دے ہوئے دائروں میں سے ایک پر نقطہ (ف) اور دوسرے نقطہ (ق) لیے گئے ہیں ایسے کہ (ف، ا) اور (ق، ب) کے حماس عمود وار ہیں۔ ثابت کرو کہ (ف، ق) ایک مخروطی کو لف کرتا ہے۔
 ۵۰۔ ایک مخروطی کو ایک دے ہوئے شلت میں کھینچا گیا ہے اور مخروطی کے محوروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

تیرہواں باب

سہ خطی محدود

۲۴۷۔ فرض کرو کہ کوئی تین خطوط مستقیم لیے گئے ہیں جو ایک نقطہ پر نہیں ملتے اور فرض کرو کہ ان خطوط مستقیم سے مثلث (ج ب ج) بنتا ہے۔ فرض کرو کہ اضلاع ج ب ج، ج ا ج، ا ب سے کسی نقطہ ف کے عمودی فاصلے علی الترتیب ع، ب، ج ہیں، تب ع، ب، ج کو مثلث (ج ب ج) کے حوالے سے نقطہ ف کے سہ خطی محدود کہا جاتا ہے۔ ہم ع، ب، ج کو مثبت سمجھیں گے جبکہ وہ اسی سمت میں کھینچے گئے ہوں جس میں حوالے کے مثلث کے راسوں سے متقابل کے قصلوں پر کے عمود کھینچے جاتے ہیں۔

ان عمودی فاصلوں میں سے دو کسی نقطہ کے محل کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں، اس لیے ان تین فاصلوں میں کوئی رشتہ موجود ہونا چاہئے۔ یہ رشتہ

$$ا + ع + ب + ج = ۲ \Delta$$

ہے جہاں Δ مثلث (ج ب ج) کا رقبہ ہے۔ یہ رشتہ مثلث کے اندر کسی نقطہ کے لیے صدقاً درست ہے کیونکہ مثلث (ج ب ج) ج ف ا، اور ا ف ب باہم ملکر مثلث (ج ب ج) کے مساوی ہیں۔ اگر عمودوں کی علامتوں کا لحاظ کیا جائے تو یہ بھی آسانی

معلوم ہو سکتا ہے کہ رشتہ بالا مثلث کے باہر یا ضلعوں کے اوپر کسی نقطہ کے لیے درست ہے اگر مختلف صورتوں کے لیے مختلف شکلیں کھینچ لی جائیں۔ پس ثابت ہوا کہ رشتہ $1 + e + b + c + d = \Delta 2 = 0$ عام طور پر درست ہے۔

۲۴۸ — رشتہ $1 + e + b + c + d = \Delta 2 = 0$ کے ذریعہ کسی مساوی کو e, b, c میں متجانس بنایا جاسکتا ہے، اور جب یہ ہو جائے تو ہم نقطہ کے اصلی محدودوں کو استعمال کرنے کی بجائے ان کے متناسب کوئی مقدار میں استعمال کر سکتے ہیں کیونکہ اگر کوئی قیمتیں e, b, c ایک متجانس مساوات کو پورا کریں تو قیمتیں $k e, k b, k c$ بھی اس مساوات کو پورا کریں گی۔

۲۴۹ — اگر مثلث کے اندر کسی مبداء کو لیا جائے تو اس نقطہ میں سے گزرنے والے کسی قائم محوروں کے حوالے سے مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں شکل (۳۴۲)

$$- \text{لاجم طم} - \text{ماجب طم} + \text{ع} = 0$$

$$- \text{لاجم طم} - \text{ماجب طم} + \text{ع} = 0$$

$$- \text{لاجم طم} - \text{ماجب طم} + \text{ع} = 0$$

میں لکھی جاسکتی ہیں جہاں $\text{جم}(\text{طم} - \text{طم}) = \text{جم}(\text{ا}) - \text{جم}(\text{طم} - \text{طم}) = \text{جم}(\text{ب})$

اور $\text{جم}(\text{طم} - \text{طم}) = \text{جم}(\text{ج})$

[ہم نے ان مساواتوں کو اس طرح لکھا ہے کہ مستقل رقمیں

مثبت ہیں، اس کی وجہ یہ ہے کہ مثلث کے اندر کسی نقطہ سے مقابل کے ضلعوں پر عمود سب کے سب مثبت ہوتے ہیں۔]

پس [دفعہ ۱] حاصل ہوتا ہے

ع = ع - لاجم ط - ما جب ط ،

ب = ع - لاجم ط - ما جب ط ،

ج = ع - لاجم ط - ما جب ط ،

ان مساواتوں کی مدد سے ہم کسی مساوات کو جو نہ خطی محدود

میں ہو کارٹیزی محدودوں کی مساوات میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

۲۵۰۔ درجہ اول کی ہر مساوات ایک خط مستقیم کو تعبیر

کرتی ہے۔

فرض کرو کہ مساوات

$$ل = ع + م + ب + ن ج =$$

ہے۔ اگر ہم ع + ب کی بجائے اُن قیمتوں کو درج کریں جو دونوں سمتوں

میں حاصل ہوئی ہیں تو کارٹیزی محدودوں کی مساوات جو اس طرح

حاصل ہوگی صریحاً درجہ اول کی ہوگی۔ اس لیے طریقہ آسان، خط

مستقیم ہے۔

۲۵۱۔ ہر خط مستقیم کو درجہ اول کی ایک مساوات سے

تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ ل، م، ن کی ایسی قیمتیں ہمیشہ معلوم

ہو سکتی ہیں کہ مساوات ل = ع + م + ب + ن ج = ۰ جو ایک خط مستقیم

کو تعبیر کرتی ہے کسی دو نقطوں کے محدودوں سے پوری ہو۔

اگر نقطوں کے محدود (ع، ب، ج) اور (ع، ب، ج)

ہوں تو

$$ل \text{ عہ } + م \text{ بہ } + ن \text{ جہ } = .$$

$$ل \text{ عہ } + م \text{ پہ } + ن \text{ جہ } = .$$

ماصل ہونا چاہئے اور صریحاً ل، م، ن کی قیمتیں ہمیشہ معلوم کیجا سکتی ہیں جو ان دو مساواتوں کو پورا کریں۔

۲۵۲۔ دو دے ہوئے نقطوں میں سے گزرنیوالے خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دے ہوئے نقطوں کے محدود (عہ، بہ، جہ) اور (ل، عہ،

پہ، جہ) ہیں۔ کسی خط مستقیم کی مساوات

$$ل \text{ عہ } + م \text{ بہ } + ن \text{ جہ } = .$$

ہے۔ نقطے (ل، عہ، بہ، جہ) اور (ل، عہ، بہ، جہ) اس خط پر ہوں گے اگر

$$ل \text{ عہ } + م \text{ بہ } + ن \text{ جہ } = .$$

$$ل \text{ عہ } + م \text{ پہ } + ن \text{ جہ } = .$$

ان مساواتوں سے ل، م، ن کو ساقط کرنے پر مطلوبہ مساوات

$$= \begin{vmatrix} \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} \\ \text{ل} & \text{عہ} & \text{بہ} \\ \text{ل} & \text{عہ} & \text{جہ} \end{vmatrix}$$

ماصل ہوتی ہے۔

۲۵۳۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ تین دے ہوئے نقطے ایک خط مستقیم میں ہوں۔

فرض کرو کہ تین دے ہوئے نقطے (ل، عہ، بہ، جہ)، (ل، عہ، بہ، جہ) اور

(عہ، پ، ج) ہیں۔ اگر یہ نقطے خط مستقیم

پہیں تو

$$\begin{aligned} \text{ل عہ} + \text{م پ} + \text{ن جہ} &= \dots \\ \text{ل عہ} + \text{م پ} + \text{ن جہ} &= \dots \\ \text{ل عہ} + \text{م پ} + \text{ن جہ} &= \dots \\ \text{ل عہ} + \text{م پ} + \text{ن جہ} &= \dots \end{aligned}$$
 پس ل، م، ن کو سقا کرنے پر مطلوبہ شرط

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{عہ} & \text{پ} & \text{جہ} \\ \hline \text{عہ} & \text{پ} & \text{جہ} \\ \hline \text{عہ} & \text{پ} & \text{جہ} \\ \hline \end{array} = \dots$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۴۔ دو دے ہوئے خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع معلوم کرنا۔ (۴۴)

فرض کرو کہ دے ہوئے خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$\begin{aligned} \text{ل عہ} + \text{م پ} + \text{ن جہ} &= \dots \\ \text{ل عہ} + \text{م پ} + \text{ن جہ} &= \dots \end{aligned}$$

اور

ہیں۔ اس نقطہ پر جو دونوں خطوں میں مشترک ہے

$$\text{م ن} - \text{م ن} = \text{ن ل} - \text{ن ل} = \text{ل م} - \text{ل م} \dots (۱)$$

ان مساواتوں سے محدودوں کی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں۔

اگر اصلی قیمتیں مطلوب ہوں تو کسروں (۱) کے نسب نماؤں

اور شمار کنندوں کو علی الترتیب ۱، ب، ج سے ضرب دیکر

جمع کرو، تب ہر کسر

$\Delta ۲$			۱عہ + ب بہ + ج جہ	
ل	م	ن	(م ن - م ن) + (ن ل - ن ل) + (ل م - ل م)	
ل	م	ن		
ل	م	ن		

کے مساوی ہے۔

یہ خطوط حوالے کے مثلث سے محدود فاصلہ پر ایک نقطہ میں نہیں ملیں گے یعنی وہ متوازی ہونگے اگر

$$\begin{vmatrix} ل & م & ن \\ ل & م & ن \\ ل & م & ن \end{vmatrix} = ۰$$

۲۵۵۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ تین خطوط مستقیم ایک نقطہ پر ملے۔
فرض کرو کہ خطوط مستقیم کی مساواتیں

$$ل_۱ عہ + م_۱ بہ + ن_۱ جہ = ۰$$

$$ل_۲ عہ + م_۲ بہ + ن_۲ جہ = ۰$$

$$ل_۳ عہ + م_۳ بہ + ن_۳ جہ = ۰$$

ہیں۔ یہ خطوط ایک نقطہ پر ملیں گے اگر اوپر کی مساواتیں سب کی سب

عہ بہ، جہ کی ان ہی قیمتوں سے پوری ہوں۔ پس عہ، بہ، جہ کو
ساقط کرنے سے مطلوبہ شرط

$$= \begin{vmatrix} ل_۱ & م_۱ & ن_۱ \\ ل_۲ & م_۲ & ن_۲ \\ ل_۳ & م_۳ & ن_۳ \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۲۵۶۔ اگر کارٹیزی محدودوں میں ایک خط مستقیم کی مساوات
 $1 + 2 + 3 = 0$ ہو تو وہ مقطوع جو خط محوروں پر قطع کرتا ہے
 علی الترتیب۔ $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ ہیں۔ پس اگر ۱ اور ۲ بہت چھوٹے
 ہوں تو خط مبدا سے بہت دور فاصلہ پر واقع ہوگا۔ انتہا میں خط کی سلا
 شکل

$$x + 2 + 3 = 0$$

اختیار کر لگی۔ پس لا انتہا دور اس خط مستقیم کی مساوات جس کو بالعصوم
 لاتنا ہی پر کا خط کہتے ہیں

$$x + 2 + 3 = 0$$

۴۔

جب لاتنا ہی پر کے خط کو دوسرے جملوں کے ساتھ جن میں لا اور
 ۱ ہوں استعمال کرنا پڑتا ہے تو اس کو صرف $1 + 2 + 3 = 0$ لکھتے ہیں۔
 سہ خطی محدودوں میں لاتنا ہی پر کے خط کی مساوات

$$1 + 2 + 3 + 4 = 0$$

ہے۔ کیونکہ اگر کسی نقطہ کے محدود a, b, c کہ جنہوں کو غیر متغیر
 رشتہ سے $k = (1 + 2 + 3 + 4)$ حاصل ہوتا ہے یا

$$\frac{52}{k} = 1 + 2 + 3 + 4$$

پس اگر k لا انتہا بڑا ہو جائے تو انتہا میں رشتہ $1 + 2 + 3 + 4 = 0$
 حاصل ہوتا ہے۔ یہ ایک خطی رشتہ ہے جو محدود مقداروں سے جو کسی
 لا انتہا دور نقطہ کے محدودوں کے متناسب ہوں پورا ہوتا ہے لیکن وہ
 ان محدودوں یا مقداروں سے پورا نہیں ہوتا جو حوالے کے مثلث سے محدود
 فاصلہ پر کے کسی نقطہ کے محدودوں کے متناسب ہوں۔

۲۵۷۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو دے ہوئے خطوط مستقیم متوازی ہوں۔
فرض کرو کہ خطوط کی مساواتیں

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

ہیں۔ اگر یہ خطوط متوازی ہیں تو ان کا نقطہ تقاطع مبداء سے لامتناہی فاصلہ پر ہوگا اور اس لیے اس کے عدد درشتہ

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

کو پورا کریں گے۔

اوپر کی تین مساواتوں سے ع، ب، ج کو سا قط کرنے پر مطلوبہ

مساوات (۳۴۶)

$$= \begin{vmatrix} ل & م & ن \\ ل & م & ن \\ ل & م & ن \end{vmatrix}$$

ماصل ہوتی ہے۔

۲۵۸۔ اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو ایک دے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دے ہوئے خط مستقیم کے متوازی ہو۔

فرض کرو کہ دے ہوئے خط کی مساوات

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

ہے۔ مطلوبہ خط اس خط سے وہاں ملتا ہے جہاں

$$ل + ع + م + ب + ن + ج = ۰$$

(۳۴) اور لا (ل جم طہ + م جم طہ + ن جم طہ) + ما (ل جب طہ + م جب طہ + ن جب طہ)

- ل ع - م ع - ن ع =

ہو جاتی ہیں۔ اس لیے یہ خطوط ایک دوسرے پر عمود ہوں گے اگر

(ل جم طہ + م جم طہ + ن جم طہ) (ل جم طہ + م جم طہ + ن جم طہ)

+ (ل جب طہ + م جب طہ + ن جب طہ) (ل جب طہ + م جب طہ + ن جب طہ)

+ ن جب طہ =

یعنی اگر

ل ل + م م + ن ن + (ل م + ل م) جم (طہ ~ طہ) + (م ن

+ م ن) جم (طہ ~ طہ) + (ن ل + ن ل) جم (طہ ~ طہ) =

لیکن جم (طہ - طہ) = جم ل جم (طہ - طہ) = جم ب

اور جم (طہ - طہ) = جم ج

اس لیے مطلوبہ شرط

ل ل + م م + ن ن - (م ن + م ن) جم ل - (ن ل + ن ل) جم ب

- (ل م + ل م) جم ج =

۴ - اگر خطوط مستقیم مساوات

ع ۲ + و ۲ + ط ۲ + ع ۲ + و ۲ + ج ۲ + و ۲ + ج ۲ =

سے معلوم ہوں تو اوپر کی شرط سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عمود وار ہونیکی شرط

ع ۲ + و ۲ - ط ۲ - ع ۲ - ج ۲ - و ۲ - ج ۲ =

۴۔

۲۶۰۔ ایک دئے ہوئے خط مستقیم سے ایک دئے ہوئے نقطہ کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا۔
فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات

ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰
ہے۔ اس مساوات کو کارٹیزی محدودوں میں بیاں کرنے سے مساوات
لا (ل جم طہ + م جم طہ + ن جم طہ) + ما (ل جب طہ + م جب طہ + ن جب طہ)
ل عہ - م بہ - ن جہ = ۰

حاصل ہوتی ہے۔
اس خط سے کسی نقطہ کا عمودی فاصلہ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ
اس نقطہ کے محدودوں کو مساوات کی دائیں جانب کے جمائیں درج
کر کے لا اور ما کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر المربع سے
تقسیم کیا جائے۔ اس کے بعد اگر اس کو پھر سہ خطی محدودوں میں بیاں
کیا جائے تو نقطہ (ف، گ، ح) سے دئے ہوئے خط پر عمود کا طول
ل ف + م گ + ن ح

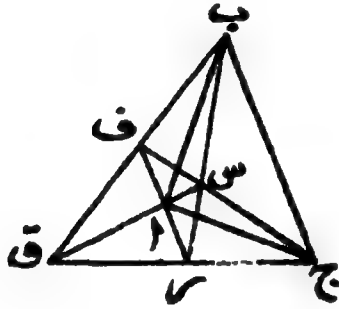
لا (ل جم طہ + م جم طہ + ن جم طہ) + (ل جب طہ + م جب طہ + ن جب طہ)
حاصل ہوگا۔ اس کسر کا نسب نما

ل + م + ن + ۲م ن جم (طہ - طہ) + ۲ن ل جم (طہ - طہ) + ۲ل م جم (طہ - طہ)
یا ل + م + ن + ۲م ن جم ل - ۲ن ل جم ب - ۲ل م جم ج
کا جذر المربع ہے۔
پس عمود کا طول

ل ف + م گ + ن =

ل + م + ن - ۲م ن جم - ۲ن ل جم ب - ۲ل م جم ج

۲۶۱ - ثابت کرو کہ کسی چار نقطوں کے محدود شکل \pm ف \pm گ \pm م میں بیان کئے جاسکتے ہیں -
فرض کرو کہ چار نقطے 'ف'، 'ق'، 'س'، 'س' ہیں -



ان چار نقطوں میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط اور دوسرے دو نقطوں کو ملانے والے خط کے نقطہ تقاطع کو چار زاویوں کا وترقی نقطہ کہتے ہیں - اس طرح تین وترقی نقطے ہوتے ہیں، یعنی 'ا'، 'ب'، 'ج' (شکل) -
فرض کرو کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' کو حوالہ کا مثلث قرار دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ 'ف' کے محدود 'ا'، 'ب'، 'ج' ہیں -

تب 'ا' کی مساوات $\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ج}$ ہوگی -

پنل 'ا'، 'ب'، 'س'، 'ج'، 'ا' موسیقی ہے [دفعہ ۵۹] اور 'ا'،

'ج' کی مساویں ج = .، ب = . ہیں اور 'ا' کی مساوات $\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ج}$ معلوم

ہوئی ہے۔ اس لیے اس کی مساوات $\frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج}$ ہوگی۔ [دفعہ ۵۶]

ج ف کی مساوات $\frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج}$ ہے

اس لیے اس اور ج ف جس نقطہ پر متقاطع ہوتے ہیں وہاں یعنی

$$\frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج}$$

اس لیے اس کے محدود ف، گ، ہ کے متناسب ہیں۔

اسی طرح س کے محدود ف، گ، ہ کے متناسب ہیں۔

اسی طرح ق کے محدود ف، گ، ہ کے متناسب ہیں۔

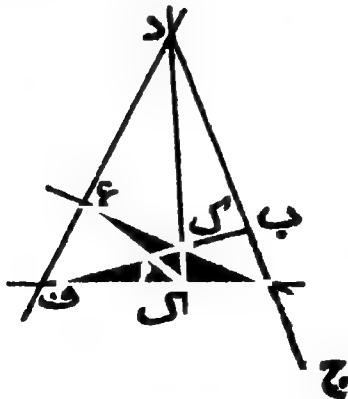
۲۶۲۔ ثابت کرو کہ کسی چار خطوط مستقیم کی مساواتیں

شکل ل ع ہ م ب ہ ن ج ہ = ۰ میں بیان ہو سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ د ع ف، د گ، ع گ، ہ ف، گ ہ چار خطوط

فرض کرو کہ ا ب ج وہ مثلث ہے جو چار ضلعی کے دتروں ف، گ،

ع گ، اور د ہ سے بنا ہے۔ مثلث ا ب ج کو حوالے کا مثلث قرار دو۔



(۳۵۰)

فرض کرو کہ د ع ف کی مساوات ل ع + م + ب + ن جہ = ۰ ہے۔

تب ا د کی مساوات م ب + ن جہ = ۰ ہے۔

چونکہ پلس ا د ' ا ب ' ا ہ ' ا ج موسیقی ہے [دفعہ ۵۹] اور

ا د ' ا ب ' ا ج کی مساواتیں علی الترتیب م ب + ن جہ = ۰، جہ = ۰،

بہ = ۰ ہیں اس لیے ا ہ کی مساوات [دفعہ ۵۶] م ب + ن جہ = ۰ ہے۔

چونکہ ع وہ نقطہ ہے جو بہ = ۰، ل ع + ن جہ = ۰ سے حاصل

ہوتا ہے اور ہ وہ نقطہ ہے جو عہ = ۰، م بہ + ن جہ = ۰ سے حاصل ہوتا

ہے اس لیے ہ ع کی مساوات

ل ع - م بہ + ن جہ = ۰

ہے۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ د گ کی مساوات

ل ع + م بہ + ن جہ = ۰

ہے اور ف ہ کی مساوات

ل ع + م بہ + ن جہ = ۰

ہے۔

مثالیں

۱۔ حوالے کے مثلث کے تین زاویوں کے ناصفوں کی مساواتیں

بہ - جہ = ۰، جہ - عہ = ۰، اور عہ - بہ = ۰ ہوتی ہیں۔

۲۔ حوالے کے مثلث کے خطوط وسطی کی مساواتیں ب بہ - ج جہ = ۰،

ج جہ - ل عہ = ۰، اور ل عہ - ب بہ = ۰ ہوتی ہیں۔

۳۔ اگر حوالے کے مثلث کے ضلعوں کے تقاطع وسطی ا ب ' ج ہوں تو

ب ج ' ج ا ' ا ب کی مساواتیں ب بہ + ج جہ - ل عہ = ۰، ج جہ

+ ل عہ - ب بہ = ۰، اور ل عہ + ب بہ - ج جہ = ۰ ہونگی۔

۴۔ اس خط کی مساوات جو ایک مثلث کے اندرونی اور بیرونی دائروں

مرکزوں کو ملاتا ہے

ع (جم ب۔ جم ج) + ہ (جم ج۔ جم ا) + جہ (جم ا۔ جم ب) = ہوتی ہے۔

۵۔ اُن چار دائروں کے مرکزوں کے محد معلوم کرو جو حوالے کے مثلث کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔ نیز اُن چھ خطوں کے نقاط واسطی کے محد معلوم کرو جو اُن چار مرکزوں کو ملاتے ہیں اور ثابت کرو کہ یہ چھ نقطے سب کے سب مساوی
 $\Delta ب جہ + ب ج ع + ج ع ہ =$

کو پورا کرتے ہیں۔

۶۔ اگر ا و ب و ج و مثلث ا ب ج کے ضلعوں سے (۳۵۱)
 ا ب ج پر ملیں اور اگر ب ج ا ب ج سے ف پر ملے ج ا ب ج ا سے
 ق پر ملے اور ا ب ا ب سے ہ پر ملے تو ثابت کرو کہ ف ق ہ سب ایک
 خط مستقیم ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ ب ق ج س ا ا ایک نقطہ ف پر ملتے ہیں
 ج س ا ف ب ب ایک نقطہ ق پر ملتے ہیں اور ا ف ب ق
 ج ج ایک نقطہ س پر ملتے ہیں۔

۷۔ اگر ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے نقاط واسطی ا ب ج
 ج میں سے خطوط ا ف ب ق ج س ایسے کھینچے جائیں کہ وہ ضلعوں پر
 عمود اور ان کے مساوی ہیں تو ثابت کرو کہ ا ف ب ق ج س ایک
 نقطہ پر ملتے ہیں۔

۸۔ اگر حوالے کے مثلث کے راسوں سے کسی خط مستقیم پر عمود ف
 ق ہ ہوں تو ثابت کرو کہ اس خط مستقیم کی مساوات ا ف ع + ب ق ہ
 + ج ر ج = ہ۔

۹۔ اگر دو مثلث ایسے ہوں کہ متناظر راسوں کو ملانے والے خطوط مستقیم
 ایک نقطہ پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ متناظر ضلعوں کے تین نقاط تقاطع ایک
 خط مستقیم پر واقع ہوں گے۔

[فرض کرو کہ مثلثوں میں سے ایک مثلث (ب ج کے حوالے سے) نقطہ کے محدود ف، گ، ہ ہیں۔ تب دوسرے مثلث (ب ج کے راستے) معدولی الترتیب (ف، گ، ہ) (ف، گ، ہ) اور (ف، گ، ہ) لے جاسکتے ہیں۔ ب ج، ب ج، ب ج کو چھان قطع کرتا ہے وہاں ع = ۰ اور ہ = ۰۔

$$+ \frac{f}{h} = ۰ \text{ اس لیے متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع خط } \frac{f}{h} + \frac{g}{h} = ۰ \text{ پر واقع ہیں۔}$$

۱۰۔ مساواتوں ع جم ل + ب جم ب + ج جم ج = ۰ اور ع ل + ب ب + ج ج = ۰ سے جو خطوط حاصل ہوتے ہیں متوازی ہوتے ہیں۔

۱۱۔ ایک مثلث کے زاویوں کے تین بیرونی ناصف مقابل کے ضلعوں سے تین ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جو ایک خط مستقیم میں ہوتے ہیں اور یہ خط محیط مرکز اور اندرونی مرکز کو ملانے والے خط پر عمود ہوتا ہے۔

۱۲۔ خطوط ل ع ± م ب ± ن ج = ۰ سے جو چار ضلعی بتا ہے اسکے تین وتروں کے نقاط وسطی میں سے گزرنیوالے خط کی مساوات $\frac{l}{e} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c} = ۰$ ہوتی ہے۔

۱۳۔ اگر مثلث (ب ج کا محیط مرکز م، مرکز عمودی و، نقطہ مرکز ن، اور مرکز ہندی ح) ہو تو ثابت کرو کہ خط م و ن گ کی مساوات ع جب ۲ (ج ب - ج) + ب جب ۲ (ج ب - ج) + ج جب ۲ (ج ب - ج) = ۰

۴۔ ۲۶۳۔ سہ خطی محدودوں میں درجہ دوم کی عام مساوات

۶ عہ + و بہ + ط جہ + ۲ ع ب جہ + ۲ و جہ عہ + ۲ ط عہ بہ =
ایک مخروطی کی مساوات ہوگی کیونکہ اگر اس کو کارٹیزی محدود میں بیان
کیا جائے تو درجہ دوم کی مساوات حاصل ہوگی۔
نیر چونکہ مساوات میں پانچ غیر تابع مستقل ہیں اس لیے ان کو
اس طرح متعین کیا جاسکتا ہے کہ مساوات سے تعبیر شدہ منحنی پانچ
دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرے اور اس لیے وہ کسی دئے ہوئے
مخروطی پر منطبق ہوگا۔

۲۶۴۔ مخروطی کے کسی نقطہ پر محاس کی مساوات معلوم کرنا۔
فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$۶ (عہ بہ) = ۶ عہ + و بہ + ط جہ + ۲ ع ب جہ + ۲ و جہ عہ + ۲ ط عہ بہ =$$

ہے اور فرض کرو کہ اس پر دو نقطوں کے محدود (عہ بہ) اور (عہ بہ) جہ
ہیں۔

مساوات

$$۶ (عہ - عہ) (عہ - عہ) + (و - و) (و - و) + (ط - ط) (ط - ط) + (ع ب - ع ب) (ع ب - ع ب) + (و جہ - و جہ) (و جہ - و جہ) + (ط عہ - ط عہ) (ط عہ - ط عہ) + (عہ بہ - عہ بہ) (عہ بہ - عہ بہ) = ۰$$

عہ بہ، عہ میں فی الحقیقت درجہ اول کی مساوات ہے اور اس لیے
وہ کسی خاص خط مستقیم کی مساوات ہے۔

یہ مساوات قیمتوں عہ = عہ بہ = عہ بہ = جہ اور نیز قیمتوں
عہ = عہ بہ = عہ بہ = جہ سے پوری ہوتی ہے۔ اس لیے وہ اس
خط کی مساوات ہے جو نقطوں (عہ بہ، عہ بہ)، (عہ بہ، عہ بہ)، (عہ بہ، عہ بہ) کو ملاتا ہے۔
اب فرض کرو کہ نقطہ (عہ بہ، عہ بہ) نقطہ (عہ بہ، عہ بہ) کی جانب
حرکت کر کے بالآخر اس پر منطبق ہوتا ہے تو (عہ بہ، عہ بہ) پر کے محاس

کی مساوات

$$۶ \text{ عہ عہ} + \text{و یہ یہ} + \text{ط جہ جہ} + \text{ع} (\text{بہ جہ} + \text{جہ یہ}) \\ + \text{و} (\text{جہ عہ} + \text{عہ جہ}) + \text{ط} (\text{عہ یہ} + \text{یہ عہ}) = ۰$$

حاصل ہوتی ہے۔
تفریق انحصار کی ترقیم استعمال کر کے نقطہ (عہ، یہ، جہ) پر کے
ماس کی مساوات کو حسب ذیل شکلوں میں سے کسی ایک میں لکھا
جاسکتا ہے؛

$$\text{عہ} \frac{\text{فر فہ}}{\text{فر عہ}} + \text{بہ} \frac{\text{فر فہ}}{\text{فر جہ}} + \text{جہ} \frac{\text{فر فہ}}{\text{فر جہ}} = ۰$$

$$\text{یا} \quad \text{عہ} \frac{\text{فر فہ}}{\text{فر عہ}} + \text{یہ} \frac{\text{فر فہ}}{\text{فر جہ}} + \text{جہ} \frac{\text{فر فہ}}{\text{فر جہ}} = ۰$$

۲۶۵۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خط مستقیم
ایک مخروطی کو مس کرے۔

فرض کرو کہ دئے ہوئے خط کی مساوات

$$\text{ل عہ} + \text{م بہ} + \text{ن جہ} = ۰ \quad (۱)$$

ہے۔ اس خط اور مخروطی کے نقاط تقاطع کو اس ۱ سے ملانے والے
خطوط مساوات

$$\text{و} (\text{م بہ} + \text{ن جہ}) + \text{و ل} \text{بہ} + \text{ط ل} \text{جہ} + \text{ع ل} \text{بہ جہ} - \text{و ل} \text{جہ} \\ + \text{ط ل} \text{بہ} (\text{م بہ} + \text{ن جہ}) = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر خط (۱) ماس ہے تو اوپر کی مساوات سے حاصل شدہ خطوط
منطبق ہونے چاہئیں جس کے لیے شرط

$$(\text{ع م} + \text{و ل} - \text{ط ل م}) (\text{ع ن} + \text{ط ل} - \text{و ل ن}) \\ - (\text{ع م ن} + \text{و ل} - \text{ع ل م} - \text{ط ن ل}) = ۰$$

۲۶۷۔ مخروطی کے مرکز کے محد معلوم کرنا۔

چونکہ مخروطی کے مرکز کا قطبی لامتناہی فاصلہ پر ہوتا ہے اس لیے اس کی مساوات

۱۔ ع + ب + ج = ۰ (۱)
ہے۔ لیکن [دفعہ ۲۶۶] مرکز کے قطبی کی مساوات

$$ع = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرعہ}} + ب = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرعہ}} + ج = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرعہ}} = ۰$$

ہے جہاں ع، ب، ج، مرکز کے محد ہیں۔
اس لیے مرکز کو معلوم کرنے کے لیے مساواتیں

$$\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرعہ}} = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرعہ}} = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرعہ}}$$

حاصل ہوتی ہیں۔

۲۶۸۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات

تعبیر شدہ منحنی مکانی ہو۔

منحنی کے مرکز کے محد مساواتوں

$$\frac{ع + ب + ج}{ج} = \frac{ط + ع + و}{ب} = \frac{ط + ع + و}{ب} = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

ان میں سے ہر کسر کو۔ لہ کے مساوی رکھو تو

$$ع + ب + ج = ط + ع + و = ۰$$

$$ط + ع + و = ب + ج = ۰$$

$$و + ع + ب = ج = ۰$$

(۳۵۵)

نیز چونکہ مکانی کام کرنا لاتنا ہی پر ہے اس لیے

$$۱. ع. + ب. + ب. + ج. =$$

ان چار مساواتوں سے ع، ب، ج، لہ کو ساقط کرو تو مطلوبہ شرط

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

حاصل ہوتی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ مکانی لاتنا ہی پر کے خط کو مس کرتا ہے (صفحہ ۳۶۵)۔

۲۶۹۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات
تعبیر شدہ منحنی دو خطوط مستقیم ہو سکے۔

مطلوبہ شرط کو حسب دفعہ ۳ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ یہ شرط

$$ع. + ۲. ع. + ۲. ع. - ط. - ۲. ط. - ۲. و. =$$

ہے یا مقطع کی شکل میں

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

۲۷۰۔ مخروطی کے متقارب معلوم کرنا۔

منحنی کی مساوات اور متقاربوں کی مساوات میں صرف ایک
مستقل مقدار کا فرق ہوتا ہے۔

پس اگر منحنی کی مساوات

$$ع. + ۲. و. + ۲. ط. + ۲. ع. + ۲. ج. + ۲. ط. + ۲. ع. =$$

ہے تو متقاربوں کی مساوات

$$ع + و + ط + ج + ۲ + ع + و + ج + ۲ + ط + ع + ب + ل + (۱) =$$

$$+ ب + ب + ج + ج + ۲ =$$

ہے۔

نہ کی قیمت کو خطوط مستقیم کی شرط

$$= \begin{vmatrix} ع + ل + ا & ط + ل + ب & و + ل + ج \\ ط + ل + ب & و + ل + ب & ع + ل + ج \\ و + ل + ج & ع + ل + ج & ط + ل + ج \end{vmatrix}$$

سے متعین کرنا ہوگا۔

وہ رقم جس میں لہ شامل نہیں ہے

(۳۵۶)

$$\begin{vmatrix} ع & ط & و \\ ط & و & ع \\ و & ع & ط \end{vmatrix}$$

ہے۔

لکاسر

$$\begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ط & و & ع \\ و & ع & ط \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ع & ط & و \\ ا & ب & ج \\ ط & و & ع \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ع & ط & و \\ ا & ب & ج \\ ط & و & ع \end{vmatrix}$$

ہے اور یہ

$$\begin{vmatrix} ع & ط & و \\ ا & ب & ج \\ ط & و & ع \end{vmatrix} =$$

لہ اور لہ کے سرورہوں صفر ہیں۔

پس مساوات لہ میں مفروضہ ہے اور اس لیے (۱) سے متقاربوں کی مساوات

ع	ط	و	+ (۱ع + ۲ب + ۳ج + ۴د)	ع	ط	و	+ (۱ع + ۲ب + ۳ج + ۴د)
ط	و	ج		ط	و	ج	
و	ج	د		و	ج	د	
ج	د	ہ		ج	د	ہ	

مائل ہوتی ہے۔

۲۷۱۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ محرومی قائم زائد ہو سکے۔

کارٹیری محدودوں میں تبدیل کرو۔ تب محرومی ایک قائم زائد یا دو محدود اور خطوط مستقیم ہوگا اگر لاء اور ما کے سروں کا مجموعہ صفر ہو۔ پس شرط

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ - ۲ - ۲ - ۲ - ۲ = ۰$$

مائل ہوتی ہے۔

۲۷۲۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جو اے کے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

اگر مثلث (ب ج د) کے حاطد دائرہ کے کسی نقطہ ف سے مثلث

(۲۷۷) کے ضلعوں پر تین عمود ف ل، ف م، ف ن کھینچے جائیں جو ان ضلعوں سے علی الترتیب ل، م، ن پر ہیں تو یہ معلوم ہے کہ یہ تین نقطے ل، م، ن ایک خط مستقیم میں ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ ف کے محدود ع، ہ، ج ہیں۔

مثلثوں م ف ن، ن ف ل، ل ف م کے رقبے

علی الترتیب $\frac{1}{2} \times \text{م ف ن}$ ، $\frac{1}{2} \times \text{ن ف ل}$ ، $\frac{1}{2} \times \text{ل ف م}$ ہیں۔

چونکہ لی 'ن'، ایک خط مستقیم میں ہیں اس لیے ان میں سے ایک مثلث دوسرے دو مثلثوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ اس لیے علامت کا لچا کر کے ہوئے

ب ج جب ا + ج ع جب ب + ع ہ جب ج =

یا ا ب ج + ب ج ع + ج ع ہ =

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال۔ و سے ایک مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں

جو ضلعوں سے د، ع، ف پر ملتے ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر مثلث د ع ف کا رقبہ مستقل ہو تو و کا طریق ایک دائرہ ہے جو مانڈ دائرہ کے ہم مرکز ہے۔

۳۷۲۔ چونکہ درجہ دوم کی رقبے تمام دائروں کی مساواتوں میں وہی ہوتی ہیں اس لیے اگر کسی ایک دائرہ کی مساوات میں = ہو تو کسی دوسرے دائرہ کی مساوات کو شکل

میں + لہ ع + مہ ب + نہ ج =

میں لکھا جاسکتا ہے، یا متجانس شکل

میں + (ل ع + م ب + ن ج) (ل ع + ب ہ + ج ج) =

میں لکھا جاسکتا ہے۔

دائرہ کی عام مساوات کی اس شکل سے یہ واضح ہے کہ لاتناہی پر کا خط تمام دائروں کو ان ہی دو نقطوں (خیالی) پر قطع کرتا ہے جیسا کہ ہم قبل ازیں دیکھ چکے ہیں [دفعہ ۱۹۴]۔

۳۷۴۔ وہ شرطیں معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات سے

تعبیر شدہ منحنی ایک دائرہ ہو سکے۔

حوالے کے مثلث کے مانڈ دائرہ کی مساوات [دفعہ ۲۷۲]

ا ب ج + ب ج ع + ج ع ہ =

ہے۔ اس لیے کسی دوسرے دائرہ کی مساوات [دفعہ ۲۰۲] کی شکل
 $۱ + ج + پ + ج + ع + ع + ل + م + ب + ان + ج + (۱ + ع + ب + ب + ج + ج) = ۰$

ہے۔

(۳۵۸)

اگر یہ وہی منحنی ہو جو

$$۱ + ع + ۲ + ۲ + ۲ + ج + ۲ + ۲ + ج + ع + ۲ + ط + ع + ب = ۰$$

سے تعبیر ہوا ہے تو لہ کی کسی خاص قیمت کے لیے

$$ل = ۱ = ل = ۱، ل = ۱ = م = ب = ل = ط = ل = ج =$$

$$۱ + ع + ۱ + ج + م + ب + ن = ۱ + ۲ + ۲ + ج + ل = اور ۲ + ط + ج + ب + ل + م =$$

حاصل ہوتا چاہئے۔

پس

$$۲ + ج + ع - ج - ۱ - ب + ط = ۲ + ج + ۱ - ۱ - ط - ج + ع = ۱ + ب + ط - ب + ع - ۱ - ۱$$

کیونکہ ان میں سے ہر مقدار $\frac{۱ + ب + ج}{ل}$ کے مساوی ہے۔

۲۰۵۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ درجہ دوم کی عام مساوات
 تعبیر شدہ منحنی ناقص 'مکافی' یا زائد ہو سکے۔

ان خطوں کی مساوات جو اس ج سے منحنی کے لاتنا ہی پر کے

نقطوں تک کھینچے گئے ہوں منحنی کی مساوات اور مساوات $۱ + ع + ب + ب + ج + ج = ۰$ سے جہ کو ساقط کرنے سے معلوم ہوگی۔ اس لیے مخروطی
 کے متقاربوں کے متوازی نقطہ ج میں سے گزرنے والے خطوں کی مساوات
 $۱ + ع + ۱ + ج + ۲ + ط + (۱ + ع + ب + ب) - ۲ + ع + ج + ب + (۱ + ع + ب + ب) =$

$$۲۔ زوج (۱ع + ب بی) + ۲ ط ج ع ب =$$

ہوگی۔

مزدہلی ناقص، مکانی، یا زائد ہوگا بموجب اس کے کہ یہ خطوط
نیالی، منطبق، یا حقیقی ہوں، اور یہ خطوط خیالی، منطبق، یا حقیقی ہونگے
بموجب اس کے کہ

$$(ط اب - ع ا ج - و ب ج + ط ج ا) - (ع ج + ط ا ج - ۲ و ا ج)$$

$$\times (و ج + ط ب ا - ۲ ع ب ج)$$

منفی، صفر، یا مثبت ہو۔ یعنی بموجب اس کے کہ

$$ع ا + و ب + ط ج + ۲ ع ب ج + ۲ و ا ج + ط اب$$

مثبت، صفر، یا منفی ہو۔

۲۷۶۔ ماسوں کے اُس زوج کی مساوات جو کسی نقطہ سے مزدہلی
کے کھینچے گئے ہوں دفعہ ۱۸۸ کے طریقہ سے معلوم کیا جاسکتی ہے، اور کسی وتر
کے سروں پر نئے ماسوں کی مساوات دفعہ ۱۸۹ کے طریقہ سے معلوم
کیا جاسکتی ہے۔

مزدہلی کے مرتب دائرہ کی مساوات کو دفعہ ۱۹۰ کے طریقہ سے
معلوم کیا جاسکتا ہے۔

وہ مساواتیں جن سے ماسکے اور مرتب حاصل ہوتے ہیں
دفعہ ۱۹۴ کے طریقہ سے معلوم کیا جاسکتی ہیں۔

(۲۵۹)

ماسکوں کے لیے مساواتیں حسب ذیل حاصل ہونگی:

$$۴ (ب ا ط + ج ا و - ۲ ب ج ع) ف (ع ب ج) - (ب ج ف - ج ف ب) ف (ج ف ب)$$

$$= ۴ (ج ع ا + ط ا و - ۲ ج ا و) ف (ع ب ج) - (ج ف ب - ج ف ب) ف (ج ف ب)$$

۴ = (اؤ + ب + ع - ۲ + ب ط) ف (ع + ب + ج) - (ا + ف) - ب ف ف (۱)

ان سے ف (ع + ب + ج) کو سا ق کیا جائے تو مخروطی کے محوروں کی مساوات حاصل ہوگی۔

۲۷۷ - مخروطی ع + ا + و + ب + ط ج + ۲ ع + ب + ۲ و ج + ۲ ع + ب =

کے محوروں کے طول معلوم کرنا۔

مخروطی کی ماسی مساوات

ع + و + ط + ۲ ع م ن + ۲ و ن ل + ۲ ط ل م = ... (۱)

ہے۔

اب فرض کرو کہ ماسکوں کا زوج (ع + ب + ج) (ع + ب + ج) ہے اور عمود و، مخروط کا طول ۲ رہے۔ پس اگر ل ع + م + ب + ن ج = مخروطی کا کوئی ماس ہو تو

(ل ع + م + ب + ن ج) (ل ع + م + ب + ن ج) = ۲

ل + م + ن - ۲ م ن جم ا - ۲ ن ل جم ب - ۲ ل م جم ج

پس (ل ع + م + ب + ن ج) (ل ع + م + ب + ن ج) - ۲ (ل + م + ن) =

۲ م ن جم ا - ۲ ن ل جم ب - ۲ ل م جم ج

۲ = (ع + و + ط + ۲ ع م ن + ۲ و ن ل + ۲ ط ل م)

اس تمانکہ میں ل م ن کی بجائے علی الترتیب ا ب ج رکھو تب

۲ = (ع + و + ب + ط ج + ۲ ع ب ج + ۲ و ج ل + ۲ ط ا ب)

(۲) -

اور چونکہ

$$لہ (ع + و + م + + ر) + (ل + م +)$$

(۲۶) خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے اس لیے

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ل + ع + ر & ل ط - ر ج م ج & ل و - ر ج م ب \\ \hline ل ط - ر ج م ج & ل و + ر & ل ع - ر ج م ا \\ \hline ل و - ر ج م ب & ل ع - ر ج م ا & ل ط + ر \\ \hline \end{array}$$

جہاں لہ (۲) سے معلوم ہوتا ہے۔ کیونکہ ر کا سر صریحا صفر ہے۔ اس سے اوپر کی مساوات دو درجہ ہے، کیونکہ ر کا سر صریحا صفر ہے۔ اس سے مخروطی کے محوروں کے مربع معلوم ہوں گے۔

رقبہ محد

۲۷۸۔ کسی نقطہ ف کا محل متعین ہو جائے گا اگر وہ نسبتیں معلوم

ہوں جو مثلث ف ب ج، ف ج ا، اور ف ا ب حوالے کے مثلث ا ب ج کے ساتھ رکھتے ہیں۔ ان نسبتوں کو علی الترتیب لا، ما، ی سے تعبیر کیا جاتا ہے اور ان کو نقطہ ف کے رقبہ محد کہا جاتا ہے۔

کسی نقطہ کے رقبہ محد و رشتہ

$$لا + ما + ی = ا$$

میں مربوط ہوتے ہیں۔

$$\text{چونکہ } لا = \frac{ل}{ع}، ما = \frac{ب}{ج}، اور ی = \frac{ج}{ا} \text{ اس لیے اگر}$$

کوئی متجانس مساوات سہ خطی محدودوں میں دی گئی ہو تو ہم اس مساوات کو عہ، ب، جہ کی بجائے علی الترتیب لا، ما، ی رکھ کر رقبہ محد

سے تعبیر ہوتا ہے وہی ہو جو رقبی محدودوں میں مساوات

$$ل + ا + م + ن + ی + ۲ + ل + م + ی + ۲ + ن + ل + م + ۲ = ۰$$

سے تعبیر ہوتا ہے تو چونکہ $\frac{ل}{۱} = \frac{م}{۲} = \frac{ن}{۳} = \frac{ی}{۴}$ اس لیے ہمیں

حاصل ہونا چاہئے

$$\frac{ل}{۱} = \frac{م}{۲} = \frac{ن}{۳} = \frac{ی}{۴} = \frac{۱}{۱۲}$$

پس اگر سہ خطی مساوات کے سروں میں کوئی رشتہ دیا گیا ہو تو اس کے جواب میں ہم وہ رشتہ معلوم کر سکتے ہیں جو رقبی مساوات کے سروں کے درمیان موجود ہوتا ہے۔

بہت سی صورتوں میں یہ بات کوئی اہمیت نہیں رکھتی کہ آیا مستعمل محدود رقبی ہیں یا سہ خطی لیکن بعض ضابطے ان دو قسم کے محدودوں میں مختلف ہوتے ہیں۔ سب سے زیادہ اہم ضابطے جو رقبی محدودوں میں قابل یادداشت ہیں حسب ذیل ہیں، ان ضابطوں کو سہ خطی محدودوں کے متناظر ضابطوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے یا انہیں بلا واسطہ بھی معلوم کیا جاسکتا ہے:

۱۔ دو خطی مستقیم

$$ل + ا + م + ن + ی = ۰، \text{ اور } ل + م + ن + ی = ۰$$

علی القیاس ہوں گے اگر

$$ل + ا + م + ن + ی + ۲ + ل + م + ن + ی + ۲ + ل + م + ن + ی + ۲ = ۰$$

$$ل + ا + م + ن + ی + ۲ + ل + م + ن + ی + ۲ + ل + م + ن + ی + ۲ = ۰$$

۲۔ وہ خطی مستقیم جو

$$ل + ا + م + ن + ی + ۲ + ل + م + ن + ی + ۲ + ل + م + ن + ی + ۲ = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں علی القوائم ہوں گے اگر

$$ع ۱ + و ب ۱ + ط ج ۱ - ع ۲ + و ب ۲ + ط ج ۲ = ۰$$

$$۳ - نقطہ (لا، ما، ی) کا عمودی فاصلہ خط لہ م ما + ن ی = ۰$$

$$(ل لا، م ما، ن ی) ۵۲$$

$$\sqrt{۳۱۱۱ - ۲۲۲۲} = ۱۱۱۱$$

ہے۔

$$۴ - مخروطی ع ۱ + و ما + ط ی + ع ۲ + و ما + ط ی = ۰$$

قائم زائد ہوگا (بشمول دو عمودی خطوں کی خاص صورت کے) اگر

$$ع ۱ - ع ۲ = ۱۱۱۱$$

۵ - دائرہ کے لیے شرطیں ہیں

$$\frac{۱ + ط - ع ۲}{۱} = \frac{۱ + ط - ع ۱}{۲} = \frac{۱ + ط - ع ۲}{۳}$$

۶ - مخروطی کے مرکز کے محدود

$$\frac{فرق}{فرق} = \frac{فرق}{فرق} = \frac{فرق}{فرق}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

حالت مخروطی

۲۸۱ - اس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو حوالے کے

ثلاث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

مخروطی کی عام مساوات

$$ع ۱ + و ب ۱ + ط ج ۱ + ع ۲ + و ب ۲ + ط ج ۲ = ۰$$

ہے۔ مثلث کے راسوں کے محدود

$$\left(\frac{52}{1}, \frac{52}{2}, \frac{52}{3}\right), \left(\frac{52}{1}, \frac{52}{2}, \frac{52}{3}\right) \text{ اور } \left(\frac{52}{1}, \frac{52}{2}, \frac{52}{3}\right)$$

ہیں۔ اگر یہ نقطے منحنی پر ہیں تو $\frac{52}{1} = \frac{52}{2} = \frac{52}{3}$ اور $\frac{52}{1} = \frac{52}{2} = \frac{52}{3}$ حاصل ہونے چاہئیں اور یہ اندراج کرنے سے ظاہر ہے۔

پس حوالے کے مثلث کے حائل مخروطی کی مساوات

$$\frac{52}{1} = \frac{52}{2} = \frac{52}{3}$$

ہے۔ اس مساوات کو ہم بالعموم

$$\frac{52}{1} = \frac{52}{2} = \frac{52}{3}$$

لکھیں گے۔

(۲۶۲) — اس خط کی مساوات جو دو نقطوں $(\frac{52}{1}, \frac{52}{2}, \frac{52}{3})$ اور $(\frac{52}{1}, \frac{52}{2}, \frac{52}{3})$ کو ملاتا ہے

$$\frac{52}{1} = \frac{52}{2} = \frac{52}{3} \text{ اور } \frac{52}{1} = \frac{52}{2} = \frac{52}{3}$$

ہے۔ لیکن اگر یہ دو نقطے مخروطی

$$\frac{52}{1} = \frac{52}{2} = \frac{52}{3}$$

پر ہوں تو

$$\frac{52}{1} = \frac{52}{2} = \frac{52}{3} \text{ اور } \frac{52}{1} = \frac{52}{2} = \frac{52}{3}$$

اور اس لیے

$$\frac{52}{1} = \frac{52}{2} = \frac{52}{3}$$

اس مساوات کو ہم بالعموم

پس اس وتر کی مساوات جو مخروطی کے دو نقطوں $(\frac{52}{1}, \frac{52}{2}, \frac{52}{3})$ اور $(\frac{52}{1}, \frac{52}{2}, \frac{52}{3})$ کو ملاتا ہے

(عم، ہم، جم) کو ملاتا ہے (۱) سے

$$(۲) \dots\dots\dots '۰ = \frac{ل}{عم} + \frac{م}{ہم} + \frac{ن}{جم} \quad \text{ہے۔}$$

[بلاشبہ یہ واضح ہے کہ خط (۲) دئے ہوئے دو نقطوں میں سے گزرے گا بشرطیکہ یہ نقطے محروطی پر ہوں]

(۲) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ (عم، ہم، جم) پر کے ماس کی

مساوات

$$(۳) \dots\dots\dots '۰ = \frac{ل}{عم} + \frac{م}{ہم} + \frac{ن}{جم} \quad \text{ہے۔}$$

اب ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ خط ل + م + ن جم = ۰ محروطی کو مس کرے۔ کیونکہ اگر یہ خط نقطہ (عم، ہم، جم) پر ماس ہو تو

سے (۳)

$$\frac{ل}{عم} = \frac{م}{ہم} = \frac{ن}{جم}$$

لیکن $\frac{ل}{عم} + \frac{م}{ہم} + \frac{ن}{جم} = ۰$ اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$(۴) \dots\dots\dots '۰ = \overline{ل} + \overline{م} + \overline{ن}$$

اندرونی محروطی

۲۸۳۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو حوالے کے
مثلث کے ضلعوں کو مس کرے۔
مخروطی کی عام مساوات

$$۶ع + د۲ + ط ج۲ + ع۲ ج + ۲ ج + ۲ ج + ۲ ط ع = ۰$$

۲۶۔ یہ مخروطی ع = ۰ کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں

ہیں اگر مخروطی ع = ۰ کو دو منطبق نقطوں پر قطع کرے تو

$$و ط = ع یا ع = و ط$$

اسی طرح اگر مخروطی مثلث کے دوسرے ضلعوں کو بھی مس کرے تو

$$و = ط ع اور ط = و ع$$

پس ع، و، ط کی بجائے علی الترتیب ل، م، نہ آرکھنے سے

ان مساوات

$$ل۶ع + م۲ + ن۲ ج + ل۲ ج + م۲ ج + ن۲ ط ع = ۰$$

$$۰ = ۰$$

حاصل ہوتی ہے۔

اس مساوات میں مبہم علامتوں میں سے یا تو ایک منفی ہونی
چاہئے یا تینوں منفی ہونی چاہئیں، کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو مساوات کا
دائیں جانبی رکن ایک کامل مربع ہو گا اور اس صورت میں مخروطی منطبق
خطوط مستقیم ہو گا۔

مساوات کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-

$$۰ = ل۶ع + م۲ + ن۲ ج + ل۲ ج + م۲ ج + ن۲ ط ع$$

۲۸۴۔ نقطوں (عم، یم، جم) اور (عم، یم، جم) کو ملانے والی خط کی مساوات

ع (یم، جم - یم، جم) + ع (جم، عم - جم، عم) + ج (عم، یم - عم، یم) = ۰ (۱)
ہے۔ لیکن اگر یہ دو نقطے محرومی پر ہوں جس کی مساوات
ہے۔
ع + ا + ا + ا = ۰

ہے تو
ع + ا + ا + ا = ۰
اس لیے

$$\frac{ع}{ا} = \frac{ا}{ا} = \frac{ا}{ا}$$

پس (۱) سے اُس وتر کی مساوات جو محرومی کے نقطوں

(عم، یم، جم)، (عم، یم، جم) کو ملاتا ہے

ع + ا (یم، جم + یم، جم) + ا (جم، عم + جم، عم) = ۰

+ ج (عم، یم + عم، یم) = ۰ (۲)

ہے۔ (۲) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ (عم، یم، جم) پر طاس کی مساوات (۳۵)

$$ع + ا + ا + ا = ۰ \dots \dots (۳)$$

ہے۔

اب ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ خط ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰۔
مخروطی کو مس کر سکے۔ کیونکہ اگر وہ نقطہ (عہ، بہ، جہ) پر تماس ہے تو
(۳) سے

$$ل \text{ لہ عہ } = م \text{ لم بہ } = ن \text{ لن جہ}$$

$$\text{لیکن } ل \text{ لہ عہ } + م \text{ لم بہ } + ن \text{ لن جہ } = ۰$$

اس لیے مطلوبہ شرط

$$\frac{ل}{ل} + \frac{م}{م} + \frac{ن}{ن} = ۰ \dots \dots (۴)$$

ہے۔

دفعہ ۲۸۲ اور دفعہ ۲۸۴ سے یہ معلوم ہوگا کہ خط

$$ل \text{ لہ عہ } + م \text{ لم بہ } + ن \text{ لن جہ } = ۰ \dots \dots (۱)$$

$$\text{حائط مخروطی } \frac{ل}{ل} + \frac{م}{م} + \frac{ن}{ن} = ۰ \dots \dots (۲)$$

کو مس کرتا ہے اگر نقطہ (ل، م، ن) اندرونی دائرہ

$$ل \text{ لہ عہ } + م \text{ لم بہ } + ن \text{ لن جہ } = ۰ \dots \dots (۳)$$

پر ہو۔

نیز خط (۱) اندرونی دائرہ (۳) کو مس کرتا ہے اگر نقطہ (ل، م، ن)

حائط دائرہ (۲) پر ہو۔

وہ مخروطی جو چار دے ہوئے نقطوں میں سے گزریں

۲۸۵۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو چار دے ہوئے

نقطوں میں سے گزرے۔

اگر چار زاویہ کے وتری نقطے حوالے کے مثلث کے اس ہوں تو
چار نقطوں کے محدود \pm ف \pm گ \pm ح سے حاصل ہوتے ہیں [دفعہ

۲۶۱]۔

اگر یہ چار نقطے اس مخروطی پر ہوں جس کی مساوات

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ + ۲ و ح + ۲ و ط + ۲ ح ط = ۰$$

(۳۶۶)

ہے تو ہمیں مساواتیں

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ + ۲ و ح + ۲ و ط + ۲ ح ط = ۰$$

حاصل ہوتی ہیں۔ اس لیے

$$ع = و = ط = ح = ۰$$

اس لیے مخروطی کی مساوات $ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ = ۰$ ہے مع اس

شرط کے کہ $ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ = ۰$

مثال ۱۔ ان تمام مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق معلوم کرو جو چار

دے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو کہ چار نقطے \pm ف \pm گ \pm ح ہیں۔

کسی مخروطی کی مساوات

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ = ۰$$

ہوگی مع اس شرط کے کہ

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ + ح^۲ = ۰ \dots \dots (۱)$$

مخروطی کے مرکوز کے محدود

$$\frac{ع}{۱} = \frac{و}{ب} = \frac{ط}{ج}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اب (۱) میں $ع$ ، $و$ ، $ط$ کی بجائے اندراج کرو تو

مطلوبہ طریق کی مساوات

و ف ۲ بہ جہ + ب گ ۱ جہ عہ + ج ط ۲ عہ بہ = . [دیکھو دفعہ ۲۱۰] حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۳۔ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔ مثال ۳۔ مخروطیوں کے ایک ایسے نظام کے لحاظ سے جو چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطب ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں گے۔

مخروطی جو چار دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرتے ہیں
۲۸۶۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جو چار دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے۔
فرض کرو کہ اس مثلث کو جو چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے حوالے کا مثلث قرار دیا گیا ہے تب [دفعہ ۲۶۲] چار خطوں کی مساوات شکل

$$ل عہ \pm م بہ \pm ن جہ = .$$

کی ہونگی۔
مخروطی

عہ ۲ + و بہ ۲ + ط جہ ۲ + عہ ۲ + جہ ۲ + و جہ ۲ + ط عہ ۲ = (۱)
خط (ل، م، ن) کو مس کریگا اگر ع ل + و م + ط ن + ع م + ن
۲ + و ن ل + ط ل م = .
اس لیے اگر مخروطی چاروں خطوں کو مس کرتا ہے تو ہمیں حاصل ہونا چاہئے

$$ع = و = ط = .$$

$$و ل - ع ع = .$$

یعنی

$$\text{ط}^{\circ} \text{ع}^{\circ} - \text{و}^{\circ} = \text{و}^{\circ} = \text{و}^{\circ}$$

$$\text{ع}^{\circ} \text{و}^{\circ} - \text{ط}^{\circ} \text{ط}^{\circ} = \text{و}^{\circ}$$

$$\text{ع}^{\circ} = \text{و}^{\circ} = \text{ط}^{\circ} = \text{و}^{\circ}$$

اگر ایسا نہیں ہے تو (۱) ایک کامل مربع ہے اور اس لیے مخروطی منطبق
خطوط مستقیم کا ایک زوج ہے۔

پس $\text{ع}^{\circ} = \text{و}^{\circ} = \text{ط}^{\circ}$ حاصل ہونے چاہئیں اور تماس کی شرط

$$\text{ل}^{\circ} \text{و}^{\circ} + \text{م}^{\circ} \text{ط}^{\circ} + \text{ع}^{\circ} \text{ن}^{\circ} = \text{و}^{\circ}$$

ہے۔ اس لیے ہر مخروطی جو چاروں خطوں کو مس کرتا ہے مساوات

$$\text{ع}^{\circ} \text{ع}^{\circ} + \text{و}^{\circ} \text{و}^{\circ} + \text{ط}^{\circ} \text{ط}^{\circ} = \text{و}^{\circ}$$

میں شامل ہے بشرطیکہ $\frac{\text{ل}^{\circ}}{\text{ع}^{\circ}} + \frac{\text{م}^{\circ}}{\text{و}^{\circ}} + \frac{\text{ن}^{\circ}}{\text{ط}^{\circ}} = \text{و}^{\circ}$

مثال ۱۔ ان مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق معلوم کرو جو

چاروں ہوائے خطوط مستقیم کو مس کرتے ہیں۔
کوئی مخروطی مساوات

$$\text{ع}^{\circ} \text{ع}^{\circ} + \text{و}^{\circ} \text{و}^{\circ} + \text{ط}^{\circ} \text{ط}^{\circ} = \text{و}^{\circ}$$

سے حاصل ہوتا ہے بشرطیکہ $\frac{\text{ل}^{\circ}}{\text{ع}^{\circ}} + \frac{\text{م}^{\circ}}{\text{و}^{\circ}} + \frac{\text{ن}^{\circ}}{\text{ط}^{\circ}} = \text{و}^{\circ}$

مخروطی کے مرکز کے محدود

$$\frac{\text{ع}^{\circ} \text{ع}^{\circ}}{\text{ا}^{\circ}} = \frac{\text{و}^{\circ} \text{و}^{\circ}}{\text{ب}^{\circ}} = \frac{\text{ط}^{\circ} \text{ط}^{\circ}}{\text{ج}^{\circ}}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس لیے مرکوزوں کے طریق کی مساوات

$$\text{و}^{\circ} = \frac{\text{ل}^{\circ} \text{ع}^{\circ}}{\text{ا}^{\circ}} + \frac{\text{م}^{\circ} \text{و}^{\circ}}{\text{ب}^{\circ}} + \frac{\text{ن}^{\circ} \text{ط}^{\circ}}{\text{ج}^{\circ}}$$

ہے جو ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

یہ خط مستقیم چار ضلعی کے تین وتروں کے نقاط وسطی میں سے گزرتا ہے۔
[دیکھو دفعہ ۲۱۹]

مثال ۲۔ مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک دے ہوئے خط کے قطب کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے جہاں مخروطیاں ایک ہی چار ضلعی میں کھینچے گئے ہیں۔

مثال ۳۔ مخروطیوں کا ایک نظام چار ثابت خطوں یا مستقیم کو مس کرتا ہے۔ اس نظام کے لحاظ سے ایک دے ہوئے نقطہ کے قطبیوں کا لفظ ایک مخروطی ہوگا۔

مخروطی بحوالہ خود قطبی مثلث

(۳۶۱)

۲۸۷۔ جب مخروطی کی مساوات شکل $ع^۲ + و^۲ + ط^۲ = ۰$ کی ہوتی ہے تو حوائے کے مثلث کا ہر اس مقابل کے ضلع کا قطب ہوتا ہے۔ یہ بڑی آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے اگر ہم مثلث کے کسی راس کے محدودوں کو ($ع^۲$ ، $و^۲$ ، $ط^۲$) کے قطبی کی مساوات

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ = ۰$$

میں درج کریں۔

اس کے بالعکس اگر حوائے کا مثلث خود قطبی ہو تو مخروطی کی مساوات کی شکل $ع^۲ + و^۲ + ط^۲ = ۰$ ہوگی۔ کیونکہ عام مساوات سے تعبیر شدہ

مخروطی کے لحاظ سے $(\frac{\Delta^2}{r}, ۰, ۰)$ کے قطبی کی مساوات

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ = ۰$$

ہے۔ اس لیے اگر Δ کا قطبی B ج ہے تو $ط^۲ = ۰$ ۔ اسی طرح اگر B کا قطبی C ہے تو $و^۲ = ۰$ ۔ پس $ع^۲ = ۰$ ، $ط^۲ = ۰$ سب صفر ہیں۔

۲۸۸۔ اگر دو مخروطی چار حقیقی نقطوں پر متقاطع ہوں اور ان چار

نقطوں سے بنے ہوئے چار زاویوں کے وتری نقطوں کو حوالے کا مثلث قرار دیا جائے تو ان دو مخروطیوں کی مساواتیں [دفعہ ۲۸۵] شکل

$$ع^۲ + و^۲ + ط^۲ = ۰ \text{ اور } ع^۲ + و^۲ + ط^۲ = ۰$$

کی ہونگی۔ پس جیسا کہ ہم دفعہ ۲۱۵ میں دیکھ چکے ہیں کوئی دو مخروطی جو چار حقیقی نقطوں پر متقاطع ہوں ایک مشترک خود قطبی مثلث رکھتے ہیں۔ اگر دو مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع میں سے دو حقیقی اور دوسرے دو خیالی ہوں تو مشترک خود قطبی مثلث کے دو اس خیالی ہوں گے۔ اگر دو مخروطیوں کے چاروں نقاط تقاطع خیالی ہوں تو ایک حقیقی خود قطبی مثلث ہوگا [دیکھو

Ferrer's Trilinears, or

[Solomon's Conic Sections, Art 82]

(۳۶۹)

دو حماس اور ان کا وتر تاس

۲۸۹ — جب اس مثلث کو دو حماسوں اور ان کے وتر تاس بننا ہے حوالے کے مثلث کے طور پر لیا جاتا ہے تو مخروطی کی مساوات شکل

ع^۲ - ۴ک بہ جہ = ۰ (۱)

کی ہوتی ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (۲ک ع، ک ع، ۱) ع کی تمام قیمتوں کے لیے مخروطی پر ہے۔ اور حسب دفعہ ۱۰۷ یا دفعہ ۱۵۵ اس نقطہ کو ہم نقطہ "ع" کہہ سکتے ہیں۔

نقطوں ع، ع، ک کو ملانے والے وتر کی مساوات

۲ک ع	ک ع	ع
۲ک ع	ک ع	ع

ہے، اس لیے پھیلانے اور ع۔ ع سے تقسیم کرنے پر

$$(ع + ع) (ع - ع) = ۲ - ۲ = ۰ \quad (۲) \dots\dots$$

اسلئے 'ع' پر کے محاس کی مساوات

$$ع - ع - ۲ - ۲ = ۰ \quad (۳) \dots\dots\dots$$

ہے۔

اب وہ خطوط جو ج کو ل ع + م + ن ج = ۰ اور ع - م ک ج = ۰ کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں مساوات

$$ن ع + م ک ج = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس لیے وہ شرط کہ ل ع + م + ن ج = ۰ مخروطی کو مس کرے

یہ ہے کہ

$$م ک م ن - م ک ل ا = ۰ \quad (۴) \dots\dots\dots$$

یا ل ع + م + ن ج = ۰ کا مقابلہ ع پر کے محاس کے ساتھ کرنے سے

$$\frac{ل}{ع} = م = - \frac{ن}{ع} \quad \text{اس لیے } ک ل = م ن$$

مثال ۱۔ اگر ایک مثلث کو ایک مخروطی میں بنایا جائے اور اسکے

دو ضلع دئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں تو تیسرا ضلع ایک مخروطی کو لف کرے گا۔
دونقوں کو ملانے والے خط اور اس خط کے بیروں پر کے محاسوں کو
حوالے کے مثلث کے ضلع کو۔

تب مخروطی کی مساوات

$$ع - م ک ج = ۰ \quad (۱) \dots\dots\dots$$

ہوگی اور ثابت نقطوں کو (گ، م،) (گ، م،) لے سکتے ہیں۔
اگر مثلث کے اس مخروطی پر کے نقطے ع، ع، ع، ع، ہوں تو ضلعوں کی
مساواتیں

$$(ع + ع) = ع - ع - ع - ع - ع - ع = ۰$$

$$(ع + ع) = ع - ع - ع - ع - ع - ع = ۰$$

$$اور (ع + ع) = ع - ع - ع - ع - ع - ع = ۰$$

ہونگی۔ چونکہ ان میں سے دو ضلع دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں

$$گ + ع = ع + ع - ع - ع - ع - ع = ۰$$

$$گ + ع = ع + ع - ع - ع - ع - ع = ۰$$

اس لیے باقی ضلع کی مساوات کو

$$(گ + ع) = ع - ع - ع - ع - ع - ع = ۰$$

لکھا جاسکتا ہے جس کا لغاف 'ع کی مختلف قیمتوں کے لیے

$$۱ اک گ گ م م م م م م = (گ م م م م م م م) ع$$

مثال ۲۔ اگر دو مخروطی ایسے ہوں کہ ان کے مشترک

نقطوں میں سے دو نقطوں پر ایک مخروطی کے محاسد دوسرے

مخروطی پر متقاطع ہوتے ہیں تو ثابت کرو کہ دوسرے مخروطی میں

ایسے چار ضلعیوں کی لامتناہی تعداد کمینچی جاسکتی ہے جن کے

ضلع پہلے مخروطی کو مس کریں۔

دو ناموں اور ان کے وترتاس کو حوالے کے مثلث کے ضلع قرار دو۔
تب مخروطیوں کی مساواتوں کو

$$\begin{aligned} \text{میں } ۱ = ۲ - ۳ \text{ ک ج ج } ۰ = ۰ \\ \text{میں } ۱ = ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۰ \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ میں میں کھینچے ہوئے کسی چار ضلعی ف ق س کے
ضلع ف ق ق س اور س میں مخروطی میں کو مس کرتے ہیں اور چار
ضلعی کے راس (عم، عم، عم، عم) وغیرہ ہیں۔ تب یہیں ثابت کرنا ہے کہ
س ف بھی میں کو مس کرتا ہے
اب ف ق ق س س میں س ف کی مساواتیں

$$\frac{ل عم}{عم عم} + \frac{م عم}{عم عم} + \frac{ن عم}{عم عم} = ۰ \text{، وغیرہ}$$

ہیں۔ اب چونکہ ف ق ق س اور س میں مخروطی میں کو مس کرتے

ہیں اس لیے

$$\begin{aligned} \frac{ک ل}{عم عم} = \frac{م ن}{عم عم} ، \frac{ک ل}{عم عم} = \frac{م ن}{عم عم} \text{ اور} \\ \frac{ک ل}{عم عم} = \frac{م ن}{عم عم} \end{aligned}$$

پہلی اور تیسری مساواتوں کے نظیری ارکان کو ضرب دو اور دوسری
مساوات کے نظیری ارکان سے تقسیم کرو تو

$$\frac{ک ل}{عم عم} = \frac{م ن}{عم عم}$$

اور یہ شرط ہے کہ میں ف بھی میں کو مس کرے۔

مثال ۳۔ اگر ایک چار ضلعی ایک مخروطی میں بنایا جائے اور اسکے ضلع دوسرے مخروطی کو مس کریں تو ثابت کرو کہ ایسے چار ضلعیوں کی لاتعداد تعداد کیچی جاسکتی ہے۔

چار ضلعی کے ضلعوں کو $ل$ ، $ع$ ، $م$ ، $ن$ بہ \pm کیا جاسکتا ہے یا نہ $=$ ۔ کیا جاسکتا ہے یا نہ $=$ ۔ $ل$ ، $ع$ ، $م$ ، $ن$ بہ \pm کی بجائے $لا$ ، $ما$ ، $می$ رکھنے سے ان خطوں کی مساواتیں $لا \pm ما \pm می = ۰$ ہو جاتی ہیں۔

مخروطی میں $\equiv لا - ما - می + ۲ ع = ۰$

ان چار خطوں کو مس کریگا اگر $و ط + ۶ ط + ۶ ع = ۰$ (۱) چار ضلعی کے راسوں میں سے چار (۱) اور (۱) \pm ہیں اور کوئی مخروطی جو ان چار نقطوں میں سے گذرے

میں $\equiv لا - ما - می + ۲ ع = ۰$

سے حاصل ہوتا ہے۔

اب خطوط

(۱) $و ط + ۶ ط + ۶ ع = ۰$ (۲) $و ط + ۶ ط + ۶ ع = ۰$

میں اور میں کے نقاط تقاطع میں سے گذرتے ہیں۔

اگر خطوں (۲) میں سے ایک $ما + ک ی = ۰$ ہو اور میں کے لحاظ سے اس کا قطب (۰، $ی$) ہو تو $و ما + ما ط ی ی = ۰$ وہی ہے جو $ما + ک ی$

$= ۰$ ہے اور اس لیے کہ $\frac{ط ی}{و ما}$

اس لیے (۲) سے

(۳) $و ط + ۶ ط + ۶ ع = ۰$ (۳) $و ط + ۶ ط + ۶ ع = ۰$

(۳) سے حاصل شدہ دو نقطے میں $= ۰$ پر ہوں گے اگر (۳) وہی ہو جو

$ما + ک ی - ۲ ع = ۰$ ہے اس لیے شرطیں یہ ہیں کہ

$$(۶+۷) ط^۲ = (۶+ط) و^۲ = ۶ و ط$$

اور یہ شرطیں صریحاً (۱) سے حاصل ہوتی ہیں۔

پس اگر ایک چار ضلعی مخروطی میں $پ$ میں بنایا جائے اور اس کے ضلع مخروطی میں $کو$ مس کریں تو $س$ کے وہ ماس جو $س$ اور $س$ کے تقاطع کے وتروں میں سے دو کے سروں پر کھینچے گئے ہوں $س$ پر ملیں گے۔

اس کے بعد مثال ۲ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $س$ میں ایسے چار ضلعیوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع $س$ کو مس کریں۔ [نیز دیکھو دفعہ ۳۲۴ مثال ۷]

وہ دائرے جن کا تعلق ایک مثلث سے ہوتا ہے

۲۹۰۔ ہم اس دائرہ کی مساوات معلوم کر چکے ہیں جو حوالے کے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو یعنی

$$۱ + \frac{ب}{ج} + \frac{ج}{ب} = ۰$$

اب ہم چند دوسرے دائروں کی مساواتیں معلوم کریں گے جو ایک مثلث سے متعلق ہو گئے ہیں۔

۱۔ ان دائروں کی مساواتیں معلوم کرنا جو حوالے کے

مثلث کے ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔

اگر وہ نقطہ ہو جہاں اندرونی دائرہ ضلع $ب$ ج کو مس کرتا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ

$$د ج = س - ج اور د ب = س - ب$$

اس لیے د کی مساوات

$$(س-ج)ج = (س-ب)ب \quad (۱)$$

ہوگی۔ اب کسی اندرونی مخروطی کی مساوات

$$لا\epsilon + لا\mu + لا\eta = ۰ \quad (۲)$$

ہوتی ہے۔ اس خط کی مساوات جو ا کو ب ج اور مخروطی کے نقطہ تماس سے ملاتا ہے

$$لا\mu + لا\eta = ۰$$

سے حاصل ہوگی۔

پس اگر (۲) اندرونی دائرہ ہے تو (۱) اور (۳) سے

$$\frac{ب(س-ب)}{ج(س-ج)} = \frac{لا\mu}{لا\eta}$$

اسی طرح ج ا پر کے نقطہ تماس پر غور کرنے سے

$$\frac{ج(س-ج)}{ا(س-ا)} = \frac{لا\eta}{لا\epsilon}$$

اس لیے اندرونی دائرہ کی مساوات

$$لا(س-ا)\epsilon + لا(س-ب)\mu + لا(س-ج)\eta = ۰$$

ہے۔ جانبی دائروں کی مساواتیں بھی اسکے مشابہ طریقہ سے معلوم کی جاسکتی ہیں۔

۲۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جس کے لحاظ سے
حوالے کا مثلث خود قطبی ہوتا ہے۔
اُن تمام مخروطیوں کی مساواتیں جن کے لحاظ سے حوالے کا
مثلث خود قطبی ہے شکل
ع ۱ + د ۲ + ط ۳ = ۔

کی ہیں۔ کسی دائرہ کی مساوات کو شکل

۱ ب ج + ب ج ع + ج ع ب + (ل ع + م ب + ن ج) (۱ ع +
+ ب ب + ج ج) = ۔

میں لکھا جاسکتا ہے۔
اگر اوپر کی دو مساواتیں ایک ہی منحنی کو تعبیر کرتی ہیں تو
ع = ل ۱، د = م ب، ط = ن ج،

۱ + م ج + ن ب = ۰، ب + ن ۱ + ل ج = ۰، اور ج + ل ب
+ م ل = ۰۔

اس لیے ل = جم ۱، م = جم ب، ن = جم ج
اس لیے مطلوبہ مساوات

۱ جم ۱ + د ع ۲ + ب جم ب + ج جم ج = ۰۔

ہے۔

۳۔ نو نقطی دائرہ کی مساوات معلوم کرنا

فرض کرو کہ اس دائرہ کی مساوات

۱ ب ج + ب ج ع + ج ع ب + (ل ع + م ب + ن ج) (۱ ع +
+ ب ب + ج ج) = ۔

ہے۔ یہ دائرہ ع = ۰ کو دو ہاں قطع کرتا ہے جہاں ب ب = ج ج

$$۰ = ۱ \text{ ب ج} - ۲ (م ج + ن ب) \text{ پ ج} = ۰$$

$$\frac{۱}{۲ \text{ ب ج}} = \frac{ن}{ج} + \frac{م}{ب}$$

$$\frac{۱}{۲ \text{ ب ج}} = \frac{ل}{ا} + \frac{ن}{ج} \quad \text{اسی طرح}$$

$$\frac{۱}{۲ \text{ ب ج}} = \frac{م}{ب} + \frac{ل}{ا} \quad \text{اور}$$

اس لیے $۱ = ل = جم ا$ $۲ = م = جم ب$ $۲ = ن = جم ج$
اس تینے دائرہ کی مساوات

$$۱ = ۲ + ۲ + ۲ \text{ ب ج} + ۲ \text{ م ج} + ۲ \text{ ن ج} = ۰$$

$$- (جم ا + جم ب + جم ج) (ا + ب + ج) = ۰$$

$$۱ = ۲ + ۲ + ۲ \text{ ب ج} + ۲ \text{ م ج} + ۲ \text{ ن ج} = ۰$$

۰ =

اس مساوات کی شکل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ خطی دائرہ، عاقل
دائرہ اور خود مخروط دائرہ مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں جس کی مساوات
جم ا + جم ب + جم ج = ۰

۰ =

مثالیں

(۳۴۴)

۱۔ ثابت کرو کہ وہ مخروطی جس کی مساوات

$$۱ = ۲ + ۲ + ۲ \text{ ب ج} + ۲ \text{ م ج} + ۲ \text{ ن ج} = ۰$$

۲۔ اگر ایک مثلث کے ضلعوں کو ان کے نقاط وسطی پر مس کرتا ہے۔
اگر ایک مثلث میں ایک مخروطی کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ

کسی نقطہ کی طاقت

فہ (عہ 'بہ 'جہ)

وجب ج + ط جب ا ب - ۲ ع جب ب جب ج

۱۰۔ نقطہ (ف، گ، ہ) میں سے گزرنے والے خطوط (ا، و، ب، و) ج، و، ضلعوں ب ج، ج، ا، ا ب کو علی الترتیب نقطوں ل، م، ن پر قطع کرتے ہیں۔ نیز م، ن، ب ج کو ف پر قطع کرتا ہے، ن، ل، ج ا کو ق پر قطع کرتا ہے اور ل، م، ا ب کو س پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطوط م، ن، ل، م، اور ف، ق، س، دو مخروطیوں

$$\frac{ف}{ف(م-ع)} + \frac{م}{م(ا-ب)} + \frac{ا}{ا(ب-ج)} = ۰$$

$$\frac{ف}{ف(م-ع)} + \frac{م}{م(ا-ب)} + \frac{ا}{ا(ب-ج)} = ۰$$

کو سس کرتے ہیں۔

۱۱۔ دائرہ ا ب ج کے (ا، ب، ج) کے مساوی ضلعوں ب ج، ج، ا، ا ب سے علی الترتیب نقطوں (ا، ب، ج) پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (ا، ب، ج) کے وسطی نقطے حاطہ دائرہ اور نو قطعی دائرہ کے بنیادی محور پر ہیں۔

۱۲۔ ایک مثلث کے گرد ایک مکانی کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ مکانی کے لحاظ سے مثلث کے اندرونی مرکز کا قطبی اس دائرہ کو لف کرتا ہے جو مثلث کے تین جانبی دائروں کے مرکوزوں میں سے گزرتا ہے۔

[کوئی مخروطی لہ بہ جہ + مہ جہ + نہ عہ بہ = ۰ ہے مع اس

شرط کے کہ

$$\sqrt{ا ل ل} + \sqrt{ا ب م} + \sqrt{ا ج ن} = ۰ \dots (۱)$$

(۱'۱'۱) کا قطبی

$$لہ (بہ + جہ) + مہ (جہ + عہ) + نہ (عہ + ہہ) = ۰ \dots (۲)$$

ہے۔

شرط (۱) کے ساتھ (۲) کا لفاف [دفعہ ۲۸۴]

$$= \frac{ج}{بہ + عہ} + \frac{ب}{جہ + عہ} + \frac{۱}{بہ + جہ}$$

[۴]

۲۹۱۔ پیاسکل کا مسئلہ۔ اگر ایک مسدس کو ایک مخروطی میں گھنپا جائے تو متقابلہ ضلعوں کے تین زوجوں کے مین نقاط تقاطع ایک خط مستقیم میں ہونگے۔

فرض کرو کہ مسدس کے راس (ا، ب، ج، د، ع، ہ) ہیں۔ ا، ب، ج کو حوالے کا مثلث قرار دو اور فرض کرو کہ نقطے د، ع، ہ علی الترتیب (عہ، بہ، جہ)، (عہ، بہ، جہ)، (عہ، بہ، جہ) ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$لہ + مہ + نہ = ۰ \dots (۱)$$

ہے۔

ب د اور ا ع کی مساواتیں $\frac{بہ}{جہ} = \frac{مہ}{عہ}$ اور $\frac{جہ}{بہ} = \frac{نہ}{عہ}$ ہونگی۔

$$اس لیے انکے نقطہ تقاطع پر $\frac{عہ}{بہ} = \frac{بہ}{جہ} = \frac{جہ}{بہ} = ۱$$$

اسی طرح ج د اور ا ف نقطہ (۱، ۱) پر ملتے ہیں،

اور ج ع اور ب ح نقطہ (۱، ۱) پر ملتے ہیں۔

یہ تین نقطے ایک خط مستقیم میں ہوں گے اگر

(۳۷)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = 0 \text{ یا اگر } \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

..... (۲)

لیکن چونکہ تین نقطے د، ع، ف، مخروطی (۱) پر ہیں ایسے

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \text{ اور}$$

لہٰذا، نہ کو ساقط کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ شرط (۲) پوری ہوتی

ہے۔ اور اس لئے مسئلہ ثابت ہے۔ [نیز دیکھو دفعہ ۳۲۴ مثال ۲]۔

چونکہ چھ نقطوں کو ترتیب میں ساتھ مختلف طریقوں سے لیا جاسکتا ہے

اس لیے مخروطی پر چھ نقطوں کے جواب میں ساتھ مسدس ہوتے ہیں،

اور چونکہ ان میں سے ہر مسدس کے لیے پیاسکل کا مسئلہ درست ہے

اس لیے مخروطی پر کے چھ نقطوں کے جواب میں ساتھ پیاسکل خطوط

ہوتے ہیں۔
 ۲۹۲۔ اگر ایک مسدس ایک مخروطی کے گرد کھینچا جائے تو اسکے ضلعوں کے نقاط تماس اس مسدس کے راس ہوں گے جو مخروطی میں کھینچا گیا ہو۔ حائط مسدس کا ہر راس اندرونی مسدس کے متناظر ضلع کا قطب ہوگا، اس لیے حائط مسدس کا ایک وتر یعنی وہ خط جو دو متقابلہ راسوں کو ملاتا ہے اس نقطہ کا قطبی ہوگا جو اندرونی مسدس کے دو متقابلہ ضلعوں کا نقطہ تقاطع ہے۔ لیکن اندرونی مسدس کے متقابلہ ضلعوں کے زوجوں کے تین نقاط تقاطع پیا سکاں کے مسئلہ کی رو سے ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں، اس لیے ان کے تین قطبی یعنی حائط مسدس کے تین وتر ایک نقطہ پر ملیں گے۔ اس سے بریان کان (Brianchon) کا مسئلہ ثابت ہوتا ہے جو یہ ہے کہ اگر ایک مسدس کو ایک مخروطی کے گرد کھینچا جائے تو اس کے تین وتر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

(۳۴۰)

۲۹۳۔ اگر ایک مخروطی کے پانچ تماس دے گئے ہوں تو ہم ان کے نقاط تماس کو بریان کان کے مسئلہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ دے ہوئے تماسوں سے جو خمیں بنتا ہے اس کے راس 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع' ہیں۔ تب اگر 'ا' ب کا نقطہ تماس 'ک' ہو تو 'ا'، 'ک'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع' ایک حائط مسدس کے راس ہیں جس کے دو ضلع منطبق ہیں۔ بریان کان کے مسئلہ کی رو سے 'د'، 'ک'، 'ج' اور 'ب' 'ع' کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے، اس طرح 'ک' معلوم ہو جاتا ہے۔ دوسرے نقاط تماس بھی اسی طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں۔ اسی طرح پیا سکاں کے مسئلہ سے ہم پانچ دے ہوئے نقطوں پر کسی مخروطی کے تماس معلوم کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ پانچ

دے ہوئے نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ع' ہیں اور فرض کرو کہ مخروطی پر
 ۱ سے لانا تھا قریب ایک نقطہ 'ف' ہے۔ تب پیا سکاں کے مسئلہ
 سے 'ا' 'ب' اور 'د' 'ع' 'ب' 'ج' اور 'ع' 'ف' 'ج' 'د' اور 'ف' 'ع'
 کے تین نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہونے چاہئیں۔ پس
 اگر 'ا' 'ب' اور 'د' 'ع' 'ب' 'ج' اور 'ع' 'ا' کے نقاط تقاطع کو ملائیو الاخط
 'ج' 'د' سے ۵ پر ملے تو 'ا' 'ہ' 'د' پر کا ماس ہوگا۔ دوسرے ماس
 بھی اسی طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں۔

مکاسی محدود

۲۹۴۔ اگر کسی خط مستقیم کی سہ خلی یا رقبی مساوات کے تین مستقل
 'ل' 'م' 'ن' ہوں تو خط کا محل استعین ہو جائے گا جبکہ 'ل' 'م' اور 'ن'
 دے گئے ہوں۔ اور 'ل' 'م' 'ن' کی قیمتوں کو بدلنے سے مساوات
 کسی خط مستقیم کو تعبیر کر سکے گی۔

مقداروں 'ل' 'م' 'ن' کو جن سے اس طرح ایک خط مستقیم کا محل متعین
 ہوتا ہے خط کے محدود کہتے ہیں۔
 اگر ایک خط مستقیم کی مساوات رقبی محدودوں میں

ل + لا + م + ما + ن ی = ۰
 ہو تو حوالے کے مثلث کے راسوں سے اس خط مستقیم پر عمودوں کے
 (۳۸) طول 'ل' 'م' 'ن' کے متناسب ہوں گے۔ یہ نتیجہ دفعہ ۲۶۰ سے ماخوذ
 ہوتا ہے لیکن ہم اس کا علاحدہ ثبوت دیں گے۔

فرض کرو کہ حوالے کے مثلث کے راسوں 'ا' 'ب' 'ج' سے
 خط مستقیم پر کھینچے ہوئے عمودوں کے طول علی الترتیب 'ف' 'ق' 'ر'
 ہیں۔ فرض کرو کہ خط مستقیم ضلع 'ب' 'ج' کو 'ک' پر قطع کرتا ہے اور
 فرض کرو کہ 'ک' کے محدود (، 'ما'، 'ن'، 'ی') ہیں۔

تب ق: ر = ب: ک: ج: گ = - ی: م
لیکن چونکہ ک خط پر ہے اس لئے م + ن ی = . اور اسلئے

۲۹۵۔ اگر حوالے کے مثلث کے راسوں سے ایک خط مستقیم پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے طولوں کو خط کے محدود کہا جاسکتا ہے۔ اگر ان میں سے کوئی دو عمود مختلف سمتوں میں ہوں تو یہ سمجھنا ہوگا کہ انکی علامتیں مختلف ہیں۔

دفعہ ماسبق سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک خط کی مساوات جبکہ خط کے محدود ف، ق، ر ہوں ف لا + ق ما + ر ی = ہے۔

جب ایک خط مستقیم پر کھینچے ہوئے تین عمودوں میں سے دو کے طول دئے گئے ہوں تو خط کے دو اور صرف دو محل ہوتے ہیں اور اس لیے جب خط کے دو محدود دئے جاتے ہیں تو تیسرے محدود کی قیمت دو مخصوص قیمتوں میں سے ایک ہوتی ہے۔ پس ایک خط کے تین محدودوں میں کوئی خاص متماثلہ رشتہ ہونا چاہئے اور وہ دوسرے درجہ کا ہونا چاہئے۔

۲۹۶۔ وہ متماثلہ رشتہ معلوم کرنا جو کسی خط مستقیم کے تین محدودوں کے درمیان موجود ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ طہ وہ زاویہ ہے جو خط ضلع ب (ا سے بناتا ہے تب ق - ف = ج جب طہ اور ق - ر = ا جب (طہ + ب) - طہ کو ساخط کرنے پر مطلوبہ رشتہ

$$ا(ق - ف) - ۲ا(ج - ب)(ق - ف) + ج(ق - ر) = ۵۴$$

$$\text{یعنی } ۳ق - ۲ا - ۲قربججما = ۵۴$$

حاصل ہوتا ہے۔
اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے [دفعہ ۲۸۰، ۳] کہ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج' سے
خلاف لا + ق + ما + ری = ۰ پر عمودوں کے اصلی طول 'ف'، 'ق'، 'ر'
ہوں تو کسی نقطہ (لا، 'ما'، 'ری') کا عمودی فاصلہ لا + ق + ما + ری
ہوگا۔

۲۹۷۔ اگر خلاف لا + ق + ما + ری = ۰ ایک ثابت نقطہ
(ک، 'گ'، 'ھ') میں سے گزرے تو

ف + ک + ق + گ + ھ = ۰ (۱)
اس لیے ان تمام خطوں کے محدود جو اس نقطہ میں سے گزرتے
ہیں جس کے قریبی محدود (ک، 'گ'، 'ھ') ہیں رشتہ (۱) کو پورا کرتے ہیں۔
اس لیے ایک نقطہ کی مساوات درجہ اول کی ہوتی ہے۔

۲۹۸۔ اگر خط کے محدود کسی رشتہ میں مربوط ہوں تو خط ایک
منحنی کو لف کرے گا اور وہ مساوات جو اس رشتہ کو بیان کرتی ہے
منحنی کی مماسی مساوات کہلاتی ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک مخروطی کی مماسی مساوات درجہ دوم
کی ہوتی ہے اور یہ کہ ہر منحنی جس کی مساوات درجہ دوم کی ہو ایک
مخروطی ہوتا ہے۔ اگر سا (ل، 'م'، 'ن') = ۰ اس مخروطی کی مماسی
مساوات ہو جس کی قریبی مساوات فہ (لا، 'ما'، 'ی') = ۰ ہے اور اگر
مساوات فہ = ۰ کے سرعہ 'و'، ط، 'ع'، و، ط ہوں تو مساوات
سا = ۰ کے متناظر سرعہ 'و'، ط، 'ع'، و، ط ہوں گے جو مقطع

ع	ط	و
ط	و	ع
و	ع	ط

میں علی الترتیب ع، و، ط، ء، د، ط کے صغیر ہیں۔ چونکہ ع، و، ط، ء، د، ط کا مقطع

ع	ط	و
ط	و	ع
و	ع	ط

میں ع، و، ط، ء، و، ط کے صغیروں کے متناسب ہیں اس لئے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر سا (ل، م، ن) = اس مخروطی کی ماسی مساوات ہو جس کی رقبہ مساوات فہ (لا، ما، ی) = ہے تو فہ (ل، م، ن) = اس مخروطی کی ماسی مساوات ہوگی جس کی رقبہ مساوات سا (لا، ما، ی) = ہے۔

۲۹۹۔ کسی ماس کے نقطہ تماس کی مساوات کو دفعہ ۲۳۸ میں استعمال شدہ طریقہ کے مشابہ طریقہ سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ مساوات

$$ف = \frac{فرق}{فرق} + ق \frac{فرق}{فرق} + ر \frac{فرق}{فرق} =$$

$$یا ف = \frac{فرق}{فرق} + ق \frac{فرق}{فرق} + ر \frac{فرق}{فرق} =$$

ہے جہاں فہ (ف، ق، ر) = مخروطی کی مساوات ہے اور ف، ق، ر ماس کے محدود ہیں۔

اگر (ف، ق، ر) منحنی کا ماس نہ ہو تو اوپر کی مساوات (ف، ق، ر) کے قطب کی مساوات ہوگی۔

مرکز، لاتناہی پر کے خط کا قطب ہے اور لاتناہی پر کے خط کے محدود ا، ا، ا ہیں، اس لئے منحنی کے مرکز کی مساوات

$$فرق = \frac{فرق}{فرق} + \frac{فرق}{فرق} + \frac{فرق}{فرق} =$$

۳۰۰۔ اگر ایک مثلث ایک مخروطی میں اور دوسرے مخروطی کے گرد کھینچا جاسکے تو ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے اور ایسے تمام مثلث ایک میسرے ثابت مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہوتے ہیں۔
فرض کرو کہ حوالے کا مثلث 'مخروطی

$$س_۱ = \frac{ل}{عہ} + \frac{م}{بہ} + \frac{ن}{جہ} = ۰$$

میں اور مخروطی

$$س_۲ = \frac{ل}{عہ} + \frac{م}{بہ} + \frac{ن}{جہ} = ۰$$

کے گرد کھینچا گیا ہے۔
اب میں اس کے کسی نقطہ (ا) سے مخروطی میں پ کے دو مماس
'آب'، 'آج'، 'کھینچو اور فرض کرو کہ یہ مماس مخروطی میں 'کوب'، 'ج'
پر مکرر قطع کرتے ہیں۔ تب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ 'ب'، 'ج'، 'مخروطی
میں' کو میسر کرتا ہے۔

فرض کرو کہ 'آب'، 'آج' کے مجدد (عہ، بہ، جہ) وغیرہ ہیں۔ (۳۸۱)
تب خطوط 'آب'، 'آج' مساواتوں

$$۰ = \frac{لہ}{عہ} + \frac{مہ}{بہ} + \frac{نہ}{جہ}$$

$$۰ = \frac{لہ}{عہ} + \frac{مہ}{بہ} + \frac{نہ}{جہ}$$

اور

سے تعبیر ہوتے ہیں۔

چونکہ یہ خطوما میں کو مس کرتے ہیں اسلئے [دفعہ ۲۸۴]

$$\frac{ل}{ر} عم عم + \frac{م}{ر} عم عم + \frac{ن}{ر} عم عم = ۰$$

$$+ \frac{م}{ر} عم عم + \frac{ن}{ر} عم عم = ۰$$

$$\frac{\frac{ل}{ر} عم عم}{عم عم - عم عم} = \frac{\frac{م}{ر} عم عم}{عم عم - عم عم} = \frac{\frac{ن}{ر} عم عم}{عم عم - عم عم}$$

اس لیے ب ج کو

$$\frac{ل}{ر} عم عم + \frac{م}{ر} عم عم + \frac{ن}{ر} عم عم = ۰ \dots \dots (۱)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اور یہ میں کو مس کرتا ہے کیونکہ $\frac{ل}{ر} عم عم + \frac{م}{ر} عم عم$

$$+ \frac{ن}{ر} عم عم = ۰$$

اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ میں میں ایسے مثلثوں کی
لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع میں کو مس
کریں۔

اب ب ج کی مساوات کو شکل

$$(۲) \dots \dots = \frac{ن}{ر} عم عم + \frac{م}{ر} عم عم + \frac{ل}{ر} عم عم$$

میں بھی لکھا جاسکتا ہے اس لیے

$$(3) \dots \frac{\text{نجم، نجم، نجم}}{2} = \frac{\text{م، م، م، م، م}}{2} = \frac{\text{ل، ل، ل، ل، ل، ل، ل}}{2}$$

مغزولی سی = ل عہ + م بہ + ن جہ = .
 کے لحاظ سے نقطہ (عہ، بہ، جہ) کا قبلی

ل عم عه + مریم بہ + ن جہ جہ = .

-4-

یہ وہی خط ہے جو ب ج ہے جس کی مساوات

$$= \frac{\text{عبد جبر}}{\text{جبر جبر}} + \frac{\text{م جبر}}{\text{جبر جبر}} + \frac{\text{ل عبد}}{\text{عبد جبر}}$$

ہے اگر $\frac{ل عم، ع عم}{م} = \frac{م م، ب ا ب م}{ن} = \frac{ن ج م، ج م ج م}{ز}$

یعنی (۲) سے اگر $\frac{L}{N} = \frac{M}{n} = \frac{N}{n}$

پس وہ تمام مثلث جو مخروطی

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

میں اور محرم علی

$$S = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

کے گرد کھینچے گئے ہوں مغرور ملی

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

کے لحاظ سے خود قطبی ہوتے ہیں۔
فرض کرو کہ میں پہ کوئی نقطہ (عہ، بہ، جہ) ہے۔ تب میں کے
لحاظ سے اس کا قطبی

$$\frac{ل}{ر} عہ + \frac{م}{رہ} بہ + \frac{ن}{رہ} جہ = ۰ \dots (۴)$$

ہے۔ وہ شرط کہ (۴) محروطی میں ہر کوئی کرے یہ ہے کہ

$$۰ = \frac{ل}{ر} عہ + \frac{م}{رہ} بہ + \frac{ن}{رہ} جہ$$

$$۰ = \frac{لہ}{رہ} + \frac{مہ}{رہ} + \frac{نہ}{رہ}$$

یعنی جو میں پر کے کسی نقطہ کے لیے درست ہے۔

اس طرح میں اور میں، میں کے لحاظ سے، ایک
دوسرے کے متکافی ہیں۔

مثال۔ اگر ایک مثلث جو میں کے لحاظ سے خود قطبی
ہو محروطی میں کے گرد کھینچا جاسکے تو میں میں ایسے مثلثوں کی
لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو میں کے لحاظ سے خود قطبی

ہوں۔

محروطیوں کی مساواتوں کو

$$میں \equiv عہ + وہ + جہ = ۰$$

$$میں \equiv لہ + مہ + نہ = ۰$$

لیا جاسکتا ہے۔

مزد علی میں، = اور ج = کو ان نقطوں پر مس کرتا ہے جو خط

(1) - - - - - ' = ل + م + ن + ج =

پہ واقعہ میں۔

فرض کرو کہ ایک نقطہ ف جہاں خط (۱) محزوظی سے کو قطع کرتا ہے

(عربی، انگریزی، ہندی)

(۲)..... = ۱م + ۱ن + ۱ع -

اور $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ (۳)

میں کے لحاظ سے (عمر، بی، جی) کا قطبی

$$= (-\text{جہ} + \text{مہ} - \text{لہ}) + (\text{جہ} - \text{مہ} + \text{لہ}) = 0$$

چے یا (۲) کی روت سے $z_1 + z_2 = 0$ (۴)

اب خط (۴) کی رو سے اس کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$

پس اگر ق کا قطبی س کو نقطوں ق، س پر قطع کرے تو یہ نقطے (۳۸۳)

(± عم، 'یر، - جر) ہیں۔

اب میں نے اس کے لحاظ سے ق، س، مزدوج ہیں اگر

$$= ({}_1\text{جہ} - {}_1\text{عہ} - {}_1\text{مہ} - {}_1\text{نہ}) + ({}_1\text{لہ} - {}_1\text{مہ} - {}_1\text{نہ} + {}_1\text{جہ}) + ({}_1\text{لہ} - {}_1\text{عہ} - {}_1\text{مہ} + {}_1\text{جہ}) + ({}_1\text{جہ} + {}_1\text{مہ} + {}_1\text{نہ} + {}_1\text{عہ})$$

اور یہ (۳) سے حاصل ہوتا ہے۔

پس مثلث فن قیصر، میں ہے اور میں کے لحاظ سے

خود قطعی ہے۔

اب دفعہ ۳۰۰ سے یہ مستبظ ہوتا ہے کہ میں میں ایسے مثلثوں کی لاتعداد تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو میں کے لحاظ سے خود قبلی ہوں۔

۳۰۱۔ فرض کرو کہ ایک مخروطی میں پر کوئی چار نقطے (ا، ب، ج، د) ہیں۔ چار زاویے (ا، ب، ج، د) کے وتری مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دو۔ اب چار نقطوں (ا، ب، ج، د) کو (۱±، ۱±، ۱±، ۱±) لیا جاسکتا ہے۔ ان کو ملانے والے خطوں کے تین زوج
 ب^۲۔ ج^۲ = ۰، ج^۲۔ ع^۲ = ۰، ع^۲۔ ب^۲ = ۰۔

ہیں۔ نیز میں کی مساوات شرط ۰ + ۰ + ۰ = ۰ کے ساتھ ع^۲ + ۰ + ۰ = ۰ ہے۔
 پس میں مساواتوں

$$\frac{ب^۲ - ع^۲}{ط} = \frac{ج^۲ - ع^۲}{و} = \frac{ب^۲ - ج^۲}{خ}$$

میں سے کسی ایک سے حاصل ہوتا ہے۔
 اب حسب ذیل تین مخروطیوں پر غور کرو:

$$س \equiv ل (ل ع + م ب + ن ج) - (ب^۲ - ج^۲) | ا = ۰$$

$$س \equiv ل (ل ع + م ب + ن ج) - (ج^۲ - ع^۲) | و = ۰$$

$$س \equiv ل (ل ع + م ب + ن ج) - (ع^۲ - ب^۲) | ط = ۰$$

جہاں ل ع + م ب + ن ج = ۰ کوئی خط مستقیم ہے۔ (۱) سے یہ صاف ظاہر ہے کہ یہ تمام مخروطی میں پر کے اسی چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں، پس میں پر کے اسی چار نقطوں میں سے گزرتے ہوئے تین مخروطیوں کو کھینچنا ممکن ہے انہیں سے ہر مخروطی خطوں کے زوج (ا، ب، ج، د)، (ا، ج، ب، د)، (ا، د، ب، ج) میں سے

ایک کے ساتھ دو ہر اتماں رکھتا ہے، اور وتر تماں کسی دے ہوئے خط ل عہ + م بہ + ن جہ = ۰ پر ہوتے ہیں۔

اگر ل کو ایسا منتخب کیا جائے کہ س کوئی دیا ہوا مخروطی ہو

جو اب، ج د کو ف، ق پر مس کرے تو س، اور س، معلوم ہو جاتے ہیں اور یہ وہ مخروطی ہیں جو س، اور س، کے چار نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں اور علی الترتیب خطوں کے زوجوں (ا ج، ب د)، (ا د، ب ج) کو مس کرتے ہیں، ہر صورت میں ف ق وتر تماں ہے۔

۳۰۲۔ اب فرض کرو کہ مخروطی س میں کھینچے ہوئے دو مثلث ا ب ج، ا ب ج، ا ب ج ایسے ہیں کہ ضلع ا ب، ب ج، ا ب، ب ج، مخروطی س، کو علی الترتیب نقطوں ف، ق، ف، ق پر مس کرتے ہیں۔

(۳۸۴) اب دفعہ ۱۰۳ کی رو سے (ا اور ب ب، س اور س، کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے ایک مخروطی کو مس کریں گے اور نقاط تماں وہ نقطے ہوں گے جہاں ف ف، علی الترتیب (ا، ب ب کو قطع کرتا ہے۔

نیز ب ب اور ج ج، س اور س، کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے ایک مخروطی کو مس کریں گے اور نقاط تماں وہ نقطے ہوں گے جہاں ق ق، علی الترتیب ب ب اور ج ج کو قطع کرتا ہے۔

اب س، کے لحاظ سے ف ق کا قطب ب ہے اور ف ق کا ب۔ اس لئے ب ب، و کا قطبی ہے جہاں و، ف ق اور ف ق کا نقطہ تقاطع ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ ف ف اور ق ق، و

کے قطبی پر ملتے ہیں۔
اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ میں اور میں کے نقاط تقاطع میں
گزرنے والا ایک ہی مخروطی (۱) 'ب' ج 'ج' کو مس کرے گا۔
اب چونکہ (۱) اور ج 'ج' میں اور میں کے نقاط تقاطع میں
سے گزرنے والے مخروطی کو مس کرتے ہیں اس لیے یہ مستطیل ہوتا ہے
کہ ۱ ج اور آ ج بھی نظام کے ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

پس اگر ایک مخروطی میں ایک مثلث کھینچا جائے
اور اس کے دو ضلع ایک مخروطی میں کو مس کریں تو تیسرا ضلع
ایک مخروطی میں کو مس کرے گا، ان تینوں مخروطیوں کے
نقاط تقاطع وہی ہوں گے۔ اگر تیسرا ضلع میں کو اس کے
ایک محل میں مس کرے تو تیسرا ضلع ہمیشہ میں کو مس کرے گا

[دفعہ ۳۰۰]۔

۳۰۳۔ پھر فرض کرو کہ مخروطی میں میں ایک مثلث (۱) ب ج
کھینچا گیا ہے اور فرض کرو کہ (۱) ب مخروطی میں کو مس کرتا ہے اور
ب ج مخروطی میں کو مس کرتا ہے جہاں یہ تینوں مخروطی میں میں
میں اسی چار نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث (۱) ب ج کا دوسرا محل (۱) ب ج ہے اور فرض
کرو کہ ب سے میں کے دوسرے تماس ب لا 'ب' لا ہیں جہاں
نقاط لا 'لا' مخروطی میں پر ہیں۔

تب دفعہ ۳۰۱ سے (۱) اور ب ب دونوں اس چار نقطہ نظام
کے ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں کیونکہ (۱) ب 'ب' مخروطی میں
کو مس کرتے ہیں۔

(۲۰۵) اسی طرح ب ب اور ج ج 'نظام کے ایک مخروطی کوس کرتے ہیں، علیٰ ہذا ب ب اور ج ج بھی۔
چار نقطہ نظام کے صرف دو مخروطی ب، ب کو س کریں گے اور اگر ان کے نقاط تماس ک، ک ہوں تو سمت {ب ک ب ک} موسیقی ہے کیونکہ ک، ک اُس درپچ کے دو ہرے نقطے ہیں جس کا ایک مزدوج زوج ب، ب ہے [دفعہ ۲۱۳ مثال ۵]۔ پس نظام کا صرف ایک مخروطی، ب ب کو ب اور ب کے درمیان ایک نقطہ پس کرے گا لیکن اگر ۱ اور ۲، ب اور ب، ج اور ج، لا اور لا باہم قریب ہوں تو متناظر و تراس ب ب کو ب اور ب کے درمیان قطع کریں گے۔

اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر مثلث ا ب ج کو تبدیل کر کے اس طرح گھمایا جائے کہ وہ محل ا ب ج اختیار کرے اور اس اثناء میں ضلعوں کی سمتوں میں کوئی ایسا نہ ہو تو خطوط ا ب، ب ج، ج ا سب کے سب نظام کے ایک ہی مخروطی کوس کریں گے۔ [یہ ا ب، ب اور لا کے لیے بھی درست ہے]۔ اب چونکہ ا اور ج ج، نظام کے اسی مخروطی کوس کرتے ہیں اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ا ج اور ج ا اس چار نقطہ نظام کے اسی مخروطی کوس کرتے ہیں، اس لیے ا ج کا لاف ایک ثابت مخروطی ہے۔ [اسی طرح لا کا لاف بھی دو سر ثابت مخروطی ہے]۔

پس اگر ا ب ج کو مخروطی س میں اس طرح کھینچا جائے کہ ا ب، مخروطی س میں کوس کرے اور ب ج، مخروطی س میں کوس کرے اور مخروطیوں س، س، س کے نقاط تقاطع ایک ہی ہوں تو ضلع ج ا، اُن ہی چار نقطوں میں سے گزرنیوالے

ایک یا دوسرے ثابت مخروطی کو مس کرے گا۔

۳۰۴۔ اب کثیر ضلعی (ب ج د کی صورت پر غور کرو جو ایک مخروطی میں اس طرح کھینچا گیا ہے کہ اس کے تمام ضلع سوائے ایک کے ایک مخروطی میں کو مس کرتے ہیں۔ چونکہ (ب ج د) ایک مخروطی میں کو مس کرتے ہیں اس لیے (ب ج د) ایک ایسے مخروطی میں کو مس کرتا ہے جو اس اور اس کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے۔ پھر چونکہ (ب ج د) اس چار نقطہ نظام کے مخروطیوں کو مس کرتے ہیں اس لیے (ب ج د) نظام کے دوسرے مخروطی کو مس کرتا ہے، علیٰ ہذا القیاس۔ پس کثیر ضلعی کا باقی ضلع ایک ایسے ثابت مخروطی سے کولف کرے گا جو اس اور اس کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے، اور اگر باقی ضلع مخروطی میں کو اس کے کسی محل میں مس کرے تو وہ ہمیشہ اس کو مس کرے گا۔ کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک مثلث کے لیے (دفعہ ۳۰۰) اور ایک چار ضلعی کے لیے (دفعہ ۲۸۹) مثال (۳) درست ہے، اور جب (ب ج د) کے تمام ضلع میں کو مس کرتے ہیں تو کسی ضلع کو بھی باقی (آزاد) ضلع تصور کیا جاسکتا ہے اور اس اور دوسرے مخروطی سے چار سے زیادہ مشترک مماس نہیں ہو سکتے۔

(۳۱)

یہ اندرونی اور جانٹا کثیر ضلعیوں کا (Corism) ہے یعنی

اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک مخروطی میں اس طرح کھینچا جاسکے کہ اس کے ضلع ایک دوسرے مخروطی کو مس کریں تو ایسے کثیر ضلعی تعداد میں لامتناہی ہوں گے۔ [نیز دیکھو دفعہ ۳۳۰ اور دفعہ ۳۳۱]

مثال ۱۔ ایک نقطہ سے دو دہائے ہوئے مخروطیوں کے مماسوں کے
زوج کھینچے گئے ہیں جو موسیقی طور پر زوج ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق
ایک مخروطی ہے۔
مخروطیوں کے مشترک خود قطبی مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دو اور
فرض کرو کہ ان کی مساواتیں

$$e_1 l_1 + d_1 m_1 + p_1 y_1 = 0 \text{ اور } e_2 l_2 + d_2 m_2 + p_2 y_2 = 0$$

۱۔ نقطہ (ف، گ، ہ) سے پہلے مخروطی کے مماس مساوات
($e_1 l_1 + d_1 m_1 + p_1 y_1$) ($e_2 l_2 + d_2 m_2 + p_2 y_2$) ($e_3 l_3 + d_3 m_3 + p_3 y_3$)
سے حاصل ہوتے ہیں۔
یہ مماس خط $e = 0$ کو ایسے نقطوں پر قطع کرتے ہیں جن کو نقطہ (۱، ۲، ۳)
سے ملایا جائے تو خطوط

$$d_1 (e_1 l_1 + d_1 m_1 + p_1 y_1) - d_2 (e_2 l_2 + d_2 m_2 + p_2 y_2) = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔
اسی طرح دوسرے مخروطی کے لیے

$$d_2 (e_2 l_2 + d_2 m_2 + p_2 y_2) - d_3 (e_3 l_3 + d_3 m_3 + p_3 y_3) = 0$$

چونکہ خطوں کے یہ ازواج موسیقی طور پر مزدوج ہیں اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$d_1 (e_1 l_1 + d_1 m_1 + p_1 y_1) (e_2 l_2 + d_2 m_2 + p_2 y_2) (e_3 l_3 + d_3 m_3 + p_3 y_3) = 0$$

$$d_1 (e_1 l_1 + d_1 m_1 + p_1 y_1) = 0$$

$$ع_۱ (و_۱ ط_۱ + و_۲ ط_۲) + ف_۱ + و_۱ (ط_۱ ع_۱ + ط_۲ ع_۲) + گ_۱ + ط_۱ ط_۲ (ع_۱ و_۲) \\ = ۲ (ع_۱ و_۱ + و_۲ ط_۲) = ۲$$

میں تحویل پذیر ہے۔ پس مطلوبہ طریق مخروطی

$$ع_۱ ع_۲ (ط_۱ ط_۲ + و_۱ و_۲) = لا$$

۴۔

اس مخروطی کو اکثر فا۔ سے تعبیر کیا جائے گا۔

چونکہ ایک نقطہ میں سے گزرنے والے تین منطبق خطوط اور کوئی دوسرا خط ایک موسیقی پنل بناتے ہیں اس لیے مخروطی فادے ہوئے مخروطیوں کے مشترک مماسوں کے آٹھ نقاط تماس میں سے گزرتا ہے، اس کی تصدیق بڑی آسانی سے اس مسامات سے کیجا سکتی ہے جو مخروطی فا کی ہے۔

مثال ۲۔ ایک خط مستقیم دودے ہوئے مخروطیوں کو نقطوں کے ایسے زوجوں میں قطع کرتا ہے جو موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم کا لفاف ایک مخروطی ہے۔ ہم مخروطیوں کی مساداتوں کو

(۳۸۷)

$$ع_۱ لا + و_۱ ما + ط_۱ ی = ۰ \text{ اور } ع_۲ لا + و_۲ ما + ط_۲ ی = ۰$$

لے سکتے ہیں۔

خط لا + ما + ن ی = ۰ پہلے مخروطی کو ان نقطوں پر قطع کرتا ہے جن کو نقطہ (۱، ۰) کے ساتھ ملایا جائے تو خطوط

$$ع_۱ (م + ن ی) + و_۱ (ما + ط_۱ ل) + ی = ۰$$

$$یا (ع_۱ م + و_۱ ل) + ما + ۲ ع_۲ م + ن ما + ی + (ط_۱ ل + ع_۲ ی) = ۰$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اسی طرح دوسرے مخروطی کے لیے خطوط

$$(ع^۱م^۱ + و^۱ل^۱) + ما^۱ + م^۱ن^۱ + (ط^۱ل^۱ + ع^۱ن^۱) + ی^۱ =$$

حاصل ہوں گے۔

چونکہ خطوں کے یہ زوج موسیقی طور پر مزدوج ہیں اس لیے

$$(ع^۱م^۱ + و^۱ل^۱) (ط^۱ل^۱ + ع^۱ن^۱) + (ط^۱ل^۱ + ع^۱ن^۱) (ع^۱م^۱ + و^۱ل^۱)$$

$$= ۲ع^۱م^۱ن^۱$$

$$= (و^۱ط^۱ + و^۱ل^۱) ل^۱ + (ط^۱ع^۱ + ط^۱م^۱) م^۱ + (ع^۱و^۱ + ع^۱ن^۱) ن^۱ =$$

پس ل + لا + م + ما + ن + ی = کالفاں او پیر کی شرط کے ساتھ مخروطی

$$= \frac{ل^۱}{و^۱ط^۱ + و^۱ل^۱} + \frac{م^۱}{ط^۱ع^۱ + ط^۱م^۱} + \frac{ن^۱}{ع^۱و^۱ + ع^۱ن^۱}$$

ہے۔

اس مخروطی کو اکثر فا = سے تعبیر کیا جائے گا۔

چونکہ ایک خط مستقیم پر تین منطبق نقطے اور کوئی دوسرا نقطہ ایک موسیقی سمت بناتے ہیں اس لیے مخروطی فا دے ہوئے مخروطیوں کے مشترک نقطوں پر کے مما سوں کو مس کرتا ہے، اس کی تصدیق اسکی مساوات سے بخوبی ہو سکتی ہے۔

مثال ۳۔ چار دائرے اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ

چار دے ہوئے خطوں میں سے تین تین سے جو چار مثلث بنتے ہیں انہیں سے ہر ایک دائروں میں سے ایک کے لحاظ سے

خود قطبی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر چار ضلعی کے وتروں سے بنے ہوئے مثلث کے گرد ایک دائرہ کھینچا جائے تو یہ دائرہ اور مذکورہ بالا چار دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھینگے۔

دستروں سے بنے ہوئے مثلث کو حوالے کا مثلث قرار دوتے
چار خطوط مستقیم کی مساواتیں $L \pm E \pm M \pm N \pm J = 0$ ہونگی۔ وہ
تمام محرومٹی جن کے لحاظ سے خطوط

ل غـ م بـ ن جـ هـ = ل غـ م بـ ن جـ هـ =

اور لے + م بہ - ن جہ = .

ایک خود قلبی مثلث بناتے ہیں مساوات

ل (ل ع م ب ن ج) + م (ل ع م ب ن ج)

$$+ (n) (l + e + m - n) = \dots (1)$$

میں شامل ہیں۔ اگر یہ مغربی ایک دائرہ ہے تو اس کی مساوات کو شکل

۱ به جه + ب به جه + ج به به + (له به + م به

$$(2) \quad -\frac{6}{7} = (1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots)$$

میں رکھا جاسکتا ہے اور اس کا اور حائط دائرہ کا بنیادی محور لہ عدم بہ

+ ن جہ = ہے۔ (۱) اور (۲) میں عہدہ، اور یہ کے سروں کا

مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{u}{v} = \frac{m}{n} = \frac{l}{o}$$

اس لئے بنیادی محور کی مساوات

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

ہے۔ مریخیا تمام دائروں کے لیے یہ مساوات وہی ہے۔

مثال ۴۔ اُن تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے جو ایک ہی چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

فرض کرو کہ اس مثلث کو جو چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے
حوالے کا مثلث قرار دیا گیا ہے۔ تب چار ضلعی کے ضلعوں کی مساواتیں
لے کر $m \pm n = 0$ ہو گئی۔ [دفعہ ۲۶۲]

مفروضوں میں سے کسی ایک کی سادہ + دبہ + طجہ = ہوگی

[دفعہ ۲۸۶] اُن دو ٹماسوں کی مساوات جو نقطہ (عہ بیہ جہ) سے کہینچے گئے ہوں
 (عہ بیہ جہ + بیہ جہ) (عہ بیہ جہ + بیہ جہ) - (عہ بیہ جہ + بیہ جہ) بیہ جہ

$$+ ط ج ه (ج) = ۰$$

۴۔ وہ شرط کہ یہ خلوط عمود ہوں یہ ہے [دفعہ ۲۵۹] کہ

$$(\frac{r_1}{2}d + \frac{r_2}{2}e)b + (\frac{r_2}{2}e + \frac{r_3}{2}b)d + (\frac{r_3}{2}b + \frac{r_1}{2}d)e$$

۲ + ۲ ط ب جہ جم (۲ ط ع جہ عہ جم ب + ۲ ع و عہ یہ جم ج = ۰
پس مخروطی عہ ۲ + ۲ ط جہ ۲ = ۰ کے مرتب دائرہ کی مساوات

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n-1}$$
$$(1) \therefore = \frac{2.8 \times 10^{-2} + 1 + 1 + 1}{b} +$$

ہوگی لیکن چونکہ محرومی چار خطوں ل ع ± م بہ ± ن ج = کو مس کرتا ہے اسلئے

$$(۲) \dots\dots\dots = \frac{ل^۲}{۶} + \frac{م^۲}{۵} + \frac{ن^۲}{۴}$$

(۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ تمام مرتب دائرے ان نقطوں میں سے گزرتے ہیں جو

$$\frac{ب^۲ + ج^۲ + د^۲ + ح^۲ + ع^۲ + ف^۲}{ل^۲} = \frac{ج^۲ + د^۲ + ع^۲ + ف^۲ + ح^۲ + ب^۲}{م^۲}$$

$$= \frac{ع^۲ + د^۲ + ح^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ف^۲}{ن^۲}$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ [نیز دیکھو دفعہ ۲۴۵ اور ۳۱۲]
مثال ۵۔ ایک مخروطی کی مساوات رقبہ میں دی گئی ہے۔
اگر اس کے لحاظ سے حوالہ کا مثلث خود قطبی ہو تو ثابت کرو کہ اس کے محور مساوی

$$ر^۲ + (ل^۲ با ی + ب^۲ ی لا + ج^۲ لا با) + د^۲ لا با ی = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں اس کے مرکز کے محدود (لا، با، ی) ہیں۔

مخروطی علاء + دما + ط ی = ۰ کا مرکز علاء = دبا = ط ی سے حاصل

ہوتا ہے۔ اس لیے مخروطی کی محاسی مساوات

$$ل^۲ لا + م^۲ با + ن^۲ ی = ۰$$

ہے۔ اس لیے اگر (لا، ما، ی)، (لا، ما، ی)، (لا، ما، ی) ماسکے ہوں تو مضبوط ۲، ۲، ۲

$$د^۲ (ل^۲ لا + م^۲ با + ن^۲ ی) - ر^۲ (ج^۲ لا + د^۲ با + ع^۲ ی) = ۰$$

$$- ۳ م ن ب ج جم (ل^۲ لا + م^۲ با + ن^۲ ی) = ۰$$

اس متماثلہ میں ل = م = ن = ۱ رکھو تب ل = د = ع اور محور

[دفعہ ۲۴۴]

مساوات

$$\begin{vmatrix} \Delta^2 + \frac{\Delta^2}{r} & -\text{ا.ب.جم ج} & -\text{ا.ج.جم ب} \\ -\text{ا.ب.جم ج} & \text{ب.ا.} + \frac{\Delta^2}{r} & -\text{ب.ج.جم ا} \\ -\text{ا.ج.جم ب} & -\text{ب.ج.جم ا} & \text{ج.ا.} + \frac{\Delta^2}{r} \end{vmatrix} = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں جو

$$\Delta^2 \text{ لا.با.ی.} + \text{ر.ج.} \text{ا.با.ی.} + \text{ر.} = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

تیرہویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کو ایک دے ہوئے مثلث میں کھینچا جائے تو اس کا محور اصغر مثلث کے اندرونی دائرہ کے قطر سے متجاوز نہیں ہو سکتا۔

۲۔ ایک مثلث کا رقبہ اس کے راسوں کے سہ خطی محدودوں یا رقبی محدودوں کی رقوم میں معلوم کرو۔

۳۔ اگر چار مخروطی ایک مشترک خود مزدوج مثلث رکھتے ہوں تو کسی دو کے چار نقاط تقاطع اور دوسرے دو کے چار نقاط تقاطع ایک مخروطی پر واقع ہوں گے۔

۴۔ ثابت کرو کہ دو مخروطیوں کے مشترک تماسوں کے آٹھ نقاط تماس ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں۔

۵۔ ثابت کرو کہ دو مخروطیوں کے مشترک نقطوں پر کے آٹھ تماس

ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۶۔ نقطوں کے کوئی تین زوج جو ایک چار ضلعی کے تین تروں کو موسیقی طور پر تقسیم کرتے ہیں ایک مخروطی پر ہوتے ہیں۔

۷۔ دو نقطی دائرہ کی مساوات یہ سمجھ کر معلوم کرو کہ وہ اس مثلث کا حاطہ دائرہ ہے جو خطوں

$$اے - ب - ب - ج - ج = ۰ \quad ب - ب - ج - ج = ۰ \quad ب - ج - ج = ۰$$

$$- ب - ب = ۰$$

ت بنا ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کی مساوات جو $اے - ب - ج + ب - ج - ج = ۰$

کے ہم مرکز ہے اور جس کا نصف قطر رہے

$$اے - ب - ج + ب - ج - ج = ۰ \quad اے - ب - ج + ب - ج - ج = ۰$$

ہے جہاں حوالے کے مثلث کے حاطہ دائرہ کا نصف قطر رہے۔

۹۔ حاطہ مخروطی کے وہ قطر جو حوالے کے مثلث کے ضلعوں کے

(۳۹۰)

متوازی ہیں $اے - ب - ج$ ہیں۔ ثابت کرو کہ اس مخروطی کی مساوات

$$اے - ب - ج + ب - ج - ج = ۰$$

ہے۔

۱۰۔ ایک مخروطی میں کھینچا ہوا مثلث $اے - ب - ج$ ہے اور $اے - ب - ج$

ب $اے - ب - ج$ پر مخروطی کے ماس علی الترتیب $ب - ج - ج$ $ج - اے - اے$ $اے - ب - ب$ ہیں۔

ثابت کرو کہ $اے - ب - ج$ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ

اگر $ب - ج$ اور $ب - ج$ کا نقطہ تقاطع $د$ ہو $ج - اے - اے$ اور $ج - اے - اے$ کا نقطہ تقاطع

$ع$ ہو اور $اے - ب - ج$ کا نقطہ تقاطع $ف$ ہو تو $د - ع - ف$

ایک خط مستقیم میں ہوں گے۔

۱۱۔ ایک مثلث کے راسوں $اے - ب - ج$ سے خطوط مستقیم کھینچے

گئے ہیں جو ایک نقطہ ف میں سے گذرتے ہیں اور مقابل کے ضلعوں سے
(ا) 'ب' 'ج' پر ملتے ہیں۔ نیز 'ب' 'ج' 'ب' 'ج' سے ک پر ملتا ہے۔
'ج' 'ا' سے ل پر ملتا ہے اور 'ا' 'ب' 'ا' 'ب' ت پر ملتا ہے۔
ثابت کرو کہ 'ک' 'ل' ہر ایک خط مستقیم پر ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ (۱) اگر
ف ایک خط مستقیم پر حرکت کرے تو 'ک' 'ل' ہر ایک مخروطی کو جو مثلث
ا ب ج میں کھینچا گیا ہو مس کرے گا، (۲) اگر ف ایک ثابت مخروطی پر
جو مثلث ا ب ج کے گرد کھینچا گیا ہو حرکت کرے تو 'ک' 'ل' ہر ایک
ثابت نقطہ میں سے گذرے گا، (۳) اگر ف ایک ثابت مخروطی پر حرکت
کرے جو مثلث کے دو ضلعوں کو ان نقطوں پر مس کرتا ہے جہاں تیسرا ضلع
ان سے ملتا ہے تو 'ک' 'ل' ہر ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۱۲۔ ایک مثلث کے راسوں (ا) 'ب' 'ج' سے خطوط کھینچے
گئے ہیں جو ایک نقطہ و میں سے گذرتے ہیں اور مقابل کے ضلعوں سے
(ا) 'ب' 'ج' پر ملتے ہیں۔ اسی طرح نقطہ و میں سے گذرتے ہوئے خطوط
مقابل کے ضلعوں سے (ا) 'ب' 'ج' پر ملتے ہیں۔ اگر ب' ج اور ب' ج
کا نقطہ تقاطع ف 'ج' 'ا' اور ج' 'ا' کا نقطہ تقاطع ق 'ا' 'ب' اور ا' 'ب'
کا نقطہ تقاطع س ہو تو ثابت کرو کہ (ا) ف 'ب' ق 'ج' س ہر ایک نقطہ
سے پر ملیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر (ا) 'ب' 'ج' میں سے گذرنے والے
ایک ثابت مخروطی پر و 'و' کوئی دو نقطے ہوں تو نقطہ سے ثابت ہوگا۔

۱۳۔ مکانی $\text{ا ل ا ع} + \text{ا م م ب} + \text{ا ن ج} =$ کا ماسکہ اور مرتب

معلوم کرو۔

۱۴۔ مکانی $\text{ا ل ا ع} + \text{ا م م ب} + \text{ا ن ج} =$ کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک دئے ہوئے چار ضلعی میں مخروطی کھینچے گئے ہیں اور ان
مخروطیوں کے تماس ایک ثابت خط کے متوازی کھینچے گئے ہیں۔ ثابت
کرو کہ ان تماسوں کے نقاط تماس کا طریق ایک کروی ہے۔ نیز چار ضلعی سے

متعلق وہ اہم نقطے معلوم کریں جن میں سے کبھی گزرتا ہے۔

۱۶۔ ایک ناقص کو ایک مثلث میں کھینچا گیا ہے اور ناقص کا مرکز مائط دائرہ کے مرکز پر ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا محور اعظم اور محور اصغر علی الترتیب $س + ف$ اور $س - ف$ ہیں جہاں $س$ مائط دائرہ کا نصف قطر ہے اور $ف$ مرکز اور مرکز عمودی کا درمیانی فاصلہ ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ وہ مخروطی جو ایک مثلث $(ب ج کے گرد کھینچا گیا ہو ناقص ہوگا اگر مرکز مثلث د ع ف کے اندر واقع ہو یا اُن زاویوں کے اندر جو مثلث د ع ف کے زاویوں کے ٹھیک مقابل ہیں جہاں د ع ف مثلث (ب ج کے ضلعوں کے وسطی نقطے ہیں۔$

۱۸۔ ثابت کرو کہ اُن مکافیوں کے ماسکوں کا طریق جن کے لحاظ حوالے کا مثلث خود قطبی ہے نو لقطی دائرہ ہے۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ اُن تمام مخروطیوں کے ماسکوں کا طریق جو چار خطوط $ل ع م$ بہ $ن ج$ = کو مس کرتے ہیں کبھی

$$\frac{ف^۱}{ل ع م + ن ج} + \frac{ف^۲}{ل ع م - ن ج} + \frac{ف^۳}{ل ع م + ن ج} = \frac{ف^۴}{ل ع م - ن ج}$$

ہے جہاں $ف = ل + م + ن$ ، $۲ - ل$ ، $۲ - م$ ، $۲ - ن$ ، $۲ - ل$ ، $۲ - م$ ، $۲ - ن$ کی قیمتیں اس کے مشابہ ہیں۔

۲۰۔ اگر ایک مخروطی کو ایک دے ہوئے مثلث میں کھینچا جائے اور اس کا محور اعظم ثابت نقطہ (ف، گ، ع) میں سے گزرے تو اس کے ماسکے کا طریق کبھی

$$ف ع (۲ - ج) + گ ب (ج - ۲) + ع ج (ج - ۲) = ۰$$

۲۱۔ اگر ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا جائے اور اس کا مرکز ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو اس کے ایک کعبی پر جو مثلث کو حائل کرتا ہے واقع ہونے لگے۔

۲۲۔ اُن قائم زائدوں کے مرکوزوں کا طریق جن کے لحاظ سے حوالے کا مثلث خود مخروط ہو حائل دائرہ ہوگا۔

۲۳۔ اُن تمام قائم زائدوں کے مرکوزوں کا طریق جو حوالے کے مثلث میں کھینچے گئے ہوں خود مخروط دائرہ ہوگا۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کا نو نقطی دائرہ اندرونی دائرہ کو اور ہر جانبی دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۲۵۔ نو نقطی دائرہ کے اُن نقطوں پر کے تماس جہاں وہ اندرونی (۳۹۲) اور جانبی دائروں کو مس کرتا ہے ایک چار ضلعی بناتے ہیں جس کا ہر وتر مثلث کے ایک راس میں سے گزرتا ہے اور وہ خطوط جو ابتدائی مثلث کے راسوں کو وتروں سے بنے ہوئے مثلث کے متناظر راسوں سے ملاتے ہیں سب کے سب نو نقطی دائرہ اور حائل دائرہ کے بنیادی محور کے متوازی ہوتے ہیں۔

۲۶۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' کے قطبی علی الترتیب 'ج' 'ج' 'ا' 'ا' 'ب' ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ا' 'ب' 'ج' 'ج' ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۲۷۔ اگر ایک مساوی الساقی ذریعہ ایک مثلث 'ا' 'ب' 'ج' کے ضلعوں کے نقاط وسطی میں سے گزرے اور ضلعوں 'ج' 'ج' 'ا' 'ا' 'ب' کو کمرے 'ع' 'ب' 'ج' پر قطع کرے تو 'ع' 'ب' 'ج' 'ج' 'ا' 'ا' 'ب' 'ج' کے حائل دائرہ پر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۲۸۔ دو دئے ہوئے مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط مستقیم کے نقطوں کے قطبی معلوم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تمام نقطوں کے تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے جو دئے ہوئے مخروطیوں کے

مشترک خود مزدوج مثلث کو مائل کرتا ہے۔

۳۹۔ دو مخروطی دو ہر اتاس رکھتے ہیں۔ ان میں سے ایک مخروطی کے ماس کھینچے گئے ہیں اور ان ماسوں کے قطب دوسرے مخروطی کے لحاظ سے معلوم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان قطبوں کا طریق ایک مخروطی ہے جو دونوں مخروطیوں کے ساتھ ان کے مشترک نقطوں پر دو ہر اتاس رکھتا ہے۔

۴۰۔ ایک مخروطی میں دو مثلث کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے چھ ضلع دوسرے مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۴۱۔ دو مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہیں۔ ثابت کریں کہ ان کے چھ راس ایک دوسرے مخروطی پر ہیں اور ان کے چھ ضلع ایک تیسرے مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۴۲۔ اگر ایک مثلث ایسا کھینچا جاسکے کہ وہ ایک دے ہوئے مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہو اور اس کے راس دوسرے دے ہوئے مخروطی پر واقع ہوں تو ایسے مثلث تعداد میں لامتناہی کھینچے جاسکتے ہیں۔

۴۳۔ متشابہ مخروطیوں کا ایک نظام ہے جو ایک مشترک خود مزدوج مثلث رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے مرکز جو تھے درجہ کے ایک منحنی پر واقع ہیں جو لامتناہی پر کے دائری نقطوں میں سے گزرتا ہے اور مثلث کے راس اس کے دو ہرے نقطے ہیں۔

۴۴۔ اگر 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ب' 'ج' ایسے نقطے ہوں کہ 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ب' 'ج' ایک نقطہ پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ چھ خطوط مستقیم 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ب' 'ج' 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ب' 'ج' 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ب' 'ج' ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۴۵۔ ایک مثلث میں ایک ایسا مخروطی کھینچا گیا ہے کہ نقاد اتاس پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک منحنی ہے جس کے متقارب مثلث کے ضلعوں پر عمود ہیں۔

(۳۹۳)

کھینچے گئے ہوں اس دائرے سے علی القوائم قطع ہوتے ہیں جس کے لحاظ سے حوالے کا مثلث خود قطبی ہے۔

۴۲۔ وہ دائرے جو ایک کابل چار ضلعی کے وتروں پر ان کو قسماً کر کے کھینچے گئے ہوں اس دائرے سے علی القوائم قطع ہوتے ہیں جو دہلی سے بنے ہوئے مثلث کے گرد کھینچا گیا ہو۔

۴۳۔ اگر تین مخروطی ایک ہی چار ضلعی کو محیط کریں تو ثابت کرو کہ کسی دو کا مشترک تماس تیسرے سے موسیقی طور پر منقطع ہوتا ہے۔

۴۴۔ اگر تین مخروطی ایک ہی چار ضلعی میں کھینچے گئے ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے دو کے ایک مشترک نقطہ پر ان کے تماس اور اس نقطہ سے تیسرے کے تماس ایک موسیقی پنل بناتے ہیں۔

۴۵۔ ایک نقطہ سے دو مساوی دائروں کے تماس کھینچے گئے ہیں جو ایک موسیقی پنل بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک مخروطی ہے جو ایک ناقص ہوگا اگر دائرے حادہ زاویہ پر متقاطع ہوں اور دو متوازی خطوط مستقیم ہوگا اگر دائرے علی القوائم متقاطع ہوں۔

(۳۹۴۱)

۴۶۔ ایک مثلث کے اس ایک دے ہوئے مثلث کے ضلعوں پر ہیں اور اس کے دو ضلع ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرے ضلع ایک مخروطی کو لف کرے گا۔

۴۷۔ اگر ایک مخروطی تین ثابت خطوط مستقیم کو مس کرے اور ایک دے ہوئے نقطہ ف میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ ایک ثابت خط مستقیم کے قطب کا طریق ایک مخروطی ہے جو ف کے تمام محلوں کے لئے تین ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے۔

۴۸۔ ایک مثلث ا ب ج کے اندر دو نقطے و، وے لگے ہیں۔ مثلث کے راسوں اور و، وے میں سے گزرتے ہوئے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو ضلعوں پر علی الترتیب نقطوں کے زوج لا اور کا، ما اور ما، سے اور نئے متعین کرتے ہیں۔ مثلثوں لا ما، کا ما،

کے متناظر ضلع نقطوں 'ف'، 'ق'، 'س' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ چھ نقطے
'لا'، 'ما'، 'اے'، 'لا'، 'ما'، 'اے' ایک مخروطی پر واقع ہیں جس کے لحاظ سے
'ف'، 'ق'، 'س' ایک خود قطبی مثلث ہے۔

۴۹۔ اگر مخروطی $ءلا + وءا + طءی + رءع + مءا + رءلا$

$= رءط + مءلا$ ۔

مثلث 'ا ب ج' کے ضلعوں کو نقطوں کے تین زوجوں میں قطع کرے
اور ان نقطوں کو مقابل کے راسوں سے ملایا جائے تو یہ چھ خطوط مستقیم
مخروطی

$ءءلا + وءا + طءی - رءع + وءط + مءا - رءط + مءلا$

$= رءط + مءلا$ ۔

کو مس کریں گے۔

۵۰۔ بنیادی مثلث کے راسوں سے $(ءءو طء وءط)$ $(لا مءا یء)$ ۔

کے راسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں اور ہر زوج مقابل کے ضلعوں کے
ساتھ نقطوں کا ایک زوج متعین کرتا ہے۔ اس مخروطی کی مساوات معلوم
کرو جس پر یہ چھ نقطے واقع ہیں اور ثابت کرو کہ مخروطی

$\sqrt{لا(ءو طء - ءء)} + \sqrt{مءا(طء وء - وء)} + \sqrt{یء(ءء وء - طء)} =$

اور اوپر کے دو مخروطی ایک مشترک اندرونی چار ضلعی رکھتے ہیں۔

————— (+) —————

چودہواں باب مشکانی قطبی ظل

۳۰۵۔ اگر ایک شکل ایک سُتوی میں متعدد نقطوں اور خطوطِ مستقیم مشتعل ہو اور اگر ہم ایک ثابت مخروطی ج کے لحاظ سے ان نقطوں کے قطبی اور ان خطوں کے قطب لیں تو ایک دوسری شکل حاصل ہوگی جس کو امدادی مخروطی ج کے لحاظ سے اول الذکر کا قطبی مشکانی کہا جائے گا۔

جب ایک شکل کا ایک نقطہ اور مشکانی شکل کا ایک خط امدادی مخروطی ج کے لحاظ سے قطب اور قطبی ہوتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ وہ ایک دوسرے کے متناظر ہیں۔

اگر ایک شکل میں ایک منحنی ہو تو وہ خطوط جو اس کے مختلف نقطوں کے متناظر ہیں سب کے سب کسی منحنی میں کو مس کریں گے۔ فرض کرو کہ اس کے دو نقطوں 'ق' کے متناظر خطوط پر ملتے ہیں تو 'ق' خط 'ق' کا قطب بلحاظ ج ہے یعنی خط 'ق' نقطہ 'ق' کے متناظر ہے۔ اب اگر نقطہ 'ق' 'ق' کی جانب حرکت کر کے بالآخر اس پر منطبق ہو جائے تو اس کے متناظر دو محاسن بھی بالآخر ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اور ان کا نقطہ التقاطع 'ق'

بالآخر منحنی 'من' پر ہوگا اور اس خط کے نقطہ تماس پر منطبق ہوگا جو نقطہ 'ف' کے متناظر ہے۔ پس 'من' کا ایک تماس منحنی 'من' کے ایک نقطہ کے متناظر ہوتا ہے عین ویسے ہی جیسے 'من' کا کوئی تماس 'من' پر کے ایک نقطے کے متناظر ہوتا ہے۔ اس لیے 'من' سے ٹھیک اسی طرح تلوین پاتا ہے جس طرح 'من' سے چنانچہ ہمیں وہی منحنی 'من' حاصل ہوگا خواہ ہم 'من' کے مختلف نقطوں کے قطبیوں کا لغات لیں یا 'من' کے مختلف تماسوں کے قطبیوں کا طریق لیں۔

۳۰۶۔ اگر کوئی خط 'منحنی' 'من' کو متعدد نقطوں 'ف' 'ق' 'ر' پر قطع کرے تو نقطوں 'ف' 'ق' 'ر' کے متناظر 'من' کے تماس حاصل ہوں گے اور یہ تماس سب کے سب ایک نقطے میں سے گذریں گے یعنی اس نقطہ میں سے جو امدادی مخروطی کے لحاظ سے 'ل' کا قطب ہے۔ اس لیے ایک نقطہ میں سے 'من' کے اتنے ہی تماس کھینچے جاسکتے ہیں جتنے نقطے 'من' پر ایک ہی خط مستقیم میں ہوتے ہیں۔ یعنی 'من' کی جماعت (class) دفعہ ۲۳۸) 'من' کے درجہ کے مساوی ہوتی ہے اور 'من' کا درجہ 'من' کی جماعت کے مساوی ہوتا ہے۔ بالخصوص اگر 'من' ایک مخروطی ہو تو وہ دوسرے درجہ کا اور دوسری جماعت کا ہوگا۔ اس لیے متکافی منحنی دوسری جماعت کا اور دوسرے درجہ کا ہوگا اور اس لیے وہ بھی ایک مخروطی ہے۔

۳۰۷۔ ایک مخروطی کا قطبی متکافی دوسرے مخروطی کے

لحاظ سے معلوم کرنا۔
فرض کرو کہ ان مخروطیوں کی مساواتیں ان کے مشترک خود قطبی مثلث کے حوالے سے

$$من \equiv ع^۲ + د^۲ + ط^۲ = ۰$$

اور
$$س_۲ \equiv ع_۲ + و_۲ + ج_۲ = ۰$$

ہیں۔ $س_۲$ پر کے کسی نقطہ (ع، و، ج) کا قطبی لمحاظ $س_۲$ کے
 $ع_۲ + و_۲ + ج_۲ = ۰$

ہے۔ اس کا لغاف شرط $ع_۲ + و_۲ + ج_۲ = ۰$ کے ساتھ

$$= \frac{ع_۲}{ع_۱} + \frac{و_۲}{و_۱} + \frac{ج_۲}{ج_۱}$$

ہے۔ مخروطی ل، و، ج، ن کے لحاظ سے $س_۲$ کا
 شکافی

$$= \frac{ع_۲}{ع_۱} + \frac{و_۲}{و_۱} + \frac{ج_۲}{ج_۱}$$

ہے۔ یہ مساوات مخروطی $س_۲$ کو تعبیر کرے گی اگر

$$\frac{ع_۲}{ع_۱} = \frac{و_۲}{و_۱} = \frac{ج_۲}{ج_۱}$$

پس مخروطی $س_۲$ اور $س_۱$ مخروطیوں

$$ع_۲ \pm و_۲ + ج_۲ = ۰$$

میں سے کسی ایک کے لحاظ سے ایک دوسرے کے شکافی ہیں۔
 ۳۰۸۔ کسی دے ہوئے مسئلہ سے جو نقطوں اور خطوں کے محلوں
 متعلق ہو ایک دوسرا مسئلہ شکافی قطبیوں کے طریقہ سے ماخوذ کیا

جاسکتا ہے جس میں نقطوں کی بجائے خطوط مستقیم اور خطوط مستقیم کی بجائے نقطے ہوں گے۔

متناظر کی سادہ ترین صورتیں حسب ذیل ہیں:

(۱) ایک شکل کے نقطے مکانی شکل میں خطوط مستقیم میں مکانی ہوتے ہیں۔

(۲) دو نقطوں کو ملانے والا خط، متناظر خطوں کے نقطہ تقاطع میں مکانی ہوتا ہے۔

(۳) کسی منحنی کا مماس، مکانی شکل کے متناظر منحنی پر ایک نقطہ میں مکانی ہوتا ہے۔

(۴) مماس کا نقطہ مماس، متناظر نقطہ پر کے مماس میں مکانی ہوتا ہے۔

(۵) اگر دو منحنی مس کریں یعنی اگر دو منطبق نقطے مشترک ہوں تو مکانی منحنیوں میں دو منطبق مماس مشترک ہوں گے اور اس لیے وہ (مکانی منحنی) ایک دوسرے کو مس کریں گے۔

(۶) وہ وتر جو ایک منحنی کے دو نقطوں کو ملاتا ہے مکانی منحنی کے متناظر مماسوں کے نقطہ تقاطع میں مکانی ہوتا ہے۔

(۷) وہ خط جو دو مماسوں کے نقطہ تقاطع کو ملاتا ہے متناظر نقطوں پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع میں مکانی ہوتا ہے۔

(۸) چونکہ امدادی مخروطی کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط کا قطب لائن ہی پر ہوتا ہے اس لیے مکانی منحنی پر لائن ہی پر کے نقطے ابتدائی منحنی کے ان مماسوں کے متناظر ہوں گے جو امدادی مخروطی کے مرکز سے کھینچے گئے ہوں۔ پس ایک

مخروطی کا مکانی قطع زائد، مکانی، یا ناقص ہوگا۔ بموجب اسکے کہ امدادی مخروطی سے اس کے مماس حقیقی، منطبق، یا خیالی ہوں یعنی بموجب اسکے کہ امدادی مخروطی کا مرکز منحنی کے

باہر، یا اس پر، یا اس کے اندر ہو۔

حسب ذیل مثالیں تکافی مسلوں کی ہیں:-

(۱) اگر دو مثلثوں کے راس ایک مخروطی پر ہوں تو ان کے چھ ضلع دوسرے مخروطی پر ہوں گے۔
(۱) اگر دو مثلثوں کے راس ایک مخروطی پر ہوں تو ان کے چھ ضلع دوسرے مخروطی پر ہوں گے۔

(۲) اگر ایک مخروطی میں ایک مسدس کھینچا جائے تو اس کے متقابلہ راسوں کو ملانے والے تین خطوط ایک نقطہ پر ملینگے۔
(۲) اگر ایک مخروطی میں ایک مسدس کھینچا جائے تو اس کے متقابلہ راسوں کو ملانے والے تین خطوط ایک نقطہ پر ملینگے۔

(برایانکوں کا مسئلہ)

(برایانکوں کا مسئلہ)

(۳) اگر ایک مثلث کے تین راس ایک مخروطی پر واقع ہوں اور اس کے ضلعوں میں سے دو ایک دوسرے مخروطی کو مس کریں تو تیسرے مخروطی پر واقع ہوں تو تیسرے راس کا طریق ایک مخروطی ہوگا۔
(۳) اگر ایک مثلث کے تین راس ایک مخروطی پر واقع ہوں اور اس کے ضلعوں میں سے دو ایک دوسرے مخروطی کو مس کریں تو تیسرے مخروطی پر واقع ہوں تو تیسرے راس کا طریق ایک مخروطی ہوگا۔

(۴) اگر ایک مثلث کے راس ایک مخروطی پر واقع ہوں تو وہ تین نقاط تقاطع جو ایک ضلع اور متقابلہ راس پر کے تماس کے تقاطع سے
(۴) اگر ایک مثلث کے ضلع ایک مخروطی کو مس کریں تو وہ تین خطوط جو ایک ایک راس کو متقابلہ کے ضلع کے

نقطہ تماس سے ملاتے ہیں
ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔
(۵) چار دئے ہوئے نقطوں
میں سے گزرنے والے
مخروطیوں کے ایک
نظام کے لحاظ سے ایک
دئے ہوئے نقطہ کے قطبی
سب کے سب ایک ثابت
نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔
(۶) چار ثابت نقطوں میں سے
گزرنے والے مخروطیوں
کے ایک نظام کے لحاظ
سے ایک دئے ہوئے
خط مستقیم کے قطب کا
مطلق ایک مخروطی ہوتا
ہے۔

ماصل ہوتے ہیں ایک خط واقع
ہوتے ہیں۔
(۵) چار دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس
کرنے والے مخروطیوں کے
ایک نظام کے لحاظ سے ایک
دئے ہوئے خط مستقیم کے قطب
سب کے سب ایک خط مستقیم
پر واقع ہوتے ہیں۔

(۶) چار ثابت خطوں کو مس کرنیوالے
مخروطیوں کے ایک نظام کے
لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ
کے قطبی کا لفاف ایک مخروطی
ہوتا ہے۔

۳۰۹۔ اب ہم ان نتیجوں پر غور کریں گے جو ایک دائرہ کے
لحاظ سے مکافات کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔
ہم جانتے ہیں کہ ایک دائرہ کے مرکز اور کسی نقطہ F کو
ملانے والا خط دائرہ کے لحاظ سے F کے قطبی پر عمود ہوتا ہے۔
اس لیے اگر F یا Q کوئی دو نقطے ہوں اور ایک دائرہ کے
لحاظ سے ان کے قطبی معلوم کئے جائیں تو ان قطبیوں کا درمیانی
زاویہ اس زاویہ کے مساوی ہوگا جو F یا Q کے محاذی دائرہ کے
مرکز پر بنتا ہے۔ اس مسئلہ کا شکافی یہ ہے کہ کسی دو خطوط مستقیم کا
درمیانی زاویہ اس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ان خطوط کے

قطبوں کو ملانے والے خط کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔
نیز ہم جانتے ہیں کہ ایک دائرہ کے مرکز سے کسی نقطہ کے اور
اُس کے قطبی (دائرہ کے لحاظ سے) کے فاصلے ایک دوسرے کے
بالعکس متناسب ہوتے ہیں۔

۳۱۰۔ اگر ہم ایک دائرہ کے لحاظ سے مکافات کریں تو یہ واضح
ہے کہ امدادی دائرہ کے نصف قطر میں کسی تبدیلی سے متکافی منحنی کی
تشکیلیہ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی بلکہ صرف اس کے جثہ میں تبدیلی
ہوگی۔ اب چونکہ متکافی منحنی کے خطوط کی مطلق مقداروں سے بالعموم
واسطہ نہیں رہتا اس لیے صرف امدادی دائرہ کے مرکز کو معلوم کرینکی
ضرورت ہوگی۔ اس لیے یہ کہنے کی بجائے کہ ایک دائرہ کے لحاظ
سے جس کا مرکز وہ ہے مکافات کی گئی ہے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ایک
نقطہ کے لحاظ سے مکافات کی گئی ہے۔

۳۱۱۔ اگر کسی مخروطی کو ایک نقطہ کے لحاظ سے متکافی کیا جائے
تو متکافی منحنی کے وہ نقطے جو ابتدائی منحنی کے ان ماسوں کے متناظر
ہیں جو وہیں سے گزرتے ہیں لامتناہی فاصلہ پر ہونے چاہیں اس لیے
متکافی منحنی پر کے ان نقطوں کی سمتیں جو لامتناہی پڑیں ان ماسوں
پر عمود ہیں جو وہ ابتدائی منحنی کے کھینچے گئے ہیں۔ اور

اس لیے متکافی منحنی کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ
کا متعم ہو تا ہے جو وہیں کھینچے ہوئے ابتدائی منحنی کے ماسوں کے درمیانی
بالخصوص اگر وہ ابتدائی منحنی کے حماس علی القوائم ہوں تو
متکافی منحنی قائم زاویہ ہوگا۔ نیز متکافی مخروطی کے محور اُس کے متقاربوں کے
درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔ اس لیے محور اُن زاویوں کے

تاصفوں کے متوازی ہیں جو و سے کھینچے ہوئے ابتدائی منحنی کے مماسوں کے درمیان ہیں۔

ابتدائی محروطی کے لاتناہی پر کے نقطوں کے جواب میں شکافی منحنی کے وہ مماس حاصل ہوتے ہیں جو مبدا میں سے گزرتے ہیں۔ پس متکافی محروطی کے وہ مماس جو مبدا سے کھینچے گئے ہوں ان خطوں کی سمتوں پر عمود ہوں گے جو مبدا سے ابتدائی منحنی کے لاتناہی پر کے نقطوں کی جانب کھینچے گئے ہوں۔ اسلئے ابتدائی محروطی کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کا متمم ہوتا ہے جو مبدا سے کھینچے ہوئے شکافی منحنی کے مماسوں کے درمیان ہے۔

بالخصوص اگر ایک قائم زاؤ کو کسی نقطہ و کے لحاظ سے شکافی کیا جائے تو و سے شکافی منحنی کے مماس ایک دوسرے کے علی التمام ہوں گے، یہ الفاظ دیگر و، شکافی محروطی کے مرتب دائرہ پر ایک نقطہ ہے۔

۳۱۲۔ مبدا کا شکافی، لاتناہی پر کا خط ہوتا ہے اور اس لیے مبدا کے قطبی کا شکافی، لاتناہی پر کے خط کا قطب ہے۔ یعنی مبدا کا قطبی شکافی منحنی کے مرکز میں شکافی ہوتا ہے۔

مکانات کی حسب ذیل مثالیں اہم ہیں:

- ۱۔ وہ تمام محروطی جو ایک مثلث کو محیط کرتے ہیں اور اس کے مرکز عمودی میں سے گزرتے ہیں قائم زاؤ ہوتے ہیں۔ اگر مرکز عمودی و کے لحاظ سے مکانات کی جائے تو ایک (۴۰۰)

دوسرا مثلث مائل ہوگا جس کا مرکز عمودی ہوگا۔
 قائم زائد مکانی ہو جائیں گے کیونکہ وہ سب و میں سے گذرتے
 ہیں۔ اور چونکہ ان مخروطیوں میں سے کسی ایک کے لاتنا ہی پر کے
 نقطے عمودی سمتوں میں ہوتے ہیں اس لیے ان مکافیوں میں سے
 کسی ایک کے وہ ماس جو دسے کھینچے گئے ہوں علی القواہم ہوں گے
 اور اس لیے نقطہ و ہر مکانی کے مرتب پر ہے۔
 پس مکانی مسئلہ حسب ذیل ہے:

ان تمام مکافیوں کے مرتب جو ایک مثلث کے تین ضلعوں
 کو مس کرتے ہیں مثلث کے مرکز عمودی میں سے گذرتے ہیں۔
 ۲۔ اگر چار دے ہوئے نقطوں میں سے گذر نیوالے
 مخروطیوں میں سے دو قائم زائد ہوں تو یہ تمام مخروطی قائم زائد
 ہوں گے۔

اگر اس مسئلہ کی مکافات کسی نقطہ و کے لحاظ سے کیجائے تو
 حسب ذیل مسئلہ مائل ہوگا:

اگر چار دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرنے والے
 مخروطیوں میں سے دو کے مرتب دائرے ایک نقطہ و
 میں سے گذریں تو ان تمام مخروطیوں کے مرتب دائرے و میں
 سے گذریں گے۔

یعنی چار دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرنے والے

$$\frac{ک}{ر} = 1 + \frac{ج}{ر} \text{ جم طہ}$$

ہے۔ یہ ایک مخروطی کی مساوات ہے جس کا ماسکہ و نیم درخت

$\frac{ک}{ر}$ ، اور خروج مرکز $\frac{ج}{ر}$ ہے۔ اس مخروطی کا مرتب وہ خط ہے جس کی مساوات

$$\frac{ک}{ر} = ج \text{ جم طہ یا لا} = \frac{ک}{ج}$$

ہے۔

پس متکافی منحنی کا مرتب ابتدائی منحنی کے مرکز کا قطبی ہے۔

خروج مرکز کی محصلہ بالا قیمت سے یہ واضح ہے کہ متکافی منحنی ایک ناقص ہوگا اگر نقطہ و دائرہ ج کے اندر ہو، ایک زائد ہوگا اگر نقطہ و دائرہ ج کے باہر واقع ہو، اور ایک متکافی ہوگا اگر و دائرہ ج کے محیط پر ہو۔

مثال ۱۔ مخروطی کے ماس جو کسی نقطے سے کھینچے گئے

ہوں ماسکہ پر مساوی زاوے بناتے ہیں۔

اس ماسکہ کے لگانا سے مکافات عمل میں لاؤ۔ تب مخروطی کے دو ماسوں کے متناظر دو نقطے ایک دائرہ پر حاصل ہوں گے، اور ان ماسوں کے نقطہ تقاطع کے متناظر ایک خط حاصل ہوگا جو دائرہ پر کے ان دو نقطوں کو ملاتا ہے، نیز مخروطی کے ان ماسوں کے نقاط تماس کے متناظر وہ ماس حاصل ہوں گے جو دائرہ پر کے نقطوں پر ماس کے کھینچے گئے ہوں۔ لیکن

کسی دو نقطوں کے محاذی مخروطی کے ماسکہ پر جو زاویہ بنتا ہے وہ اس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ان نقطوں کے متناظر خطوں کے درمیان ہوتا ہے پس شکافی مسئلہ حسب ذیل ہے۔

وہ خط جو ایک دائرہ پر کے دو نقطوں کو ملاتا ہے ان نقطوں پر کے محاسوں کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے۔
مثال ۲۔ اگر مخروطی کا ایک وتر ایک ثابت نقطہ پر قائمہ زاویہ بنائے تو اس وتر کا لغاف ایک مخروطی ہوگا جس کا ایک ماسکہ و ہوگا اور متناظر مرتب وہ خط ہوگا جو ابتدائی مخروطی کے لحاظ سے و کا قطبی ہے۔

و کے لحاظ سے مکافات کرو تو یہ مسئلہ حسب ذیل ہو جاتا ہے:
اگر ایک مخروطی کے محاس ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بنائیں تو ان محاسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ہم مرکز دائرہ ہوگا۔

مثال ۳۔ اگر دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہو تو ان کے مشترک وتروں میں سے دو ان کے مرتبوں نقطہ تقاطع میں سے گزریں گے۔

مشترک ماسکہ کے لحاظ سے مکافات کرو تو مسئلہ حسب ذیل ہوتا ہے:
دو دائروں کے مشترک محاسوں کے تقاطع نقطہ میں سے دو اس خط پر ہوتے ہیں جو دائروں کے مرکوزوں کو ملاتا ہے۔

مثال ۴۔ ایک مثلث کو ایک مکانی کے گرد کھینچا گیا

اس مثلث کا مرکز عمودی مرتب پر ہوگا۔ مرکز عمودی کے لحاظ سے مکافات کرو تو حاصل ہوگا:

وہ محرومی جو ایک مثلث کو مائل کرتا ہے اور اس کے مرکز عمودی میں سے گذرتا ہے ایک قائم زاہد ہوتا ہے۔

آٹھویں باب میں مندرجہ متعدد مثالیں مکافات کے ذریعہ ثابت کی جاسکتی ہیں، مثلاً ۲۳ کا مشکانی، مشترک ماسک کے لحاظ سے حسبِ ثل ہے: مساوی نصف قطروں کے دائرے کھینچے گئے ہیں جن کے مرکز

ایک دوسرے دائرہ پر ہیں۔

ثابت کرو کہ یہ سب دائرے دو ثابت دائروں کو مس کرتے ہیں جن کے نصف قطر متحرک دائرہ اور دوسرے دائرہ کے نصف قطروں کا علی الترتیب مجموعہ اور فرق ہیں اور جو دوسرے دائرہ کے ہم مرکز ہیں۔ ۳۱ ۴۔ اگر دائروں کا ایک ایسا نظام ہو جن کا بنیادی محور وہی ہو تو ہم ان دائروں کو ہم ماسکی محرومیوں کے ایک نظام میں مشکانی کر سکتے ہیں۔

اگر کسی نقطہ کے لحاظ سے مکافات کی جائے تو محرومیوں کا ایک نظام حاصل ہوگا جن کا ایک ماسکہ و پر ہوگا اور کسی محرومی کا مرکز [دفعہ ۳۱۲] متناظر دائرہ کے لحاظ سے وکسے قطبی کا مشکانی ہوگا۔

اب اس نظام کے ”دو انتہائی نقطوں“ میں سے ایک ایسا ہے کہ نظام کے کسی دائرہ کے لحاظ سے اس کا قطبی ایک ثابت خط مستقیم ہے یعنی وہ خط جو دوسرے انتہائی نقطہ میں سے گذرتا ہے اور بنیادی محور کے متوازی ہے۔ پس اگر دائروں کو ایک انتہائی نقطہ کے لحاظ سے مشکانی کیا جائے تو تمام مشکانیوں کا مرکز ایک ہی ہوگا اور اگر یہ تمام مشکانی ایک مشترک مرکز اور ایک مشترک ماسکہ رکھتے ہوں تو وہ ہم ماسکی ہوں گے۔ نیز چونکہ بنیادی محور ایک انتہائی نقطہ کے قطبی کے

متوازی ہے اور انتہائی نقطہ اور اس کے قطبی کے وسط میں واقع ہے اس لیے اس انتہائی نقطہ کے لحاظ سے بنیادی محور کا شکافی اس خط پر ہے جو شکافی مخروطیوں کے ماسکہ اور مرکز میں سے گزرتا ہے اور وہ ماسکہ سے مرکزی بہ نسبت دو چند فاصلہ پر واقع ہے پس جب ہم ہم محور دائروں کے ایک نظام کو ایک انتہائی نقطہ کے لحاظ سے شکافی کرتے ہیں تو بنیادی محور ہم ماسکی مخروطیوں کے دوسرے ماسکہ میں شکافی ہوتا ہے۔

حسب ذیل مسئلے شکافی ہیں:

(۱) دو ہم ماسکی مخروطیوں کے (آ) دو دائروں کے ایک مشترک کسی مشترک نقطہ پر کے ماس علی القوائم ہوتے ہیں۔ ماس کے نقاط تماس کے محاذی ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنتا ہے۔

(۲) اگر دو خطوط دو ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ہر ایک کے مس کریں اور ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو ان خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔ (۲) اگر دو دائروں میں سے ہر ایک کے ایک نقطہ لیا گیا ہو اور ان دو نقطوں کے محاذی ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنے تو ان نقطوں کو ملانے والے خط کا لفاف ایک مخروطی ہوگا جس کے ماسکوں میں سے ایک ماسکہ اس انتہائی نقطہ پر ہوگا۔

(۳) اگر کسی نقطہ سے دو ہم ماسکی مخروطیوں کے ماسوں کے دو زوج ف و ف اور ق ق کھینچے جائیں تو ف اور ق کا درمیانی زاویہ اگر کوئی خط مستقیم دو دائروں کو نقطوں ف و ف اور ق ق پر قطع کرے تو ایک انتہائی نقطہ پر ف ق اور ف ق کے محاذی مساوی زاویے بنیں گے۔

ف اور ق کے درمیانی

زاویہ کے مساوی ہوگا۔

(۴) اگر کسی نقطہ سے دو ہم آہنگی

مخروطیوں کے چار تماس

ف اور ق اور ق اور ق

یعنی بائیں اور ف کے

نقطہ تماس کو ق اور ق کے

نقاط تماس کے ساتھ ملایا

جائے تو یہ خطوط تماس ف

کے ساتھ مساوی زاویے

بنائینگے۔ [دفعہ ۲۳۰]۔

(۴) اگر کوئی خط مستقیم دو دائروں کو نقطوں

ف اور ق اور ق اور ق پر قطع

کرتے اور ف پر کا تماس ق

اور ق پر کے تماسوں سے ق

ق پر ملے تو ایک انتہائی نقطہ

ف ق اور ق اور ق کے محاذی

مساوی (یا متمم) زاویے بنینگے۔

مخروطی تطلیل

(۴-۳)

۳۱۵۔ اگر کسی نقطہ ف کو ایک ثابت نقطہ ط سے ملایا جائے

اور ط ف کسی ثابت مستوی سے ف پر منقطع ہو تو نقطہ ف کو مستوی

مذکور پر ف کا ظل کہتے ہیں۔ نقطہ ط کو تطلیل کا راس یا مرکز اور قاطع

مستوی کو تطلیل کا مستوی کہا جاتا ہے۔

۳۱۶۔ کسی خط مستقیم کا ظل ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔

کیونکہ وہ خطوط مستقیم جو ط کو کسی خط مستقیم کے تمام نقطوں سے ملاتے

ہیں ایک مستوی میں ہوتے ہیں اور یہ تطلیل کے مستوی سے ایک خط

مستقیم میں منقطع ہوتا ہے۔

۳۱۷۔ کوئی مستوی منحنی اُسی درجہ کے ایک منحنی میں

منظیل ہوتا ہے۔ کیونکہ اگر کوئی خط مستقیم ابتدائی منحنی سے نقطوں 'ا' 'ب' 'ج'... پر ملے تو خط کا ظل منحنی کے ظیل سے ان نقطوں پر ملے گا جہاں ط 'ا' ط 'ب' ط 'ج'... نظیل کے مستوی سے ملتے ہیں۔ اس لیے ایک منحنی میں ایک خط مستقیم پر اتنے ہی نقطے ہونگے جتنے دوسرے منحنی میں ہیں۔ اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

بالخصوص ایک مخروطی کا ظل ایک مخروطی ہوتا ہے۔ اس مسئلہ میں وہ ہندی مسئلہ شامل ہے کہ ایک قائم مستوی مخروط کی ہر مستوی تراش ایک مخروطی ہوتی ہے۔

۳۱۸۔ ایک منحنی کا محاس ظل کے منحنی کے محاس میں منظیل ہوتا ہے۔ کیونکہ اگر ایک خط مستقیم ایک منحنی سے دو

نقطوں 'ا' 'ب' پر ملے تو اس خط کا ظل منحنی کے ظل سے دو نقطوں 'ا' 'ب' پر ملے گا جہاں ط 'ا' ط 'ب' نظیل کے مستوی سے 'ا' 'ب' پر ملتے ہیں۔ پس اگر 'ا' 'ب' منطبق ہوں تو 'ا' 'ب' بھی منطبق ہوں گے۔

۳۱۹۔ ایک منحنی کے لحاظ سے قطب اور قطبی کا رشتہ نظیل سے نہیں بدلتا۔

پچھلے دو مسئلوں سے بخود ہوتا ہے۔ یہی ظاہر ہے کہ ایک مخروطی کے لحاظ سے دو مزدوج خط یا دو مزدوج نقطے ظل کے منحنی کے لحاظ سے دو مزدوج خطوں یا دو مزدوج

نقطوں میں منظر ہوتے ہیں۔ (۳۰۵)
۳۲۰۔ خط کے راس میں سے ایک مستوی، تطیل کے مستوی کے متوازی کیجئے اور فرض کرو کہ یہ مستوی اصلی مستوی کو خط ک ل پر قطع کرتا ہے۔ اب چونکہ مستوی ط ک ل اور تطیل کا مستوی متوازی ہیں اس لیے ان کا خط تقاطع جو ک ل کا نل ہے لا متناہی فاصلہ پر ہے۔

پس کسی مخصوص خط مستقیم ک ل کو لا متناہی فاصلہ پر منظر کرنا ہو تو کسی نقطہ ط کو راس اور مستوی ط ک ل کے متوازی ایک مستوی کو تطیل کا مستوی قرار دو۔

وہ خطوط مستقیم جو خط ک ل پر کسی نقطہ میں ملتے ہوں متوازی خطوط مستقیم میں منظر ہوں گے کیونکہ ان کا نقطہ تقاطع لا متناہی منظر ہو گا۔

۳۲۱۔ اصلی مستوی پر کے متوازی خطوط مستقیم کا کوئی نظام ایسے خطوں میں منظر ہو گا جو ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

کیونکہ فرض کرو کہ ط ف وہ خط ہے جو راس میں سے گذرتا ہے اور نظام کے متوازی ہے جہاں ف تطیل کے مستوی پر ہے۔ اب چونکہ ط ف اس مستوی میں ہے جو ط میں سے اور کسی ایک متوازی خط میں سے گذرتا ہے اس لیے متوازی خطوں میں سے ہر ایک کا نل ف میں سے گذرے گا۔

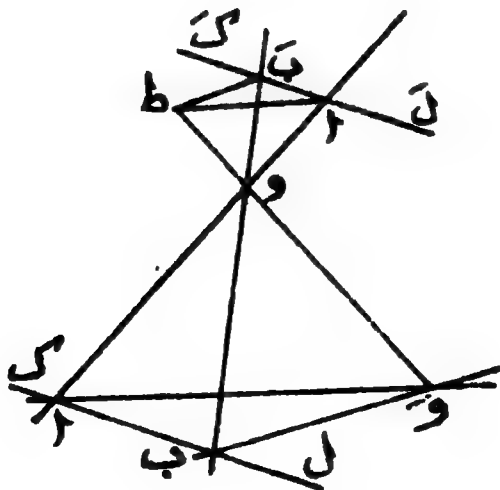
متوازی خطوں کے مختلف نظاموں کے لیے نقطہ ف کا محل بدلے گا، لیکن چونکہ ط ف ہمیشہ اصلی مستوی کے متوازی رہتا ہے اس لیے ف ہمیشہ اس خط تقاطع پر ہو گا جو تطیل کے مستوی اور راس میں سے گذرنے والے اس مستوی کا ہے جو اصلی مستوی کے متوازی ہے۔

پس اصلی مستوی پر کے متوازی خطوں کا کوئی نظام خطوں کے

ایک نظام میں مظلوم ہوتا ہے جو ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور
سب سے تمام نقطے متوازی خطوں کے مختلف نظاموں کے لیے ایک
خدا مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

۳۲۔ فرض کرو کہ اصلی مستوی اور تقبیل کے مستوی کا خط قاطع ک ل ہے۔ اس میں سے ایک مستوی تقبیل کے مستوی کے متوازی کیجیو اور فرض کرو کہ وہ اصلی مستوی کو خط ک ل پر قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ دو خطوط مستقیم ا و ا' ب و ب' خطوط ک ل ک ل سے علی الترتیب ا' ب اور ا' ب پر ملتے ہیں اور فرض کرو کہ ط و تقبیل کے مستوی سے قریب ہے۔ تب ا و اور ب و، ا و ا' اور ب و ب' کے قاطع ہیں۔

چونکہ مستوی ط ا ب اور ا و ب متوازی ہیں اور متوازی
مستوی ایک ہی مستوی سے متوازی خطوں میں منقطع ہوتے
ہیں اس لیے خطوط ط ا و ط ب علی الترتیب ا و ب و
کے متوازی ہیں۔ اس لیے زاویہ ا ط ب = زاویہ ا و ب
یعنی ا ط ب اس زاویہ کے مساوی ہے جس میں ا و ب
مقابل ہوتا ہے۔



اسی طرح اگر خطوط مستقیم ج د اور ع د 'ک ل سے
 علی الترتیب ج د پر ملیں تو زاویہ ج ط د اس زاویہ کے مساوی
 ہو گا جس میں ج د ع منطلعل ہوتا ہے۔
 اوپر کے مسئلہ سے ظلوں کے نظریہ میں حسب ذیل بنیادی
 مسئلہ ماخوذ ہوتا ہے:

کسی خط مستقیم کو لاتنا ہی منطلعل کیا جا سکتا ہے اور
 اس کے ساتھ ہی کسی دو زاویوں کو دئے ہوئے زاویوں
 میں منطلعل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کر دو کہ وہ خطوط مستقیم جو دو زاویوں کی ساقوں کو تعبیر
 کرتے ہیں اس خط سے جس کو لاتنا ہی منطلعل کرنا ہے نقطوں آ
 ب اور ج د پر ملتے ہیں۔ کوئی مستوی آ ب ج د میں سے
 گذرتا ہو کہینچہ اور اس مستوی میں دائروں کے ایسے قطعے جو علی الترتیب
 آ ب اور ج د میں سے گذریں اور ان میں دئے ہوئے زاویوں کے
 مساوی زاوئے بنیں۔ دائروں کے ان قطعوں کے نقاط تقاطع
 میں سے کسی ایک کو منطلعل کام مرکز قرار دیا جا سکتا ہے اور منطلعل کے
 مستوی کو اس مستوی کے متوازی لینا چاہئے جس کو ہم نے آ ب
 ج د میں سے گذرتے ہوئے کہینچا ہے۔
 اگر قطعے ایک دوسرے سے نہ ملیں تو منطلعل کام مرکز خیالی ہو گا۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ کسی چار ضلعی کو ایک مربع میں
 منطلعل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ چار ضلعی آ ب ج د ہے اور فرض کرو کہ متقابلہ ضلعوں کے
 ایک زوج کے تقاطع نقطہ ق [دیکھو شکل دفعہ ۵۷۸] ہیں۔ فرض کرو کہ

وترب د' (ج خط فن ق سے نقطوں میں، سراہ ملتے ہیں۔ اب اگر فن ق کو لاتنا ہی پر اور اس کے ساتھ ہی زاویوں فن د ق اور سراوس کو قائم زاویوں میں منسلک کیا جائے تو قیل کو ایک مربع ہونا چاہئے۔ کیونکہ فن ق لاتنا ہی پر منسلک ہو چکا ہے، اس لیے قیل میں متقابذ ضلعوں کے زوج متوازی ہوں گے یعنی قیل ایک متوازی الاضلاع ہے۔ نیز اس متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہے اور وتروں کا درمیانی زاویہ بھی قائمہ ہے، اس لیے قیل ایک مربع ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ وہ مثلث جو ایک چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے کسی مخروطی کے لحاظ سے جو چار ضلعی کے ضلعوں کو مس کرے خود قطبی ہے۔

چار ضلعی کو ایک مربع میں منسلک کرو۔ اب وہ دائرہ جو مربع کو محیط کرتا ہے مخروطی کا مرتب دائرہ ہے، اس لیے مربع کے وتروں کا نقطہ تقاطع مخروطی کا مرکز ہے۔
لیکن مرکز کا قطبی لاتنا ہی پر کا خط ہے، اس لیے وتروں میں سے دو کے نقطہ تقاطع کا قطبی تیسرا وتر ہے۔

مثال ۳۔ اگر ایک مخروطی کو ایک چار ضلعی میں کھینچا جائے تو نقاط تماس میں سے دو کو ملائیے والا خط اس مثلث کے ایک راس میں سے گزرے گا جو چار ضلعی کے وتروں سے بنتا ہے۔

مثال ۴۔ اگر ایک مکانی کے گرد مثلث (ب ج

فرض کرو کہ وہ نقطہ ہے جس کے قیل کو قیل کے منحنی کا مرکز بنانا ہے۔

فرض کرو کہ وہ قلبی پرف کوئی نقطہ ہے اور ف کا قلبی وق ہے۔ اب وق اور وق مزدوج خطوط ہیں۔
مزدوج خطوط کا ایک اور زوج وق 'وق' کو۔

پھر وہ کے قلبی کو لاتنا ہی پر اور زاویوں ف، ف، وق
فوق کو قائمہ زاویوں میں منطلل کر دو ایک مخروطی حاصل ہو گا جس کا
مرکز و کا قیل ہو گا اور چونکہ مزدوج قطروں کے دو زوج علی القواہم
ہیں اس لیے یہ مخروطی ایک دائرہ ہو گا۔

۳۲۴۔ مخروطیوں کا ایک نظام جو ایک چار ضلعی میں
کھینچے گئے ہوں ہم ماسکی مخروطیوں میں منطلل کیا جاسکتا ہے۔
فرض کرو کہ چار ضلعی کے دو ضلع نقطہ ۱ پر متقاطع ہوتے ہیں

اور دوسرے دو ضلع نقطہ ب پر۔ کوئی مخروطی ۱ اور ب میں سے
گذرتا ہو اگھینو اور اس مخروطی کو ایک دائرہ میں منطلل کرو جبکہ خط
۱ ب کو لاتنا ہی منطلل کیا گیا ہو۔ اب ۱ اور ب لاتنا ہی پر
انتہائی نقطوں میں منطلل ہوں گے اور چونکہ لاتنا ہی پر کے انتہائی
نقطوں سے نظام کے تمام مخروطیوں کے تماس وہی ہوتے ہیں اس لیے
یہ مخروطی ہم ماسکی ہونے چاہئیں۔

مثال ۱۔ چار نقطوں میں سے گذرنیوالے مخروطی ہم محور
دائروں میں منطلل ہو سکتے ہیں۔

ان میں سے دو نقطوں کو ملانے والے خط کو لاتنا ہی پر منطلل کرو اور
مخروطیوں میں سے ایک کو دائرہ میں منطلل کرو اب تمام مخروطی دائروں میں

منظیل ہوں گے کیونکہ وہ سب لانتا ہی پر کے انتہائی نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔

مثال ۲۔ وہ محزوطی جو ایک دوسرے کے ساتھ دوہرا تماس رکھتے ہیں ہم مرکز دائروں میں منظور ہو سکتے ہیں۔

مثال ۳۔ ایک مسدس کو ایک محزوطی میں کھینچا گیا، ثابت کرو کہ مسدس کے متقابلہ ضلعوں کے تین تقاطع تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔ [پیا سکال کا مسدس]

محزوطی کو ایک دائرہ میں اور متقابلہ ضلعوں کے دو زوجوں کے تقاطع تقاطع کو ملانے والے خط کو لانتا ہی پر منظور کرو تو یہ ثابت کرنا ہے کہ ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ایک مسدس کے متقابلہ ضلعوں کے دو زوج متوازی ہوں تو تیسرا زوج بھی متوازی ہوگا۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے تمام محزوطی قائم زائموں میں منظور ہو سکتے ہیں۔
ظن کے تین زوج ہوں گے جو ان چار نقطوں میں سے گزریں گے اور اگر ان میں سے دو زوجوں کے درمیانی زاویوں کو قائمہ زاویوں میں منظور کیا جائے تو تمام محزوطی قائم زائموں میں منظور ہوں گے۔ [دفعہ ۱۰۰، مثال ۱]

مثال ۵۔ محزوطی کے کوئی تین وتر ایک دائرہ کے مساوی وتروں میں منظور ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ (ا) 'ب' 'ج' وتر ہیں، فرض کرو کہ (ب) اور (ج) 'ک' پر ملتے ہیں اور (ج) 'ل' پر ملتے ہیں۔ محزوطی کو

ایک دائرہ میں اور گ ل کو لاتا ہی پر منظر کر۔

مثال ۶۔ اگر دو مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہوں تو ان کے چھ راس ایک مخروطی پر ہونگے اور ان کے چھ ضلع ایک مخروطی کو مس کریں گے۔

فرض کرو کہ مثلث (ا ب ج) 'ا ب ج' ہیں۔ ب ج کو لاتا ہی پر اور مخروطی کو ایک دائرہ میں منظر کرو تو (دائرہ کے مرکز میں منظر ہوگا اور ا ب) 'ا ب ج' علی القوائم ہوں گے کیونکہ (ا ب ج) خود قطبی ہے نیز چونکہ (ا ب ج) دائرہ کے لحاظ سے خود قطبی ہے اس لیے (ا ب ج) کا مرکز ہندسی ہے۔

ا ب 'ا ب ج' میں سے گزرنے والا قائم زائد (ا) میں سے گزرے گا اور ب میں سے گزرنے والا قائم زائد ج میں سے گزرے گا۔ پس چونکہ ایک قائم زائد کو کسی چار نقطوں میں سے کھینچا جاسکتا ہے اس لیے چھ نقطے (ا) 'ب' 'ج' 'ا ب ج' 'ا ب ج' 'ا ب ج' ایک مخروطی پر ہونگے نیز ایک مکانی کھینچا جاسکتا ہے جو چار خطوط مستقیم ب ج 'ج' 'ا ب ج' 'ا ب ج' کو مس کرے۔ لیکن (ا) اس مکانی کے مرتب پر ہوگا [دفعہ ۵۔ (۳) ا] اس لیے (ا ب ج) ایک حاس ہے۔ اس لیے ایک مخروطی ان دو مثلثوں کے چھ ضلعوں کو مس کرتا ہے۔

مثال ۷۔ اگر ایک چار ضلعی کو ایک مخروطی میں اور (۳۱۰) ایک دوسرے مخروطی کے گرد کھینچا جاسکے تو ایسے چار ضلعی تعداد میں لامتناہی کھینچے جاسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مخروطی میں پر چار نقطے 'ق' 'س' 'س' ہیں

اور فرض کرو کہ ق، ق، ق، ر، ر، س، س، ف، ف ایک مخروطی میں
کو مس کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ق، ق، ق اور س، س، س نقطہ ا، پ، ف میں اور ق، ق، ق
نقطہ ب، پ، اور ف، ف، ف میں اور ق، ق، ق میں نقطہ ج، پ، ملتے ہیں۔

مخروطی میں کو ایک دائرہ میں جس کا مرکز ج کا قیل ہو مطلق کو
تو ا، ب، لا تنہا ہی پر مطلق ہو گا اور مخروطی میں، اور س، س، س مرکز ہو جائیگا۔

اور چونکہ ق، ق، ق، ر، ر، س، س، ف، ف ایک دائرہ کے اندر دینی متوازی الاضلاع میں
مطلق ہو ا ہے اس لیے یہ متوازی الاضلاع ایک مستطیل ہونا چاہئے۔

لیکن ایک مستطیل کے راسوں میں سے گزرنیوالا دائرہ جس کے
ضلع ایک مخروطی کو مس کرتے ہوں مخروطی کا مرتب دائرہ ہوتا ہے۔

اس لیے اگر ایک چار ضلعی کو ایک مخروطی میں، اور دو سرے
مخروطی میں، کے گرد کھینچا جائے تو س، س، اور میں، ایک مخروطی اور ایک

مرتب دائرہ میں مطلق کئے جاسکتے ہیں۔

اب چونکہ ایک مخروطی کے مرتب دائرہ میں چار ضلعیوں کی ملاقات
تعداد جن کے ضلع مخروطی کو مس کریں کھینچی جاسکتی ہے اس لیے مسئلہ

ثابت ہے۔ کسی شکل کے وہ خواص جو اس کے کسی قیل کے لیے
۳۲۵۔

درست ہوں ظلی خواص کہلاتے ہیں۔ بالعموم ایسے خواص میں

مقداروں سے واسطہ نہیں رہتا۔ تاہم بعض ظلی خواص ایسے ہیں
جن میں خطوں اور زاویوں کی مقداریں شامل ہوتی ہیں، ان میں

سب سے اہم حسب ذیل ہے۔

پنسلوں اور سقوں کی چلیسی نسبتیں تظلیل سے نہیں بدلتیں۔
فرض کرو کہ چار نقطے ا، ب، ج، د ایک خط مستقیم میں ہیں

اور ان کے قیل 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ہیں۔ تب اگر تقطیل کا مرکز ط ہو تو
ط ا ا ط ب ب ط ج ج ط د د خطوط مستقیم ہیں اور [دفعہ
[۵۵

{ ا ب ج د } = ط { ا ب ج د } = { ا ب ج د }

اگر وہ سے چار خطوں کی کوئی پنسل ہو اور یہ پنسل کسی قاطع سے
نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' پر منقطع ہو تو

و { ا ب ج د } = { ا ب ج د } = ط { ا ب ج د }

{ ا ب ج د } =

= و { ا ب ج د }

پس اس سے اور دفعہ ۱ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر نقطوں کی
کوئی تعداد در بیج میں ہو تو ان کے قیل در بیج میں ہونگے۔

مثال ۱۔ مخروطی کا کوئی وتر جو ایک دائرے ہوئے نقطہ
و میں سے گزرے منحنی سے اور و کے قطبی سے موسیقی طور پر

تقسیم ہوتا ہے۔

ا و کے قطبی کو لاتنا ہی منطیل کرو تو و قیل کا مرکز ہو گا اور اس لیے وتر
و پر تنصیف ہو گا اور سمت [ف و ق ۵۵] موسیقی ہو گی جبکہ ف و
= وق۔

مثال ۲۔ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے

مخروطی کسی خط مستقیم سے نقطوں کے ایسے زوجوں میں قطع

ہوتے ہیں جو درپیش میں ہوتے ہیں۔ [ڈیساگ کا مسئلہ]۔
 ان میں سے دو نقطوں کو لاتنا ہی پر انتہائی نقطوں میں منظر کرو تو
 مخروطی ہم محور دائروں میں منظر ہوں گے اور پھر مسئلہ ثابت ہو جائیگا۔

۳۲۶۔ اس منسل کی چلیبی نسبت جو چار متقاطع خطوط عظیم
 سے بنے اس سعت کی چلیبی نسبت کے مساوی ہوتی ہے
 جو کسی مخروطی کے لحاظ سے ان خطوط مستقیم کے قطبوں سے

بنتی ہے۔
 چونکہ منسلوں اور سعتوں کی چلیبی نسبتیں تغلیل سے نہیں بدلتیں
 اس لیے ہم مخروطی کو ایک دائرہ میں منظر کر سکتے ہیں۔ اب ایک
 دائرہ میں کوئی خط مستقیم اس خط پر عمود ہوتا ہے جو دائرہ کے مرکز کو
 خط کے قطب (بلحاظ دائرہ) سے ملاتا ہے۔ پس اس منسل کی چلیبی
 نسبت جو چار متقاطع خطوط مستقیم سے بنے اس منسل کی چلیبی نسبت
 کے مساوی ہے جو دائرہ کے مرکز پر ان کے قطبوں کے محاذی بنتی ہے
 اور اس لیے اس سعت کی چلیبی نسبت کے مساوی ہے جو ان کے
 قطبوں سے بنتی ہے۔

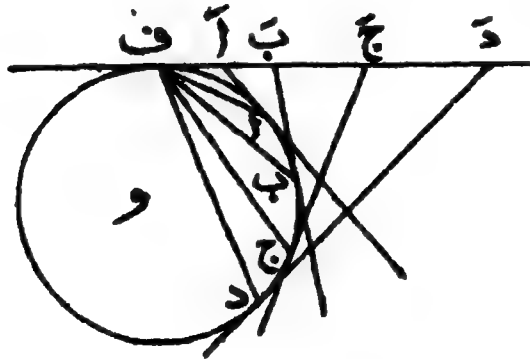
۳۲۷۔ اس منسل کی چلیبی نسبت جو ایک مخروطی کے
 کسی نقطہ کو چار ثابت نقطوں سے ملانے سے بنے مستقل
 ہوتی ہے اور اس سعت کی چلیبی نسبت کے مساوی ہوتی ہے
 ہے جبیں ان نقطوں پر کے ماسش کسی ماس سے منقطع

ہوتے ہیں۔

چونکہ چشموں اور سعتوں کی طبعی نسبتیں تظلیل سے نہیں ہوتیں
اس لیے اس مسئلہ کو صرف ایک دائرہ کے لیے ثابت کرنا کافی ہے۔
فرض کرو کہ ایک دائرہ پر چار ثابت نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د'
ہیں فرض کرو کہ دائرہ پر کوئی اور نقطہ 'ف' ہے اور فرض کرو کہ 'ف' پر
ماس 'ا' 'ب' 'ج' 'د' پر کے ماسوں سے نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د'
پر ملتا ہے۔

اب اگر دائرہ کا مرکز وہ ہے تو 'ا' 'و' 'ب' 'ج' 'د' اور 'و'
علی الترتیب 'ا' 'ف' 'ب' 'ج' 'د' اور 'ف' 'د' پر عمود ہیں۔
پس {ا ب ج د} = {و ا ب ج د} = {ف ا ب ج د}
لیکن زاوے 'ا' 'ف' 'ب' 'ج' 'د' مستقل ہیں
کیونکہ 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ثابت نقطے ہیں۔

اس لیے {ا ب ج د} = {ف ا ب ج د} = مستقل



اگر ق کوئی نقطہ ہو اور وہ دائرہ پر نہ ہو تو

ق { (ب ج د) ف (ا ب ج د) }
 کے مساوی نہیں ہو سکتا یہ فوراً واضح ہو جاتا ہے اگر ہم ف ایسا
 لیں کہ ا ف ق ایک خط مستقیم ہو اور پھر ان سمتوں پر غور کریں
 جو ب ج پر ان دو پینسلوں سے بنتی ہیں۔ اس لیے حسب ذیل
 مسئلہ عکس حاصل ہوتا ہے:

اگر ایک نقطہ ف اس طرح حرکت کرے کہ ا س پینسل
 کی چلیبی نسبت جو اس کو چار ثابت نقطوں (ا ب ج د)
 سے ملانے سے بنے مستقل ہو تو ف ایک مخروطی مرسم کرے گا
 جو (ا ب ج د) میں سے گزرے گا۔

مثال ۱۔ مخروطی کے دو مزدوج وتروں کے چار سرے
 اس کے کسی نقطہ پر ایک موسیقی پینسل بناتے ہیں۔
 فرض کرو کہ وتر (ا ب ج د) ہیں۔ فرض کرو کہ ب د کا قطب ع
 ہے اور ا ج ب د کا نقطہ تقاطع ف ہے۔ یہ چار نقطے (ا ب ج د)
 فمعی کے تمام نقطوں پر مساوی چلیبی نسبت کی پینسل بناتے ہیں۔ ایک
 نقطہ کو د سے لا انتہا قریب لو تو پینسل د (ا ب ج ع) کے حاصل ہوگی۔
 لیکن سمت (ا ب ج ع) موسیقی ہے جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

مثال ۲۔ اگر دو مثلث ایک مخروطی کو حاطط کریں تو

ان کے چھ راس دو سرے مخروطی پر ہوں گے۔

فرض کرو کہ مثلث (ا ب ج) (ا ب ج) ہیں۔ فرض کرو کہ ب ج
 ضلعوں (ا ب) (ا ج کو ع) د پر قطع کرتا ہے اور ب ج ضلعوں (ا ب)
 (ا ج کو ع) د پر قطع کرتا ہے۔ تب وہ سمتیں جو چار راسوں (ا ب ج ع)

اَب، اَج پر دو ماسوں ب ج، ب ج سے بنتی ہیں مساوی ہیں۔

پس {ب ج ع د} = {ع د ب ج}

ا {ب ج ع د} = ا {ع د ب ج}

یا ا {ب ج ب ج} = ا {ب ج ب ج}

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

اس مسئلہ کو اس طرح بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ب، ج کو لاتناہی (۲۱۳) پر کے دائری نقطوں میں منظر کیا جائے۔ چنانچہ مخروطی ایک ایسے مکانی میں منظر ہوگا جس کا ماسکہ (ا ہے) اور یہ معلوم ہے کہ وہ دائرہ جو (ا ب ج) کو مانڈا کرتا ہے (ا میں سے گزرتا ہے۔

۳۲۸۔ تعریف۔ سعتیں اور پنسلیں ہم رسم کہلاتی

ہیں جبکہ ایک کے ہر چار اجزاء اور دوسرے کے متناظر چار اجزاء مساوی چلیپی نسبتیں رکھیں۔

ہم رسم سعتوں یا پنسلوں کی دوسری تعریف حسب ذیل ہے: دو سعتیں یا پنسلیں ہم رسم کہلاتی ہیں جبکہ وہ اس طرح مربوط ہوں کہ ایک نظام کے ہر نقطہ یا خط کے متناظر دوسرے نظام کا ایک اور صرف ایک نقطہ یا خط ہو۔

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ ہم رسم سعتوں کی یہ تعریف پہلی تعریف کے مماثل ہے فرض کرو کہ دو نظاموں کے کسی دو متناظر نقطوں کے فاصلے (ثابت نقطوں سے پیمائش کردہ) لا، ما ہیں۔ تب ہمیں شکل

$$\frac{لا + ما}{ج + د} = لا$$

کی مساوات حاصل ہونی چاہئے۔
مسئلہ اس واقعہ سے مستنبط ہوتا ہے کہ ایک نظام کے ہر چار
نقطوں کی جیومیٹری نسبت یعنی

$$\frac{(لا - لا_1)(لا - لا_2)}{(لا - لا_3)(لا - لا_4)}$$

نہیں بدلتی اگر ہم لا کی بجائے $\frac{لا + لا_1}{ج + لا_1}$ ، لا کی بجائے $\frac{لا + لا_2}{ج + لا_2}$ ،
وغیرہ درج کریں۔

مثال ۱۔ دو ہم رسم پنسلوں کے متناظر خطوں کے تقاطع
تقاطع ایک مخروطی کو مرسم کرتے ہیں۔
فرض کرو کہ چار نقاط تقاطع 'ف'، 'ق'، 'س' ہیں اور پنسلوں کے
راس 'و' و 'و' ہیں۔

تب $\{و، ف، ق، س\} = \{و، ف، ق، س\}$ اس لیے
'و'، 'ف'، 'ق'، 'س' [دفعہ ۳۲۷] ایک مخروطی پر ہیں۔ لیکن ایک
مخروطی کو متعین کرنے کے لیے پانچ نقطے کافی ہیں اس لیے 'و'، 'و' اور کسی تین
نقاط تقاطع میں سے گزرنے والا مخروطی ہر دوسرے نقطہ تقاطع میں سے
گزرے گا۔

مثال ۲۔ وہ خطوط جو دو ہم رسم سطحوں کے متناظر نقطوں کو
ملاتے ہیں ایک مخروطی کو لف کرتے ہیں۔

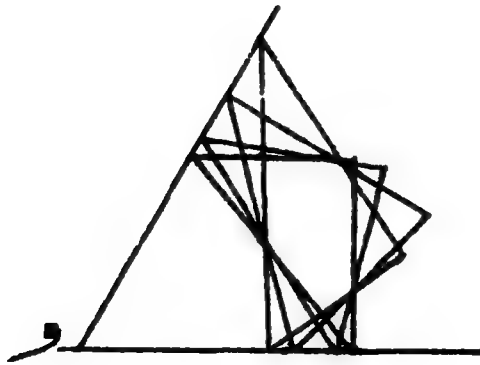
فرض کرو کہ ایک نظام کے کوئی چار نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں اور
دوسرے نظام کے متناظر چار نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں۔ تب 'ا' و 'ا'، 'ب' و 'ب'،

ج ج 'دو' ثابت خطوں سے مساوی چلیسی نسبت کی سمتوں میں منقطع ہوتے ہیں۔ پس ایک محرومی ان ثابت خطوں کو اور نیز 'ا' 'ب' 'ج' 'ج' 'دو' کو مس کرے گا۔ لیکن کسی محرومی کو متعین کرنے کے لیے پانچ ماس کافی ہیں 'اس لیے وہ محرومی جو ثابت خطوں کو اور سمتوں کے متناظر نقطوں کو ملانے والے خطوں میں سے تین کو مس کرتا ہے باقی تمام دوسروں کو بھی مس کرے گا۔

مثال ۳۔ مستقل مقدار کے دو زاویے 'ف' 'ق' 'ف' 'ج' ثابت نقطوں 'ا' 'ب' کے گرد حرکت کرتے ہیں اور نقطہ 'ف' ایک خط مستقیم مرسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ق' ایک محرومی مرسم کرتا ہے جو 'ا' 'ب' میں سے گزرتا ہے۔ [نیوٹن]

'ا' 'ق' کے ایک محل کے متناظر 'ب' 'ق' کا ایک اور صرف ایک محل ہے پس مثال اکی رو سے 'ق' کا طریق ایک محرومی ہے۔

مثال ۴۔ ایک مثلث کے تین ضلع ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں اور اس کے قاعدہ کے سرے دو ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کا راس ایک محرومی مرسم کرتا ہے۔ [میکلارن]
فرض کرو کہ تین ثابت نقطے 'ا' 'ب' 'ج' ہیں۔ اور فرض کرو کہ دو ثابت خطوط مستقیم 'و' 'و' ہیں۔ مثلثوں کو شکل کے مطابق کھینچا ہوا سمجھو۔



تب سقیں {ا ب ج د....} اور {ا ب ج د....} ہم رسم ہیں۔
اس لیے پنسلیں ب {ا ب....} اور ج {ا ب ج د....} ہم رسم ہیں۔

مثال ۵۔ اگر ایک کنیٹر ضلعی کے تمام ضلع ثابت نقطوں
میں سے گزریں اور تمام راس 'ا' کے ثابت خطوط
مستقیم پر حرکت کریں تو بقیہ راس ایک مخروطی کو مرسم کرے گا۔
مثال ۶۔ ایک مخروطی پر 'ا' (ثابت نقطے ہیں) اور
'ا' سے کسی ہم ماسکی مخروطی کے ماسوں کے زوج کھینچے
گئے ہیں جو ابتدائی مخروطی سے نقطوں ج 'د' اور ج 'د' پر
ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ج 'د' اور ج 'د' کے نقطہ تقاطع کا طریق
ایک مخروطی ہے۔

(۲۱۵)

۱ سے ہم ماسکی کے ماس (پر کے ماس سے مساوی میلان رکھتے ہیں
[دفعہ ۲۳۰ نتیجہ صریح ۳] اس لیے وتر ج 'د' پر کے ماس کو کسی ثابت
نقطہ و قطع کرے گا [دفعہ ۱۹۶ مثال ۲]۔ اسی طرح ج 'د' بھی ایک
ثابت نقطہ و میں سے گزرے گا۔ اب اگر ہم و میں سے گزرتا ہوا کوئی خط
وج د لیں تو ایک اور صرف ایک ہم ماسکی خطوط (ج اور د) کو مس
کرے گا، اور ا سے اس ہم ماسکی کے ماس 'ج' اور د کو متعین کریں گے اور
اس لیے وج د کے کسی محل کے متناظر وج د کا ایک اور صرف ایک
محل ہے۔ اس لیے نقطہ تقاطع کا طریق مثال الی بموجب ایک مخروطی ہے۔
مثال ۷۔ اگر 'ا' و 'ا' ب و ب 'ج و ج' د و د'۔

.... ایک مخروطی کے وتر ہوں اور ف مخروطی پر کوئی نقطہ ہو تو
پنسل ف { ا ب ج د } اور ف { ا ب ج د }
ہم رسم ہوں گی۔

مخروطی کو ایک دائرہ میں جس کا مرکز و ہو نپٹل کرو۔

مثال ۸۔ اگر ایک مخروطی پر نقطوں کے دو نظام ہوں
جن کے محاذی منحنی کے کسی نقطہ پر ہم رسم پنسل بنیں تو وہ خط
جو ان دو نظاموں کے متناظر نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتے
ہیں ایک مخروطی کو لف کر نیگے جو ابتدائی مخروطی کے ساتھ دہرا
تاس رکھیگا۔

فرض کرو کہ نقطوں کے دو نظام 'ا' ب' ج' د' اور 'ا' ب'
ج' د' ہیں۔ 'ا' ب' ج' کو ایک دائرہ کے مساوی دہروں
میں نپٹل کرو [دفعہ ۳۲۳ مثال ۵]۔ فرض کرو کہ متناظر نقطوں کا کوئی زوج
ف' ف' ہے اور و دائرہ پر کوئی نقطہ ہے۔ ا ب و { ا ب ج ف }
= { ا ب ج ف }۔ اس لیے ف ف = و و اور اس لیے

ف ف کالفات ایک ہم مرکز دائرہ ہے۔

مثال ۹۔ اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک مخروطی میں کھینچا
جائے اور اس کے تمام ضلع الا ایک کے ثابت نقطوں میں
سے گزریں تو بقیہ ضلع کالفات ایک مخروطی ہوگا۔

۷۔ مثال ۸ سے حاصل ہوگا۔

۳۲۹۔ کوئی دو خط جو ایک دوسرے کے علی القواثم ہوں اور وہ خط جو ان کے نقطہ تقاطع اور لاتناہی پر کے دائری نقطوں میں سے گزریں ایک موسیقی منسل بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ وہ خط جو ایک دوسرے کے علی القواثم ہیں لا ما۔ ہیں تب وہ خط جو لاتناہی پر کے دائری نقطوں کو ان کے تقاطع سے ملائے ہیں لا ما۔ سے حاصل ہوں گے۔ دفعہ ۵ کی رو سے خطوں کے یہ دونوں موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔

نیز ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ دو خط جو کسی مستقل زاویہ پر مل ہوں اور وہ خط جو لاتناہی پر کے دائری نقطوں تک پہنچے جائیں مستقل ملیبی نسبت کی پسل بناتے ہیں۔

(۱۶)

مثال۔ ایک مخروطی کے دو ماس ایک دے ہوئے خط اب کو موسیقی طور پر تقسیم کرتے ہیں ثابت کرو کہ ان ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک مخروطی ہے جو اب میں سے گذرتا ہے اور وتر ماس کا لفاف ایک مخروطی ہے جو ابتدائی مخروطی کے ان ماسوں کو مس کرتا ہے جو اب سے پہنچے گئے ہیں۔

اب کو لاتناہی پر کے دائری نقطوں میں منطلیل کرو تو مسئلہ ہو جاتا ہے: ایک مخروطی کے ان دو ماسوں کا طریق جو ایک دوسرے کے علی القواثم ہوں ایک دائرہ ہے اور وتر ماس کا لفاف ایک

ہم ماسکی مخروطی ہے سہتلیس کے طریقوں پر مزید مثالیں مسئلہ میں
۳۳۔ مکافات اور سہتلیس کے طریقوں پر مزید مثالیں مسئلہ میں
مثال ۱۔ اگر ایک مثلث کے ضلع ایک مخروطی کو مس
کریں اور اگر اس کے دور اس دو ثابت ہم ماسکی مخروطیوں پر
حرکت کریں تو تیسرا اس ایک ہم ماسکی مخروطی مرسم کرے گا۔

فرض کرو کہ مثلث کے دو لائنات قریب مل (ب ج) (ب ج) ہیں
اور فرض کرو کہ (ا) (ب ب ج ج) (مدودہ) مثلث ف ق ر بنائے
ہیں۔ چھ نقطے (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج)
۳۲۔ مثال ۲۔ یہ مخروطی انتہا میں مثلث ف ق ر کے ضلعوں کو
(ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج)
ملیں گے [دفعہ ۱۸۶ مثال ۱] اور یہ آسانی سے معلوم ہو گا کہ میں لیں (ا) (ق
ج ف ب) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج)
اب اگر (ا) ایک مخروطی پر حرکت کرتا ہے جو اس مخروطی کے ہم ماسکی ہے جس کو
(ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج)
اور (ج) کے ساتھ مساوی زاویے بنائے گا۔ پس چونکہ (ا) (ق ج ف ب) (ب ج)
موسیقی ہے اس لیے (ق ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج)
ہم ماسکی پر حرکت کرے تو (ق ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج)
پر عمود ہونا چاہئے اور اس لیے (ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج)
زاویے بنائے ہیں۔ اس لیے یہ سنبھل ہوتا ہے کہ (ج) ایک ہم ماسکی مخروطی پر حرکت کرتا ہے۔
[اس سلسلہ کی آسانی سے توضیح کی جا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ (ب ج)
ج د ایک چار ضلعی ہے جو ایک مخروطی کو مائل کرتا ہے اور فرض کرو کہ
(ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج)
اور (ج ب) (ع) پر ملتے ہیں اور (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج) (ب ج)

ثلثوں ا ب ج، ب ج ف، ف پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ج ع اور ف ہم ماسکی مخروطیوں پر حرکت کرتے ہیں۔ پس مثلث ج ع د پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ د ایک ہم ماسکی مخروطی پر حرکت کرتا ہے۔ اگر ہم ایک ماسکہ کے لحاظ سے مکافات کریں تو حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوگا:

اگر ایک مثلث کے راس، ایک ہم محور نظام کے ایک دائرہ پر ہوں اور اس کے دو ضلع نظام کے دائروں کو مس کریں تو تیسرا ضلع نظام کے دوسرے دائرہ کو مس کرے گا۔ (پوائنٹ کا مسئلہ)

مثال ۲۔ وہ چھ خطوط جو ایک مثلث کے راسوں کو ان نقطوں سے ملاتے ہیں جہاں مقابل کے ضلع ایک مخروطی سے منقطع ہوتے ہیں ایک دوسرے مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

حکائی مسئلہ حسب ذیل ہے:

ایک مثلث کے زاویوں سے ایک مخروطی کے ماس کھینچے جائیں تو مقابل کے ضلع، ان ماسوں کو جن چھ نقطوں پر قطع کرتے ہیں وہ ایک دوسرے مخروطی پر واقع ہوتے ہیں۔

نقطوں میں سے دو کو لاتنا ہی پر کے دائری نقطوں میں منظر کرنا مثلث کا مقابل کار اس ایک ماسکہ میں منظر ہوگا، اور حسب ذیل مسئلہ فوراً حاصل ہوگا:

اگر مخروطی کے ایک ماسکہ میں سے دو خط کھینچے جائیں اور ان خطوں کے متوازی مخروطی کے ماس کھینچے جائیں تو

نقطہ تقاطع کا طریق ایک محرومی ہے جو اس وتر کے سروں میں سے گذرتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ نقاط تماس کو ملانے والے خط کا لغاف ایک محرومی ہے جو اسی چار ضلعی میں کھینچا ہوا ہے۔

(۴) اوب اور ج و د دو محرومیوں کے مشترک وتر ہیں اور ف ا ق دو نقطے ہیں جن میں سے ایک ایک محرومی پر اور دوسرے محرومی پر ہے اور و ا ف ب ق ا موسیقی ہے۔ ثابت کرو کہ خط ف ق کا لغاف ایک محرومی ہے جو ا ب ج د کو مس کرتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ف اور ق پر کے تماس ایک محرومی پر جو ا ب ج د میں سے گذرتا ہے ملتے ہیں۔

(۵) اگر دو نقطے لیے جائیں جن میں سے ایک ایک دائرہ اور دوسرا دوسرے دائرہ پر ہو اور وہ ان کے بنیادی محور سے مساوی فاصلوں پر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کو ملانے والے خط کا لغاف ایک مکانی ہے جو بنیادی محور کو مس کرتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ان نقطوں پر کے تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے جو اول الذکر دائروں کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

چودھویں باب پرشالیں

۱۔ ثابت کرو کہ قطع زائد فرد و ج زائد کے لغاف سے اپنا آپ مکانی ہوتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے نظام کو ہم مرکز مخروطیوں میں شکافی کیا جاسکتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ چار مخروطی کھینچے جاسکتے ہیں جن میں ایک ماسک مشترک ہو اور جو تین دئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں نیز ثابت کرو کہ ان میں سے ایک کا وتر خاص دیگر تین کے وتر ان خاص کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ یہ بھی ثابت کرو کہ ان کے مرتبوں میں سے دو دو مثلث کے ضلعوں پر ملتے ہیں۔

۴۔ اگر دو مخروطیوں میں سے ہر ایک کو دو سرے کے لحاظ سے شکافی کیا جائے تو ثابت کرو کہ یہ دو مخروطی اور دو شکافی ایک مشترک خود مزدوج مثلث رکھتے ہیں۔

۵۔ دو مخروطی ۱، اور ۲، ایک مخروطی ۳ کے لحاظ سے شکافی ہیں۔ اگر ۱ کے لحاظ سے ۲ کا شکافی ہو، اور ۲ کے لحاظ سے ۱ کا شکافی ہو، اور ۳ کے لحاظ سے ۱ کا شکافی ہو، اور ۳ کا شکافی ہو، اور ۳ کے لحاظ سے ۱ کا شکافی ہو۔

۶۔ اگر ایک درجہ پنسل کی مزدوج شعاعوں کے دو زوج علی الاعمال ہوں تو ہر زوج علی القوائم ہوگا۔

۷۔ اگر ایک درجہ نقطوں کے دو زوجوں کا نقطہ تصنیف وہی ہو تو ہر زوج کا نقطہ تصنیف وہی ہوگا۔ درجہ کامرکز کہاں ہے؟

۸۔ مخروطیوں کا ایک نظام ہے جو چار ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے۔ کسی نقطہ سے اس نظام کے ماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں جو ایک پنسل بناتے ہیں جو درجہ میں ہے۔ ثابت کرو کہ نظام کے مرتب دائرے ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

۹۔ ثابت کرو کہ دو دائرے اور ان کے مشابہت کے مرکز کسی

نقطہ پر ایک ایسی پنسل بناتے ہیں جو درجہ میں ہوتی ہے۔

۱۰۔ اگر دو محدود خطوط کو حصوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیا جائے

متناظر نقطوں کو ملانے والے خط ایک مکانی کو لف کریں گے۔
 ۱۱۔ اگر خطوں 'ا' و 'ب' پر دو ہم رسم سمتوں کے متناظر نقطے
 'ف' ہوں اور متوازی الاضلاع 'ف' و 'ق' کی تکمیل کی جائے
 تو ثابت کرو کہ 'ق' کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۱۲۔ تین مخروطیوں میں دو نقطے مشترک ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ
 تین خط جواہر کے دیگر نقاط تقاطع کو دو دو کر کے ملانے سے حاصل ہوتے
 ہیں ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور کوئی خط جو اس نقطہ میں سے گذرتا ہے
 مخروطیوں سے ایسے چھ نقطوں پر منقطع ہوتا ہے جو درہج میں ہوتے ہیں۔
 ۱۳۔ اگر دو مثلثوں کے متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع ایک
 خط مستقیم پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ یہ دو مثلث متساوی الاضلاع مثلثوں
 میں منظر کے لئے جاسکتے ہیں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ کوئی تین زاوے قائمہ زاویوں میں منظر
 کے لئے جاسکتے ہیں۔

۱۵۔ 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک مخروطی پر تین ثابت نقطے ہیں۔ نچنی پر
 ایک ایسا نقطہ ہندسی طور پر معلوم کرو کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' کے محاذی اس
 نقطہ پر مساوی زاوے بنیں۔

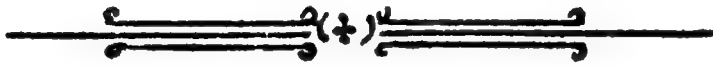
۱۶۔ ایک ثابت نقطہ 'و' میں سے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو ایک
 دے ہوئے مثلث کے ضلعوں کو 'ا'، 'ب'، 'ج' پر قطع کرتا ہے۔ اس خط
 'ف' ایسا نقطہ ہے کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' و 'ف' موسیقی ہے۔ ثابت کرو کہ 'ف' کا
 طریق ایک مخروطی ہے۔

۱۷۔ جب چار مخروطی چار دے ہوئے نقطوں میں سے گذرتے
 ہیں تو وہ چار جواہر کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبیوں سے بنتی ہے مستقل
 قطبی نسبت کی ہوتی ہے۔

۱۸۔ اگر مستقل مقدار کے دو زاوے اپنے راسوں کے گرد اس طریقہ
 پر گھومیں کہ ان کی ساتوں میں سے دو کا نقطہ تقاطع ایک مخروطی پر۔ ہو جو

(۲۱۹)

راسوں میں سے گذرتا ہے تو ثابت کر فکہ دوسری دو ساقیں راسوں میں
گڈھنے والے ایک دوسرے مخروطی پر متقاطع ہونگی۔
۱۹۔ اگر ایک کثیر ضلعی کے تمام راس ثابت خطوط مستقیم پر حرکت
کریں اور تمام ضلع الا ایک کے ثابت نقطوں کے گرد گردش کریں تو
کثیر ضلعی کا بقیہ ضلع ایک مخروطی کو لف کرے گا۔
۲۰۔ اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک مخروطی کے گرد کھینچا جائے اور
اس کے تمام راس الا ایک کے ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہوں تو بقیہ
راس کا طریق ایک مخروطی ہوگا۔



پندرہواں باب

(۲۷۰)

غیر متغییر

۳۳۱ — اگر دو مخروطیوں کی مساواتیں

$$س = (لا + ب + ا + ج + ف + م + گ + لا + ۲ = لا + م = ۰$$

اور $س = (لا + ب + ا + ج + ف + م + گ + لا + ۲ = لا + م = ۰$
ہوں تو ان کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے کسی مخروطی کی مساوات

ک $س + س = ۰$ (۱) سے حاصل ہوگی۔

وہ شرط کہ (۱) سے خطوط مستقیم کا ایک زوج تعبیر ہو یہ ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ک + ا + و & ک + م + ح & ک + گ + گ \\ \hline ک + م + ح & ک + ب + ب & ک + ف + ف \\ \hline ک + گ + گ & ک + ف + ف & ک + ج + ج \\ \hline \end{array} = ۰$$

یہ کہ میں ایک کبھی مساوات ہے اور اس کو شکل

$$\Delta ک + ط + ک + ط + ک + \Delta = ۰ \dots \dots (۲)$$

میں لکھا جاتا ہے جہاں س، س کے مینز علی الترتیب Δ ، Δ ہیں اور

ط = ۱ + ب + ج + ۲ ف + ۲ گ + ۲ ح

اور ط = ۱ + ب + ج + ۲ ف + ۲ گ + ۲ ح

اگر مساوات (۲) کی تین اصلیں ک، ک، ک، ہوں تو ک میں + میں =
وغیرہ ان خطوط مستقیم کے زوجوں کی مساواتیں ہیں جو میں اور میں کے
نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔ اگر ہم (۱) اور (۲) سے ک کو ساقط
کریں تو محصلہ مساوات یمنے

۵ میں - ط میں + ۲ میں - ۵ میں =

میں اور میں کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کے تین
زوجوں کی مساوات ہوگی۔

۳۳۲ — اب اگر محدودوں کے محوروں کو کسی طرح تبدیل کیا جائے
(۳۳۱) مثلاً کارٹیزی محدودوں سے سطحی محدودوں میں اور اس تبدیلی سے
محور طوں میں = اور میں = کی مساواتیں ۳ = ۰ اور ۳ =

ہو جائیں تو مساوات ک میں + میں = ک + ۳ + ۳ = میں
تبدیل ہوگی اور اگر ک ایسا ہو کہ ک میں + میں = خطوط مستقیم کے
ایک زوج کو تعبیر کرے تو ک + ۳ + ۳ = سے بھی خطوط مستقیم کا
ایک زوج تعبیر ہوگا۔

پس ک کی وہ قیمتیں جن کے لیے مساوات ک میں + میں =
خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، یعنی مساوات (۲) دفعہ ۳۳۱ کی اصلیں
محدودوں کے کسی مخصوص محوروں پر منحصر نہیں ہونی چاہئیں۔ اس لیے
چار مقداروں ۵، ط، ط، ۵ کی ایک دوسرے کے ساتھ نسبتیں
ایسی ہونی چاہئیں کہ وہ محدودوں کے محوروں پر منحصر نہ ہوں۔
اسی سبب کی بناء پر مقداروں ۵، ط، ط، ۵ کو غیر متغیر

کہا جاتا ہے۔

اگر محدودوں کے ایک نظام سے دوسرے نظام میں استحالة میں اور میں میں پڑانے محدودوں کو نئے محدودوں کی رقوم میں رکھ کر فی الواقع عمل میں لایا گیا ہے تو متذکرہ بالا مقداروں میں سے کسی دو کی نسبتیں، جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں، نہیں بدلیں گی، لیکن اگر صرف یہ معلوم ہو کہ محدودوں کے ایک نظام کے حوالے سے مساواتیں ہیں۔ اور میں = ۰ ہیں اور دوسرے نظام کے حوالے سے یہ مساواتیں ہیں۔ اور میں = ۰ ہو جاتی ہیں تو اس کی کوئی ضمانت نہیں ہے کہ ان نئی مساواتوں میں سے ایک یا دوسری (دونوں نہیں) کسی مستقل مقدار سے مضروب یا مقسوم نہیں ہے۔ اس لیے یہ ممکن ہے کہ مخروطیوں کی وہ نئی مساواتیں جو حقیقتاً استحالة سے حاصل ہوئی ہیں یا جبکہ دونوں اسی مستقل مقدار سے مضروب یا مقسوم ہوں علی الترتیب میں = ۰ اور میں = ۰ ہوں اور ک میں + میں = ۰ کا میز

$$ک^۳ + ک^۲م + ک^۱م^۲ + م^۳ = ۰$$

ہو۔ اس طرح یہ واضح ہے کہ اگرچہ نسبتیں $ک : ط : م$: $ط : م : ۰$ تمام صورتوں میں مستقل نہ ہوں تاہم ان مقداروں کے درمیان کوئی ایسا رشتہ جو متجانس ہو جبکہ $ک^۳ + ک^۲م + ک^۱م^۲ + م^۳ = ۰$ سب کے سب وہی ابعاد کے ہوں اور نیز جبکہ وہ ترتیب وار $۰، ۱، ۲، ۳$ ابعاد کے ہوں دونوں صورتوں میں درست رہے گا خواہ مخروطیوں کی مساواتوں کو کسی طرح بھی تبدیل کیا جائے۔

(۲۲۲) — حسب ذیل صورتوں میں جو غیر متغیر حاصل کیے گئے ہیں

وہ آئندہ کارآمد ہونگے۔

۱۔ اگر $\text{میں} = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} + \text{جہ} =$

$\text{میں} = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} + \text{جہ} =$

تو ک $\text{میں} + \text{میں} =$ کا مینر
(ک + ع) (ک + و) (ک + ط)

ہے۔ اس لیے

$\Delta = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} = \text{ح} + \text{و} + \text{ط} = \text{ط} + \text{و} + \text{ط} = \Delta$

۲۔ اگر $\text{میں} = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} + \text{جہ} =$

$\text{میں} = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} + \text{جہ} =$

تو مینر

ک	ع	ن	م
ن	ک	و	ل
م	ل	ک	ط

ہے۔ اس لیے $\Delta = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} = \text{ط} + \text{و} + \text{ط} = \Delta$

۳۔ اگر $\text{میں} = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} + \text{جہ} =$

$\text{میں} = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} + \text{جہ} =$

۲۔ نہ لہ جہ عہ۔ ۲۔ لہ مہ عہ بہ۔

تو مینر

ک + ع	لہ	لہ	لہ
لہ	ک + و	مہ	لہ
لہ	لہ	ک + ط	نہ

ہے۔ اس لیے $\Delta = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} = \text{ط} + \text{و} + \text{ط} = \Delta$

$\Delta = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} = \text{ط} + \text{و} + \text{ط} = \Delta$

۴۔ اگر $\text{میں} = \text{ع} + \text{و} + \text{ط} + \text{جہ} =$

۲۔ نہ لہ جہ عہ۔ ۲۔ لہ مہ عہ بہ۔

$$\text{س} = ۲ = ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۱۲$$

ک	ک	ک
ک	ک	ک
ک	ک	ک
ک	ک	ک

ہے۔ اس لیے $\Delta = ۳ - ۲ = ۱$ ، طہ = ۳ (ل + م + ن + ت)

$$\text{طہ} = ۳ - (۲ + ۲ + ۲ + ۲) = ۳ - ۸ = -۵$$

$$\text{اس طرح } \Delta = ۳$$

$$۵ - \text{اگر } \text{س} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - ۱ = ۰$$

(۴۲۳)

$$\text{س} = (۱ - ۲) + (۱ - ۲) = -۲$$

ک	ک	ک
ک	ک	ک
ک	ک	ک
ک	ک	ک

$$\text{ہے۔ اس لیے } \Delta = ۱ - ۱ = ۰$$

$$\text{طہ} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - ۱ = ۰$$

$$۶ - \text{اگر } \text{س} = (۱ - ۲) + (۱ - ۲) = -۲$$

$$\text{س} = (۱ - ۲) + (۱ - ۲) = -۲$$

ک	ک	ک
ک	ک	ک
ک	ک	ک
ک	ک	ک

ہے۔ اس لیے $\Delta = \text{غہ}^1, \Delta = \text{ر}^1$
 $\text{طہ} = (\text{عہ} - \text{ف}^1) + (\text{بہ} - \text{ق}^1) - \text{غہ}^2 - \text{ر}^2$
 $\text{طہ} = (\text{عہ} - \text{ف}^1) + (\text{بہ} - \text{ق}^1) - \text{غہ}^2 - \text{ر}^2$
 ۳۳۴۔ دفعہ ماسبق کی مثالوں (۲) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ
 طہ =۔ جبکہ مں میں کینچا ہوا مثلث مں کے لیے خود قطبی ہو اور
 نیز جبکہ مں کا مانٹا مثلث مں کے لیے خود قطبی ہو۔ نیز ہم جانتے
 ہیں کہ اگر ان صورتوں میں سے کسی ایک میں ایسا ایک مثلث ہو تو ایسے
 مثلث تعداد میں لامتناہی ہوں گے۔
 اس کے بالعکس اگر طہ =۔ تو مں میں ایسے مثلث کینچے
 جا سکتے ہیں جو مں کے لیے خود قطبی ہوں اور نیز مں کے گرد ایسے
 مثلث کینچے جا سکتے ہیں جو مں کے لیے خود قطبی ہوں۔
 فرض کرو کہ مں کے لحاظ سے مں پر کے کسی نقطہ کا قطبی، مں کو
 کر ب، ج پر قطع کرتا ہے۔
 اب مثلث ا ب ج کے حوالے سے

$$\text{مں} = \text{عہ}^1 + \text{وہ}^1 + \text{طہ}^1 + \text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 = \text{۔}$$

$$\text{مں} = \text{ل}^2 + \text{بہ}^2 + \text{م}^2 + \text{جہ}^2 + \text{ن}^2 + \text{عہ}^2 = \text{۔}$$

اور اس لئے کہ مں + مں کا مینر

(۴۲۴)

ک	ن	ع
ن	ک	و
م	ک	ع
ط	ک	ع

ہے۔ پس اگر طہ =۔ تو ل عہ =۔
 جب 'ع =۔ تو محظوظی مں دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہوتا ہے جو
 ا میں سے گزرتے ہیں، اور جب 'ل =۔ تو مں خط مستقیم ج ج
 میں اور ا میں سے گزرنے والے ایک دوسرے خط میں تحویل ہوتا ہے

جہاں 'ا' سے کے لحاظ سے ج ج کا قطب ہے۔ ان صورتوں کو خارج کرنے پر جن میں کہ ایک مخروطی خطوط مستقیم کے زوج میں تحول ہوتا ہے 'ء'۔ ماحصل ہوتا ہے اور اس لیے (ب ج 'ا' سے کے لیے خود قطبی ہے۔

پھر فرض کرو کہ 'س' کے لحاظ سے 'س' کے کسی ماس ب ج کا قطب (ا ہے اور فرض کرو کہ (ا سے 'س' کے ماس (ب 'ج ہیں تب مثلث (ب ج کے حوالے سے

$$\text{س} = \text{ل}^2 + \text{م}^2 + \text{ن}^2 - \text{م}^2 - \text{ن}^2 - \text{ل}^2 - \text{جہ} - \text{ل}^2 - \text{جہ} - \text{م}^2 - \text{جہ}$$

$$- \text{ل}^2 - \text{م}^2 - \text{ن}^2 =$$

$$\text{اور} \quad \text{س} = \text{ء}^2 + \text{و}^2 + \text{پ}^2 + \text{ط}^2 - \text{جہ} - \text{ء}^2 - \text{جہ} - \text{و}^2 - \text{جہ} - \text{پ}^2 - \text{جہ} - \text{ط}^2 - \text{جہ}$$

پس مین

ک ل + ء	ک ل م	ک ن ل
ک ل م	ک م + و	ک م ن + ء
ک ن ل	ک م ن + ء	ک ن + ط

ہے۔ اس لیے اگر ط =۔ تو م ل م ن =۔۔۔ اگر ل یا م یا ن صفر ہو تو 'س' منطبق خطوط مستقیم کے زوج کو تعبیر کرے گا، اس لیے ان خطی مخروطیوں کو خارج کرنے پر ہمیں 'ء'۔ ماحصل ہوتا ہے اور اس لیے (ب ج 'س' کے لیے خود قطبی ہے۔

پس جب 'ط' =۔ تو 'س' میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد

کھینچی جاسکتی ہے جو 'س' کے لیے خود قطبی ہوں اور نیز 'س' کے گرد مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو 'س' کیلئے خود قطبی ہوں۔

۳۳۵۔ دفعہ ۳۳۳ کی مثال (۴) میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر س کا اندرونی مثلث میں کو مانٹ کرے تو طہ - ۴ = طہ - ۰۔ اس کا مسئلہ یکس ثابت کرنے کے لیے فرض کرو کہ س کا کوئی نما س کو ج' ج پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ج' ج سے دوسرے پاس اچھلتے ہیں۔

تب مثلث (ب ج کے حوالے سے

$$\text{س} \equiv \text{ل}^2 + \text{ع}^2 + \text{ا}^2 + \text{ن}^2 - \text{م}^2 - \text{ن}^2 - \text{ج}^2 - \text{ن}^2 - \text{ل}^2 - \text{ج}^2$$

$$- \text{ل}^2 - \text{م}^2 - \text{ع}^2 - \text{ج}^2$$

$$\text{س} \equiv \text{ع}^2 + \text{ا}^2 + \text{ن}^2 - \text{م}^2 - \text{ج}^2 - \text{ن}^2 - \text{ل}^2 - \text{ج}^2 =$$

(۴۳۵)

ک ل + ع	ک ل م + ط	ک ن ل + و
ک ل م + ط	ک م	ک م ن + ع
ک ن ل + و	ک م ن + ع	ک ن

ہے اور اس لیے

$$\Delta = - \text{ل}^2 - \text{م}^2 - \text{ن}^2$$

$$\text{ط} = \text{ل}^2 - \text{م}^2 - \text{ن}^2 - (\text{ل}^2 + \text{ع}^2 + \text{ا}^2 + \text{ن}^2 - \text{م}^2 - \text{ن}^2 - \text{ج}^2 - \text{ن}^2 - \text{ل}^2 - \text{ج}^2)$$

$$\text{ط} = - (\text{ل}^2 + \text{ع}^2 + \text{ا}^2 + \text{ن}^2 - \text{م}^2 - \text{ن}^2 - \text{ج}^2 - \text{ن}^2 - \text{ل}^2 - \text{ج}^2)$$

$$\text{پس اگر ط} - \text{م}^2 = \text{ط} = ۰ \text{ تو ل}^2 - \text{م}^2 - \text{ن}^2 = ۰$$

اس طرح = ۰ اور اس لیے مثلث (ب ج' س کا اندرونی

اور نیز س کا مانٹ مثلث ہے۔

[اگر = ۰ تو س سے دو خطوط مستقیم تعمیر ہوں گے جن میں سے ایک س کو مس کرے گا۔ نیز اگر ل یا م یا ن صفر ہو تو س سے منطبق خطوط مستقیم کے زوج تعمیر ہوں گے۔]

۳۳۶۔ پچھلے دو دفعوں سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر طہ = ۰ اور

طہ =۔ تو اس یا اس میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے اور نیز اس یا اس کے گرد مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے نیز یہ کہ مثلثوں کی لامتناہی تعداد اس یا اس میں یا ان میں سے کسی ایک کے گرد کھینچی جاسکتی ہے جو دوسرے کے لحاظ سے خود قطبی ہوں۔

مثال ۱۔ اگر ایک دائرہ کو ایک مکانی کے واسطے میں سے کھینچا جائے تو دائرہ میں ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع مکانی کو مس کریں۔

ک (ا-۲) + لا + ما + ۲ گ + لا + ف + ا - ۲ گ + ۱ کے

میز میں
 $\Delta = ۲ - ۲$ طہ = ۲ - ۱ (گ) اور طہ = ۱ - ۱ (گ)
 \therefore طہ = ۲ - ۲ = ۰

مثال ۲۔ اگر ایک دائرہ کا مرکز ایک مکانی کے مرتب پر ہو تو مکانی کے گرد مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو دائرہ کے لیے خود قطبی ہوں۔ نیز دائرہ میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو مکانی کے لیے خود قطبی ہوں۔

فرض کرو $۳ = (لا + ع) + (ما + ب) - ۲ = ۰$
 $۳ = ما - ۲ - لا = ۰$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{تب ک م + م کا مینز} \\ \hline \begin{array}{c} \text{ک} \\ \text{ک م - ۱۲} \\ \text{ک + ۱} \\ \text{ک م - ۱۲} \end{array} \\ \hline \end{array}$$

ہے جس میں ط = ۰

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دائرہ کے مرکزیت مکانی کے دو محاس اور
لا متناہی پر کا خط مکانی کے گرد ایک مثلث بناتے ہیں جو دائرہ کے لیے خود
قطبی ہے۔

مثال ۳ - ثابت کرو کہ تین محرومی

(۴۲۹)

$$\text{م} = \text{ا} - \text{۲} \text{ ا} = \text{۱} \text{ م} = \text{۲} \text{ ب} = \text{۱} \text{ م} = \text{۲} \text{ ا} = \text{۱} \text{ م} = \text{۲} \text{ ب} = \text{۱}$$

اس طرح مربوط ہیں کہ ان میں سے کسی ایک میں مثلثوں کی
لا متناہی تعداد اور دوسرے دو میں سے کسی ایک کے گرد مثلثوں کی
لا متناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے اور نیز ان میں سے کسی ایک کے گرد
مثلثوں کی لا متناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جو باقی دو میں سے
کسی ایک کے لیے خود قطبی ہوں۔

$$\begin{array}{c} \text{ک م + م کا مینز} \\ \text{ا ک + ۲ ب} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{ہے اور ک م + م کا مینز} \\ \text{ا ک + ۳ ب} \\ \text{ہے اور ک م + م کا مینز} \end{array}$$

ب ک ۳ + ۱

ہے۔ ان تینوں صورتوں میں ط = . اور ط = .

مثال ۴۔ ایک مثلث ایک محروطی کے لیے خود قطبی ہے
ثابت کرو کہ مثلث کا مائٹ دائرہ محروطی کے مرتب دائرہ کو علی القوالم
قطع کرتا ہے۔

$$\text{فرض کرو کہ محروطی میں } = \frac{لا}{وا} + \frac{ما}{بپ} - ۱ = .$$

$$\text{اور دائرہ میں } = (لا - ع) + (ما - بی) - ر = .$$

ہے۔ تب ک میں + س کے میز میں ط کو صفر ہونا چاہئے کیونکہ س میں
کھینچا ہوا مثلث س کے لیے خود قطبی ہے۔
لیکن [دفعہ ۳۳۳ مثال ۵]

$$\text{ط} = \frac{۱}{واپ} (ع + بی - ر - ۱ - ب)$$

$$\text{اس لیے } ع + بی = ر + ۱ + ب$$

اور اس لیے میں ' لا + ما = ۱ + ب کو علی القوالم قطع کرتا ہے۔

اب ط = . وہ شرط بھی ہے کہ میں کا مائٹ مثلث میں کے لیے خود
قطبی ہو۔ اس لیے حسب ذیل مسئلہ ماضی ہوتا ہے:

اگر ایک محروطی کو ایک مثلث میں کھینچا جائے تو مثلث کا
قطبی دائرہ محروطی کے مرتب دائرہ کو علی القوالم قطع کرتا ہے۔

$$\text{مثال ۵۔ ثابت کرو کہ محروطی میں } = \frac{لا}{وا} + \frac{ما}{بپ} - ۱ = .$$

ایسے مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جن کے ضلع 'مخروطی' سے $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ - ۱ = کو مس کریں اگر $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm ۱ = ۰$ ۔

ک س + س کا مینر

$$۰ = (۱ + ک) \left(\frac{۱}{ب} + \frac{ک}{ب} \right) \left(\frac{۱}{و} + \frac{ک}{و} \right)$$

۶۔ اس لیے $\Delta = \frac{۱}{و ب}$ ، $\Delta = \frac{۱}{و ب} (۱ + \frac{و}{و} + \frac{ب}{ب})$

$\Delta = \frac{۱}{و ب} (۱ + \frac{و}{و} + \frac{ب}{ب})$ ، $\Delta = \frac{۱}{و ب}$

(۲۲۷)

پس شرط $\Delta = ۰$ پوری ہوگی اگر

$$۰ = (۱ + \frac{و}{و} + \frac{ب}{ب}) \frac{۱}{و ب} - \frac{۱}{و ب}$$

یعنے اگر $\frac{۱}{و} + \frac{۱}{ب} + ۱ - ۱ - \frac{۱}{و ب} - \frac{۱}{و ب} - ۲ - \frac{۱}{و} - ۲ - \frac{۱}{ب} = ۰$

یعنے اگر $\frac{۱}{و} \pm \frac{۱}{ب} \pm ۱ = ۰$ [دیکھو صفحہ ۲۰۵]

۳۳۷۔ مخروطی س میں اور مخروطی س کے گرد کھینچے ہوئے

مثلث کے مرکز عمودی کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔

فرض کرو س = $۲ + لا + لا + ب + ا + گ + لا + ن + لا + ج = ۰$

اور $س = \frac{۱}{و} + \frac{۱}{ب} - ۱ = ۰$

فرض کرو کہ میں میں اور میں کے گرد کھینچے ہوئے مثلث کا مرکز عمودی (عہ' یہ) ہے۔ اب چونکہ مرکز عمودی مثلث کے قطبی دائرہ کا مرکز ہوتا ہے اس لیے میں میں اور میں کے گرد کھینچے ہوئے مثلث کو غہ کی کسی قیمت کے لیے دائرہ

$$ج = (لا - عہ) + (ما - بہ) - غہ^۲$$

کے لیے خود قطبی ہونا چاہئے۔

$$\begin{aligned} \text{پس } ک س + ج &= \text{کے مینز میں طہ} = . \\ \text{اور } ک م + ج &= \text{کے مینز میں طہ} = . \end{aligned}$$

اب ک س + ج کا مینز

ک + ۱	ک	ک گ - عہ
ک	ک ب + ۱	ک ف - بہ
ک گ - عہ	ک ف - بہ	ک ج + عہ + بہ - غہ^۲

ہے اور طہ = ۱ + عہ + عہ + بہ + بہ + گ + عہ + ف + بہ + ج - (ک + ب) - غہ^۲ = .

نیز ک س + ج کا مینز

ک + ۱	.	ک - عہ
ک	ک ب + ۱	ک - بہ
ک - عہ	ک - بہ	ک + عہ + بہ - غہ^۲

ہے اور طہ = ۱ + عہ + عہ + بہ - غہ^۲ - (ک - ب) = .

پس (عہ' یہ) نغز ملی

$$میں = (ک + ب) (لا + ما - ۱ - ب)$$

رشتہ (۲) کو اس واقعہ سے بھی معلوم کیا جاسکتا ہے کہ مخروطیوں کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کے تین زوجوں میں سے دو زوج منطبق ہوتے ہیں جبکہ مخروطی مس کرتے ہیں اور اس لیے کبھی

$$\Delta k^2 + \text{ط} k + \Delta = 0$$

کی دو اصلیں مساوی ہیں۔
پس ک کو اوپر کی مساوات اور مساوات

$$\Delta k^2 + 2\text{ط} k + \Delta = 0$$

سے ساقط کرنا ہے۔
پہلی مساوات کو ۳ سے اور دوسری کو ک سے ضرب دو اور تفریق کرو تو

$$\text{ط} k + \Delta = 0$$

$$\frac{1}{\text{ط} 2 - \Delta 6} = \frac{k}{\Delta 9 - \text{ط} 6} = \frac{k^2}{\text{ط} 2 - \Delta 6} \quad \text{پس}$$

$$\text{اور اس لیے } (\text{ط} 6 - \Delta 9) = (\text{ط} 3 - \Delta 6) (\text{ط} 3 - \Delta 6)$$

اب ان مخروطیوں کے نصف قطر انحاء

$$\frac{f}{1} = \text{غ} \quad \text{اور} \quad \frac{f}{2} = \text{غ}$$

ہیں۔ اور ممیز کی اصلیں

$$\frac{f}{1} = \text{غ} \quad \text{اور} \quad \frac{f}{2} = \text{غ}$$

ہیں۔ اس لیے مکرر اصل کو دوسری اصل کے ساتھ نسبت

$$\frac{f}{1} = \frac{f}{2}$$

ہے۔

اس طرح میں اور میں کے انحنائوں کی نسبت ان کے نقطہ تماس پر اس نسبت کے مساوی ہے جو کہ میں میں کے ممیز کی مکرر اصل کو دوسری اصل کے ساتھ ہے۔

۳۳۹۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک چار ضلعی کو ایک مخروطی میں اور دوسرے مخروطی کے گرد کھینچا جاسکے۔

فرض کرو کہ وتری مثلث کے حوالے سے چار ضلعی کے چار ضلع
 $ل = م \pm ن \pm ج = .$ یا $لا \pm ما \pm می = .$ ہیں۔

تب میں $= علا + و ما + ط می = .$ ان چار خطوں کو مس کرے گا اگر

$$\frac{1}{ع} + \frac{1}{و} + \frac{1}{ط} = . \dots \dots (۱)$$

ان خطوں کے نقاط تقاطع میں سے چار

ہیں۔ اس مخروطی کی عام مساوات جو ان چار نقطوں میں سے گذرنا

$$میں = - لا + ما + می + ل می = .$$

ہے۔

ک میں میں کا ممیز

$$\begin{vmatrix} ک & - & ل & و & + & ل \\ : & & & & & \\ ن & & & & & \\ ک & + & ط & + & ل & \end{vmatrix}$$

ہے۔ اس لیے $\Delta = 6\omega\tau - \omega\tau + 6\omega\tau - 2\omega\tau$ (۱)

$$\tau = 6 - \omega - \tau - \tau = \Delta - \tau = 1$$

$$\text{پس } \tau = 6 - \omega - \tau - \tau = \frac{6\omega\tau}{\tau} + \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{6\omega\tau}{\tau} + \frac{\Delta\tau}{\tau}$$

$$\Delta\tau + \Delta\tau - \tau = \Delta\tau = 0$$

اور یہ ٹھیک ابعاد کی مساوات ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مینز کی ایک اصل دوسری دو اصلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے کیونکہ ایک اصل $\frac{1}{2}$ ہے اور دوسری دو اصلیں

(۴۳۰)

$$\omega\tau + \tau = \omega\tau + \tau = 1 + \tau = 0 \text{ اور } \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثال ۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ چار ضلعیوں کو ایک دے ہوئے دائرہ کے اندر اور دوسرے دائرہ کے گرد کھینچا جاسکے۔

فرض کرو کہ دائرے

$$س = لا + ما - و = 0$$

$$مق = (لا - و) + ما - با = 0$$

ہیں۔ تب ک س + مق کے مینز یہ معلوم ہوگا کہ

ع، یہ، ج کو ملی الترتیب مس کرتے ہیں اور وہ سب س، اور س، کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔
اب ک س، + س، کے لیے مینز

ک ن - ۱ - لہ ن	ک م - ۱ - لہ م
ک ن - ۱ - لہ ن	ک ل - ۱ - لہ ل
ک م - ۱ - لہ م	ک ل - ۱ - لہ ل

ہے اور یہ معلوم ہو گا کہ

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \text{ لہ م ن} \\ \Delta - \Delta &= (2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن}) - 2 \text{ لہ م ن} \\ \Delta &= 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} - 2 \text{ لہ م ن} \\ \Delta - \Delta &= (2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن}) - 2 \text{ لہ م ن} \\ \Delta &= 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} - 2 \text{ لہ م ن} \\ \Delta &= 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} - 2 \text{ لہ م ن} \\ \Delta &= 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} - 2 \text{ لہ م ن} \\ \Delta &= 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} - 2 \text{ لہ م ن} \end{aligned}$$

پس $\Delta = 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} - 2 \text{ لہ م ن}$

اس لیے $2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} - 2 \text{ لہ م ن} = 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} + 2 \text{ لہ م ن} - 2 \text{ لہ م ن}$

اور یہ مطلوبہ شرط ہے۔

اب فرض کرو کہ مخروطی س، = معلوم ہے اور نیز لہ اور لہ کی قیمتیں بھی معلوم ہیں۔

تب اوپر کے رشتہ سے لیے معلوم کرنے کے لیے ایک دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے (یہ مساوات مفرد مساوات میں تحویل ہوگی اگر لم = لم)۔ اس لیے سب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کو ایک دیے ہوئے مخروطی میں کھینچا جائے اور مثلث کے دو ضلع علی الترتیب مخروطیوں میں اور میں کو مس کریں اور مخروطی میں، میں، میں سب کے سب چار مشترک نقطوں پر متقاطع ہوں تو مثلث کا تیسرا ضلع ان چار نقطوں میں سے گزرنے والے دو دوسرے ثابت مخروطیوں میں سے ایک کو مس کرے گا۔

یہ معلوم ہوگا کہ تیسرے ضلع کا لاف دو مخروطیوں پر مشتمل ہے کیونکہ اگر میں، کا وہ وتر ا ب جو میں کو مس کرتا ہے کھینچا جائے تو ب سے مخروطی میں سے دو مماس ہوں گے اور ج ا کے دو ممکن محل، نظام کے مختلف مخروطیوں کو مس کریں گے۔ لیکن اگر مثلث ا ب ج بغیر کسی اچانک تبدیلیوں کے ترتیب وار مختلف ممکن محل اختیار کرتا جائے تو تیسرا ضلع ہمیشہ ایک ثابت مخروطی کو مس کرے گا۔

اوپر کے مسئلہ کی توسیع متعدد ضلعوں کے کثیر ضلعی کی صورت پر کی جا سکتی ہے۔ مثلاً چار ضلعی ا ب ج د پر غور کرو جو ایسا ہے کہ نقطے ا، ب، ج، د مخروطی میں، پر ہیں اور اس لیے ا ب، میں کو مس کرتا ہے، ب ج، میں کو اور ج د، میں کو جہاں میں، میں، میں سب کے سب مخروطیوں کے ایسے نظام سے متعلق ہیں جو چار مشترک نقطوں پر متقاطع ہوئے ہیں۔

تب چونکہ ا ب اور ا ج، نظام کے مخروطیوں کو مس کرتے ہیں

اس لیے خط ۱ ج بھی نظام کے ایک محرومی کو مس کرے گا (حسب)۔
اب ۱ ج اور ج ۲ نظام کے محرومیوں کو مس کرتے ہیں اور اس لیے
۱ ج بھی نظام کے ایک محرومی کو مس کرے گا۔ اسی طرح متعدد ضلعوں
کے کسی کثیر ضلعی کی صورت میں ثابت کیا جاسکتا ہے۔

یہ تمام محرومی ہم محروم دائروں میں مطلق کیے جاسکتے ہیں اور اس طرح
پانچلٹ (Poncelet) کا مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔ [دیکھو دفعات
۳۰۱، ۳۰۲ اور تقلید کس صفحہ ۲۰۰ مصنفہ اسمتھ اور برانٹ]

ایک مخصوص صورت کے طور پر حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:
اگر ایک کثیر ضلعی کو ایک محرومی میں میں کھینچا جائے اور
اس کے تمام ضلع الا ایک کے ایک دوسرے محرومی میں کو مس
کریں تو بقیہ ضلع ایک تیسرے محرومی میں کو مس کرے گا جو
میں اور میں کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے اور اگر
بقیہ ضلع اپنے ایک محل میں میں کو مس کرے تو وہ تمام محلوں
میں میں کو مس کرے گا۔

اندرونی اور ماٹ کثیر ضلعیوں کا (Porism) ہے یعنی ایک
ایسے کثیر ضلعی کو ایک محرومی میں کھینچنے کا مسئلہ جس کے ضلع دوسرے
محرومی کو مس کریں بالعموم ناممکن ہے لیکن اگر کوئی ایسا کثیر ضلعی
موجود ہو تو ایسے کثیر ضلعی تعداد میں لامتناہی ہوں گے۔

پندرہویں باب پر مثالیں

۱۔ مثلثوں کی لائقناہی تعداد دائرہ $لا + ما = (۱ + ب)$ میں اور ناقص

$$\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ کے گرد کھینچی جاسکتی ہے۔}$$

۲۔ مثلثوں کی لائقناہی تعداد $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{ب} = ۱$ میں اور $لا + ما$

$$= \frac{۱ + ب}{ب} \text{ کے گرد کھینچی جاسکتی ہے۔}$$

۳۔ نصف قطر کا ایک دائرہ ایک مثلث میں جو $ما - ۲$ و $لا = ۰$ کے لیے خود قطبی ہے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریقی مقلنی $ما - ۲$ و $لا - ۲ = ۰$ ہے۔

۴۔ مثلثوں کی لائقناہی تعداد $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{ب} = ۱$ میں اور $\frac{لا}{۱}$ (۴۳۳)

$$+ \frac{۱}{(۱ - ب)} \text{ کے گرد کھینچی جاسکتی ہے۔}$$

۵۔ مثلثوں کی لائقناہی تعداد $ما - ۱$ و $لا + ۲$ و $لا + ما = ۰$ میں اور $ما - ۲$ و $لا = ۰$ کے گرد $لا$ اور $ما$ کی تمام قیمتوں کے لیے کھینچی جاسکتی ہے۔

۶۔ اگر دو مساوی دائروں کا مشترک وتر نصف قطر کے مساوی ہو تو اسے مثلثوں کی لائقناہی تعداد ایک دائرہ میں کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع دوسرے دائرہ کو مس کریں نیز مثلثوں کی لائقناہی تعداد کسی ایک دائرہ میں یا اس کے گرد کھینچی جاسکتی ہے جو دوسرے دائرہ کے لیے خود قطبی ہوں۔

۷۔ ثابت کرو کہ $\Delta ۱۲ = \Delta ۱۳$ ۔ میں ایسے مثلثوں کی لامتناہی تعداد
کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع $\Delta ۱۲ = \Delta ۱۳$ ۔ کو مس کریں۔
۸۔ وہ شرط کہ $\Delta ۱۲ = \Delta ۱۳$ ۔ کے دو نقاط تقاطع پر ہیں
کے ماس، ماس پر ہیں یہ ہے کہ

$$\Delta ۱۲ = \Delta ۱۳ \quad (\Delta ۱۲ - \Delta ۱۳)$$

۹۔ ثابت کرو کہ ایسے متساوی الاضلاع مثلثوں کے مرکروں کا

طریق جو $\Delta ۱۲ = \Delta ۱۳$ کے لیے خود قطبی ہوں

$$\Delta ۱۲ = \Delta ۱۳ \quad (\Delta ۱۲ - \Delta ۱۳) = (\Delta ۱۳ - \Delta ۱۲)$$

۱۰۔

اگر $\Delta ۱۲ = \Delta ۱۳$ تو ثابت کرو کہ ایک محرومی ایسا کھینچا

جاسکتا ہے جو محرومیوں میں $\Delta ۱۲ = \Delta ۱۳$ میں سے ہر ایک کے ساتھ
تیسرے رتبہ کا ماس رکھے۔

۱۱۔ اگر ایک مثلث کے دو ضلع محرومی میں کو مس کریں اور اس کے

اس محرومی میں پر ہوں تو تیسرے ضلع کا لغات محرومی $\Delta ۱۲ = \Delta ۱۳$ ہوگا۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ $\Delta ۱۲ = \Delta ۱۳$ میں ایسے مثلثوں کی

لامتناہی تعداد کھینچی جاسکتی ہے جن کے ضلع $\Delta ۱۲ = \Delta ۱۳$ کو مس کریں

اور نیز ثابت کرو کہ ایسے تمام مثلثوں کے عمودی مرکز دائرہ $\Delta ۱۲ = \Delta ۱۳$ پر ہیں۔

۱۳۔ اگر ایک مثلث کا مرکز عمودی جبکہ مثلث کو ایک مکانی میں

کھینچا گیا ہو مکانی کے مرتب پر ہو تو مثلث کا قطبی دائرہ ماسکے میں سے گزرے گا۔

۱۴۔ ایک مثلث کو ایک ثابت دائرہ میں اور ایک ثابت محرومی

کے گرد کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلث کا نو نقطی دائرہ دو ثابت دائروں کو

مس کرتا ہے۔
۱۵۔ مس میں ایسے مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جن کے ضلع مس کو مس
کریں، ثابت کرو کہ ان خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق جو مثلث کے اسوں کو
مقابل کے ضلعوں کے نقاط تماس سے ملاتے ہیں مخروطی
۳ ۵ مس - ۲ طہ مس = ۰

۱۶۔ اگر مس میں ایسے مثلث کھینچے جاسکیں جو مس کے لیے خود
قطبی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ مثلث جو مس کے ان تماسوں سے بنتے ہیں جو
راسوں پر کھینچے گئے ہیں مخروطی
۵ مس - طہ مس = ۰

کے اندرونی مثلث ہوں گے۔
۱۷۔ دو مخروطیوں مس، مس کا ایک مشترک نقطہ ڈ ہے اور
ا ب، ج علی الترتیب مس، مس کے ایسے وتر ہیں جو علی الترتیب
مس، مس کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) اگر ب پر مس کے تماس
بھی مس کو مس کریں تو مس میں ایسے مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو مس کے
مانط مثلث ہوں اور (۲) اگر ب ج، مس کو مس کرے تو مس میں ایسے
مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو مس کے لیے خود قطبی ہوں اور (۳) اگر
ب ج، مس اور مس دونوں کو مس کرے تو مس کے لحاظ سے مس کا
شکافی وہی مخروطی ہوگا جو مس کے لحاظ سے مس کا شکافی ہے۔

۱۸۔ مخروطی $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} - ۱ = ۰$ کے مانط متساوی الاضلاع

مثلثوں کے ہندسی مرکوزوں کا طریق

$$۹(لا + ما) - ۲(۵ + ۳)ب(۱ + ۳) - ۲(۵ + ۳)ب(۱ + ۳) - ۲(۵ + ۳)ب(۱ + ۳) = ۰$$

۱۹۔

۱۹۔ اگر مخروطی م کے لحاظ سے مخروطی م کا قطبی شکافی ف ہو اور م کے لحاظ سے م کا قطبی شکافی ف ہو تو ثابت کرو کہ ف میں ایسے مثلث کھینچے جاسکتے ہیں جو ف کے لیے خود قطبی ہوں اگر

$$\text{ط}^2 - \Delta^2 = (\Delta \Delta - \text{ط} \Delta) = 0$$

جہاں ک م + م = کا مینز $\text{ک}^2 + \Delta^2 + \text{ک}^2 + \text{ط}^2 + \Delta^2 = 0$ ہے۔
 ۲۰۔ ثابت کرو کہ وہ غیر موسیقی نسبتیں جو مخروطی م میں = کے کسی نقطہ پر م = اور م = کے نقاط تقاطع سے متعین ہوتی ہیں ک میں + م = کے مینز کی اصلوں کے فرقوں کی نسبتیں ہیں۔

۲۱۔ اگر دو مخروطی رشتہ

$$\Delta \Delta = \text{ط} \text{ط}$$

میں مربوط ہوں اور اگر ان کے دو نقاط تقاطع کو دوسرے دو نقاط تقاطع میں سے کسی ایک سے ملایا جائے تو ثابت کرو کہ اس نقطہ پر کے دو دوتروں اور دو ماسوں سے ایک موسیقی پسل بنے گی۔

۲۲۔ وہ ضروری شرط کہ ایک مخروطی م کو ایک مثلث میں جو م کے دو ماسوں اور ان کے وتر م سے بنتا ہے کھینچا جاسکے یہ ہے کہ

$$\text{ط}^2 = \Delta^2 - (\Delta \Delta - \text{ط} \Delta) = 0$$

۲۳۔ دو مخروطی م اور م پر متقاطع ہوتے ہیں۔ (۱) پر م کا م سے ج پر ملتا ہے اور (۲) پر م کا م سے ج پر ملتا ہے۔ ج مخروطیوں سے کمر ب ج پر ملتا ہے۔ اگر ب اور ج کے لحاظ سے ب ج موسیقی مزدوج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ط} \text{ط} + \Delta \Delta = 0$$

۲۴۔ ثابت کرو کہ ان غلوں کا لغاف جو مخروطیوں میں = اور م = کو موسیقی طور پر قطع کرتے ہیں مخروطی م = ہے اور م = کے لحاظ سے م = کا قطبی شکافی ک م + م = ہے جہاں

$$\text{ک} = \frac{1}{\text{ط}^2 - \Delta^2} (\Delta \Delta - \Delta \Delta)$$

(۴۳۵)

متفرق مثالیں

(۲۳۶)

۱۔ ثابت کرو کہ ایک ثابت دائرہ اور مستقل نصف قطر کے ایک متغیر دائرہ کا بنیادی محور ایک مکانی کو لف کرتا ہے جبکہ متغیر دائرہ کا مرکز ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر رہے۔

۲۔ ایک ثابت دائرہ کی مساوات

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$

ہے اور ایک دائرہ $x^2 + y^2 = 0$ اور $x^2 + y^2 = 0$ کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان دو دائروں کا بنیادی محور مکانیوں

$$(x \pm y)^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$

میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتا ہے۔

۳۔ اگر ایک مثلث ABC کو ایک مکانی میں کھینچا جائے

اور اس کے دو ضلع دیے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث ABC کے ہندسی مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ محرومی

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0 \text{ اور } x^2 + y^2 = 0$$

کے چاروں تراشے ہیں جن کے محاذی نقطہ $(0, 0)$ پر قائمہ زاویہ بنتا ہے اور نیز یہ وتر دائرہ $x^2 + y^2 = 0$ کو مس کرتے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ یہ چار خط ایک مربع بناتے ہیں۔

۵۔ اگر ایک مکانی کے نقطوں A, B, C کے عماد نقطہ

پر ہیں تو وہ خط جو A, B, C کے عمادوں سے بنے ہوئے

مثلث کے مرکز عمودی سے ملاتا ہے مکانی کے محور کے متوازی ہوگا۔

۶۔ اگر ایک مکانی کے نقطوں 'ف' 'ق' 'س' پر کے عماد ہم نقطہ ہوں تو اس مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی جو 'ف' 'ق' 'س' پر کے ماسوں سے بنے ایک ثابت مکانی پر ہوں گے۔

۷۔ ایک مخروطی کے مرتب دائرہ کے کسی نقطہ سے اس نقطہ کے قطبی (بلحاظ مخروطی) پر عمود کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ اس عمود کے پائین کا طریق ایک ہم ماسکی مخروطی ہے۔

۸۔ ایک خود قطبی مثلث کے راسوں سے دائرہ لا^۱، ما^۱۔ لا^۲ کے (۳۴) ماس کھینچے گئے ہیں جن کے طول ت^۱، ت^۲، ت^۳ ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) \quad ت^۱ ت^۲ ت^۳ + ۴ \Delta^۱ = ۰ \quad (۲) \quad ت^۱ ت^۲ + ت^۲ ت^۳ + ت^۳ ت^۱ = ۰$$

= ۴ جہاں Δ سے مثلث کا رقبہ تعبیر کیا گیا ہے۔

۹۔ 'ف' 'ق' 'س' پر ایک مثلث ہے جو ما^۱۔ لا^۱۔ لا^۲ کے لیے خود قطبی ہے اور 'ف' 'ق' 'س' میں سے گزرتے ہوئے قطر مقابل کے ضلعوں سے علی الترتیب 'ق' 'س' 'ف' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\Delta^۲ + ۱ \times ف \times ق \times ق = ۰$$

۱۰۔ اگر ایک مثلث کے راس (لا^۱، ما^۱)، (لا^۲، ما^۲)، (لا^۳، ما^۳) ہوں

اور مثلث لا^۱ + لا^۲ = ۱ کے لیے خود قطبی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\Delta^۲ + \frac{لا^۱}{۱} + \frac{ما^۱}{۱} - ۱) (1 - \frac{لا^۲}{۱} + \frac{ما^۲}{۱} - 1) (1 - \frac{لا^۳}{۱} + \frac{ما^۳}{۱} - 1) = ۰$$

۱۱۔ اگر ایک نقطہ و کے فاصلے تین تاہم خط نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' سے 'ع'، 'پ'، 'ج' ہوں تو و سے دائرہ 'ا' 'ب' 'ج' کے ماس و ت کا طول

۱۱	وت (۵ ا ب ج) +	۰	ع	۲	ج	۲	ب	۲	ا
		۰	ع	۲	ج	۲	ب	۲	ا
		۲	ج	۲	ب	۲	ا	۲	ا
		ج	۲	ب	۲	ا	۲	ا	۲

سے حاصل ہوگا۔

۱۲۔ اگر $\alpha - \beta = 1$ ۔ کے نقطوں 'ق' 'ف' 'ق' 'س' پر کے عماد نقطہ (عہ 'یہ) پر ملیں تو اس مثلث کا مائٹ دائرہ جو 'ق' 'س' پر کے ماسوں سے بنے مساوات

$$\alpha + \beta = 1 \quad (13) \quad \alpha + \beta = 1 \quad \alpha + \beta = 1$$

سے حاصل ہوگا۔ نیز دائرہ کا قطر اس فاصلہ کے مساوی ہوگا جو ماسکہ اور عمادوں کے نقطہ تقاطع کے درمیان ہے۔

۱۳۔ اگر ایک مثلث ایک مکانی کے لیے خود قطبی ہو تو اس کا مائٹ مرکز مرتب پر ہوگا۔

۱۴۔ اگر ایک مکانی کے نقطوں 'ق' 'ف' 'ق' 'س' پر کے عماد نقطہ ہوں تو اس مثلث کا نو نقطی دائرہ جو 'ق' 'س' پر کے ماسوں سے بنے مکانی کے راس میں سے گزرے گا۔

۱۵۔ ایک مکانی کے نقطوں 'ق' 'ف' 'ق' 'س' پر کے ماس مثلث 'ق' 'س' بناتے ہیں اور مثلثوں 'ق' 'س' اور 'ق' 'س' کے مرکز ہندسی 'گ' 'گ' ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر 'گ' کا طریق ایک خط مستقیم ہو تو 'گ' کا طریق ایک مکانی ہوگا اور یہ کہ اگر 'گ' کا طریق ایک خط مستقیم ہو تو 'گ' کا طریق ایک مکانی ہوگا۔

۱۶۔ ع سے جو ایک ناقص کے کسی نقطہ 'ف' پر کا مرکز انحصار ہے دودہ سرے عماد 'ق' 'ع' 'س' پر کیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ق' 'س' اور 'ف' پر کے عماد کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔

۱۷۔ اگر ایک ناقص کام مرکز ایک اندرونی مثلث کام مرکز عمودی ہو تو مثلث کے راسوں پر کے عماد ہم نقطہ ہوں گے۔

۱۸۔ مخروطیوں ۳ لا + ۲ لا + ۲ لا = ۰ اور ۴ لا + ۳ لا = ۰
کی مساواتیں ان کے مشترک خود قطبی مثلث کے حوالے سے معلوم کرو۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ مساواتوں

۱ لا + ۲ لا + ۲ لا = ۰ اور ۴ لا + ۳ لا = ۰
سے جہاں ت متغیر ہے ایک مکانی حاصل ہوتا ہے اور اس کے مرتب کی مساوات

$$۱ لا + ۲ لا = ۰ \text{ اور } ۴ لا + ۳ لا = ۰$$

۲۰۔

اگر ایک مخروطی دو دے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے اور دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے تو دے ہوئے نقطوں پر کے عماد ایک یا دو سرے ثابت خط مستقیم پر متقاطع ہوں گے۔

۲۱۔ اگر چار دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق ج = ۰ ہو تو اس نظام کے تمام مخروطیوں کے لیے ج پر کے کسی نقطہ کے قطبی متوازی خطوط مستقیم ہوں گے۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ کے لحاظ سے ان تمام مخروطیوں کے مکانی جو اس نقطہ میں سے گزریں اور جن کا دائرہ انحناء اس نقطہ پر وہی ہو مساوی مکانی ہیں۔

۲۳۔ اگر ۱ لا + ۲ لا = ۰ میں کھینچے ہوئے ایک مثلث کام مرکز ہندی ثابت نقطہ (ف، گ) پر ہو تو ثابت کرو کہ اس مثلث کے ضلع مکانی (۱ لا + ۲ لا) = ۰ اور ۱ لا + ۲ لا = ۰ میں کھینچا گیا ہے اور اس کا

۲۴۔ ایک مثلث کو لا + ۲ لا = ۰ میں کھینچا گیا ہے اور اس کا

مرکز عمودی نقطہ (د.) پر ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے ضلع ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں جس کے ماسکے مثلث کا حاطہ مرکز اور مرکز عمودی ہیں اور جس کا احاطہ دائرہ مثلث کا نو نقطہ (دائرہ ہے) (یہ دائرہ مثلث کے تمام ممکن محلوں کے لیے وہی ہے)۔

۲۵۔ اگر ایک مثلث کو ایک دائرہ میں اور ایک مکانی کے گرد کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے مرکز ہندسی کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مکانی کے محور پر عمود ہے۔

۲۶۔ ایک ناقص کے ان نیم قطروں کے مربعوں کا مجموعہ جو ایک اندرونی مثلث کے ضلعوں کے متوازی ہوں اور ناقص کے مرکز سے مثلث کے حاطہ دائرہ کے تماس کا مربع نیم محوروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتے ہیں۔ (۴۲۹)

۲۷۔ اگر دو مخروطی 'س'، 'س' چار نقطوں پر جو 'س' کے مزدوج قطروں کے سروں پر ہیں متقاطع ہوں تو چار مشترک تماس 'س' کو مزدوج قطروں کے سروں پر مس کریں گے۔

۲۸۔ اگر ایک مثلث کے دور اس ایک ناقص پر ہوں اور تین ضلع دے ہوئے خطوط مستقیم کے متوازی ہوں تو تیسرا اس ایک مخروطی مرسم کرے گا۔

۲۹۔ خط $لا + م + ا = ۰$ پر کسی نقطہ 'ف' سے قائم زائد $۲ لا - ج = ۰$ کے تماس 'ف'، 'ق'، 'ف' سے لینیے گئے ہیں اور دائرہ 'ف' 'ق' سے زائد کو مکرر نقطوں 'ق'، 'س' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ق' سے مکانی

$$(ل + م) (لا + ا) = (ل + لا + م + ا)$$

کو مس کرتے ہیں۔

۳۰۔ اگر ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{م}{ب} = ۱$ کے تماس 'ف'، 'ق'،

ہوں اور مثلث ت ف ق کا مرکز عمودی ناقص پر ہو تو ثابت کرو کہ
ت مخروطی

$$ا^۱ لا + ب^۱ ما = (ا^۱ + ب^۱)$$

پر ہوگا۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ اس مکانی کی مساوات جو چار خطوط

$$ولا \pm ب = ا، ا^۱ لا \pm ب = ا$$

کو مس کرتا ہے

$$(ا^۱ ب^۱ - ا^۱ ب^۱) ما = ا^۱ (ا - و) (ا - و) لا (ا^۱ ب^۱ - ا^۱ ب^۱) \\ + ب^۱ (ا - و) - ب^۱ (ا - و)$$

ہے۔

۳۲۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق جس کے محدود

$$لا = ا^۱ ت + ب^۱ ت + ج^۱ ت، ما = ا^۱ ت + ب^۱ ت + ج^۱ ت$$

سے حاصل ہوں جہاں ت ایک متغیر بدل ہے ایک مکانی ہوگا جس کا
وتر خاص

$$\frac{(ا^۱ ب^۱ - ا^۱ ب^۱)}{ا^۱ (ا^۱ + ب^۱)}$$

ہوگا۔

۳۳۔ ایک مثلث کو عہ بہ = جہ میں کھینچا گیا ہے اور اس کے
دو ضلع عہ + بہ = ک جہ کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا ضلع
(ک عہ - بہ) (ک بہ - عہ) = جہ

کو مس کرتا ہے۔

۳۴۔ ایک خط مستقیم پر تین ثابت نقطے و، و، و ہیں اور (۲۲۰)
ف ایک دیے ہوئے مخروطی پر کوئی نقطہ ہے۔ ف و مخروطی کو

مکروقی پر 'ق' و 'مخروطی' کو 'س' پر، اور 'س' و 'مخروطی' کو 'س' پر قطع کرتا ہے۔
ثابت کرو کہ 'ف' 'ن' 'س' 'ظ' و 'و' و 'و' پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے

گزرتا ہے۔
۳۵۔ ان قائم زائندوں کے مرکوزوں کا طریق جن کے محور $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ = ۱۔

کے محوروں کے متوازی ہیں اور جو ناقص کے ساتھ دوسرے رتبہ کا شاس
رکتے ہیں مساوات

$$\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)$$

سے حاصل ہوگا۔

۳۶۔ ان قائم زائندوں کے مرکوزوں کا طریق جن کے محور محدود کے

محوروں کے متوازی ہیں اور جو مکافی 'ما' - 'م' و 'لا' = کے ساتھ دوسرے
رتبہ کا شاس رکتے ہیں مساوات

$$\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)$$

سے حاصل ہوگا۔

۳۷۔ اگر ایک مخروطی کے لحاظ سے مزدوج نقطوں کے چار دیے

ہوئے زوج 'ف' اور 'ن'، 'ق' اور 'ق'، 'س' اور 'س'، 'س' اور 'س' ہوں تو ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۳۸۔ اگر ایک مخروطی کے لحاظ سے دیے ہوئے مزدوج نقطوں کے

چار زوج 'ل' اور 'ل'، 'م' اور 'م'، 'ن' اور 'ن'، 'ف' اور 'ف' ہوں تو ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک مخروطی ہے۔

۳۹۔ ایک مخروطی کے نقطہ 'ف' پر کا عماد محوروں کو نقطوں

'گ' پر قطع کرتا ہے اور 'گ' کا نقطہ وسطی 'و' ہے۔ ثابت کرو کہ

تین دیگر نقطوں 'ق'، 'س'، 'س' پر کے عماد و پیمیں گے۔ نیز ثابت کرو کہ

'ق'، 'س'، 'س'، 'س' مثلث کے راس ہیں جو ناقص میں اعظم رقبہ کا

۴۴۔ (ب ج د ع ف) ایک سدس ہے جو مخروطی میں
میں اور مخروطی میں کے گرد کھینچا گیا ہے۔ خطوط (ا و) ب و وغیرہ
جو کسی نقطہ و میں سے کھینچے گئے ہیں اس کو مرکز نقطوں (ا ب ج
د ع ف) پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ سدس (ا ب ج د ع ف) میں
ایک مخروطی کھینچا جاسکتا ہے۔

۴۵۔ ایک مخروطی کو ایک مثلث میں کھینچا گیا ہے یہ مخروطی
ایسا ہے کہ نقاط تماس پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ
اس کا مرکز ایک کعبی نخعی پر واقع ہے جو (ا ب ج) مرکز ہندسی گ
مرکز عمودی و نقاط (ا ± ا ± ا ± ا) نقطہ (ا ب ج) اور (ا و)
ب و ج و کے تقاطع وسطی میں سے گذرتا ہے۔

۴۶۔ ایک مخروطی (ا ب ج) میں سے گذرتا ہے اور (ا ب ج)
پر کے عماد ہم نقطہ ہیں۔ اگر یہ مخروطی متوازی خطوط مستقیم کا
ایک زوج نہ ہو تو ثابت کرو کہ اس کا مرکز ایک کعبی نخعی پر واقع ہے
جو (ا ب ج) میں سے گذرتا ہے اور نیز (ا ب ج) کے مرکز ہندسی
اور ان دائروں کے مرکروں میں سے گذرتا ہے جو (ا ب ج) کے ضلعوں
کو مس کرتے ہیں۔

۴۷۔ ایک ایسے دائرہ کے مرکز کے طریق کی مساوات معلوم
کرو جو تین دیے ہوئے دائروں کو مساوی زاویوں پر قطع کرے اور ثابت
کرو کہ یہ طریق ایک خط مستقیم ہے جو ان تین دائروں کے بنیادی مرکز
میں سے گذرتا ہے۔

۴۸۔ اگر ایک ناقص کے نقطوں (ف ق) مرا پر کے تماس
ایک نقطہ و پر جو ثابت نقطہ ف پر کے عماد پر سے طیں تو ثابت کرو کہ
مثلث کے مرکز ہندسی، مانٹ مرکز، اور مرکز عمودی کے طریق نقطہ و کے
مختلف محلوں کے لیے خطوط مستقیم ہیں۔

۴۹۔ اگر ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب} = ۱$ کا ایک وتر ف ق (۴۴۲)

ہم ماسکی ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب} = ۱$ کو مس کرے تو ف پر کا
ماس ق پر کے عماد سے ناقص

$$\frac{\frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب}}{۱} = \frac{\{ (ب + لا) (ب - لا) \}}{\{ (ب + لا) (ب - لا) \}}$$

پر ملے گا۔

۵۰۔ ایک ناقص کے چار نقطوں ا، ب، ج، د پر کے
عماد ایک نقطہ ف پر ملتے ہیں اور دائروں ب ج د، ج د ا،
د ا ب، ا ب ج کے مرکز ا، ب، ج، د ہیں۔ ثابت کرو کہ
ا، ب، ج، د میں سے گزرنے والے وہ خط جو ا، ب، ج، د
پر کے عمادوں کے متوازی ہیں ف میں سے گزرنے والے قطر پر ایک
نقطہ پر ملیں گے۔

۵۱۔ اگر قائم زائد لا ما۔ د کے وتر ف ق کا وسطی نقطہ
(لا، ما) ہو تو وتر ف ق اور ف ق پر کے ماس مساوی

$$۲ = \frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب}$$

کو مس کریں گے۔

۵۲۔ اگر مثلث ا ب ج کے راس (لا، ما)، (لا، با)، (لا، جا)

ہوں اور مثلث ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب} = ۱$ کے لیے خود قطبی ہو تو
نقطہ ا، ب، ج قائم زائد

$$\frac{\text{لا لا لا لا لا}}{\text{لا لا لا لا لا}} + \frac{\text{لا لا لا لا لا}}{\text{لا لا لا لا لا}} = 1$$

پر ہوں گے اور خلیج ب ج ج ' ا ' ب ' مکانی

$$\frac{1}{\text{لا لا لا لا لا}} + \frac{1}{\text{لا لا لا لا لا}} = 1$$

کو مس کریں گے۔

۵۳۔ اگر مثلث ا ب ج ایک ناقص کے لیے خود قطبی ہو تو ان مقطوعوں کے وسطی نقطے جو ناقص کے محوروں سے خطوط ب ج ج ' ا ' ب پر قطع ہوتے ہیں ہم خط ہوں گے اور ان مقطوعوں کو قطران کران پر بھیجے ہوئے دائرے ہم متحد ہوں گے۔

۵۴۔ ثابت کرو کہ کسی تین مخروطیوں کے نقاط تقاطع میں سے جبکہ انہیں دو دو کر کے لیا گیا ہو تین قائم زاؤں کھینچے جاسکتے ہیں اور یہ تین قائم زاؤں چار مشترک نقطے رکھتے ہیں۔

۵۵۔ اگر مثلث ا ب ج میں کھینچے ہوئے کسی دو مخروطیوں کے ماسکے ف ' ف ' اور ق ' ق ' ہوں تو ق ' ق ' ف ' ف ' سے ایک دو مخروطی کو جو ا ب ج میں کھینچا گیا ہو مس کریں گے۔

۵۶۔ ایک خط مستقیم دو دے ہوئے مخروطیوں میں ' م ' کو علی الترتیب نقطوں ف ' ق ' اور ف ' ق ' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ' ق ' پر کے ماس ف ' ق ' پر کے ماسوں سے ایک ایسے مخروطی پر ملے ہیں جو م ' اور م ' کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

۵۷۔ ایک مخروطی تین دے ہوئے نقطوں ' ا ' ب ' ج میں سے گذرتا ہے اور اس کا ایک متقارب ایک ثابت سمت میں ہے۔

ثابت کرو کہ دو سر امتقارب ایک ثابت مکانی کو جو مثلث (بج) کے ضلعوں کو مس کرتا ہے مس کرے گا اور اس کا مخروطی ہونی سمت میں ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ مخروطی کے مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔

۵۸۔ ایک دائرے ہوئے مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی میں سے دو دو کو تین خطوط مستقیم سے ملا یا گیا ہے۔ کسی مخروطی کے لحاظ سے جو مثلث میں کھینچا گیا ہے ان خطوط مستقیم کے قطب لیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان قطبوں سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ مستقل ہے۔

۵۹۔ ناقص $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ کے نقطوں عہ 'بہ' 'جہ' پر کے عمادوں سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{1}{p} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \frac{1}{q} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) \frac{1}{r}$$

ہوگا۔

۶۰۔ اگر $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ کے نقطوں 'ف' 'ق' 'س' پر کے عماد

ناقص پر نقطہ (لا، با) پر ملیں تو دائرہ 'ف' 'ق' 'س' کی مساوات

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

ہوگی۔

۶۱۔ اگر $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ زجم طہ کے نقطوں عہ 'بہ' 'جہ' 'ضہ' پر کے

عماد ہم نقطہ ہوں تو

$$\frac{1}{a} \frac{1}{b} \frac{1}{c} = \frac{1}{a} \frac{1}{b} \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \frac{1}{c} \frac{1}{r} + \frac{1}{b} \frac{1}{c} \frac{1}{r} + \frac{1}{a} \frac{1}{b} \frac{1}{r} = \frac{1}{a} \frac{1}{b} \frac{1}{c} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{a} \frac{1}{b} \frac{1}{c} \frac{4}{r}$$

۶۲۔ ایک مخروطی جوتین دے ہوئے نقطوں میں سے کھینچا گیا ہے ایک دے ہوئے مخروطی کو نقطوں 'ف' 'ق' 'س' پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ 'ف' 'ق' ایک دے ہوئے نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'س' میں ایک مخروطی کو لف کرتا ہے۔

۶۳۔ ایک دے ہوئے مخروطی پر دو ثابت نقطے 'ف' 'ق' لیے گئے ہیں اور ایک ثابت خط مستقیم پر 'س' کوئی نقطہ ہے۔ خطوط 'ف' 'س' 'ق' 'س' مخروطی کو مکرر 'ف' 'ق' پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' ایک مخروطی کو لف کرتا ہے۔

۶۴۔ ایک دے ہوئے نقطہ 'ف' سے ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک دے ہوئے نظام کے کسی مخروطی کے 'ماس' کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جو 'ف' اور ان دو نقاط 'ماس' میں سے گذرتا ہے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۶۵۔ اگر کسی نقطہ سے ایک ناقص کے 'ماس' 'ت' 'ف' 'ق' کھینچے جائیں تو وتر 'ف' 'ق' اور 'ف' 'ق' پر کے عماد ایک مکانی کو جو ناقص کے محوروں کو مس کرتا ہے 'س' کرینگے۔ (۴۴۴)

۶۶۔ ایک دے ہوئے ناقص کے نقطہ 'ف' پر کے 'ماس' پر مرکز سے عمود کھینچا گیا ہے جس کا پائین 'ما' ہے اور 'ما' کو ماس کے قرار دیکر ایک مکانی کھینچا گیا ہے جو ناقص کے محوروں کو مس کرتا ہے۔ اگر 'ف' اور 'ما' میں سے گذرتا ہو کوئی دائرہ کھینچا جائے جو ناقص کو 'ق' 'س' میں پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ مثلث 'ق' 'س' 'س' کے ضلع مکانی کو مس کرینگے اور 'ق' 'س' 'س' پر کے عماد اس عماد پر متقاطع ہوں گے جو 'ف' میں سے گذرتا ہے قطر کے دوسرے سرے پر کھینچا گیا ہو۔

۶۷۔ اگر ایک دائرہ پر چار نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ہوں اور دائرہ کا مرکز ہو تو 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں سے گذرنے والے مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق 'اسی نظام کے مخروطیوں کے (و سے کھینچے ہوئے) عمادوں کے

پائینوں کا طریق بھی ہوگا۔

۶۸۔ مثلث ا ب ج کے تین باہری دائروں کے مرکز و 'و' ہیں اور متناظر ضلعوں کے نقاط وسطی 'د'، 'ع'، 'ف' ہیں۔ ثابت کرو کہ 'و'، 'د'، 'و'، 'ع'، 'و'، 'ف' ایک نقطہ 'ن' پر ملتے ہیں۔ نیز اگر وہ خطوط جو 'ا'، 'ب'، 'ج' کو متقابل کے ضلعوں کے نقاط تماس سے ملاتے ہیں نقطہ 'ق' پر ملیں تو ثابت کرو کہ 'ف'، 'ق'، 'ن' مثلث کے مرکز ہندسی میں سے گزرے گا۔

۶۹۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے ماسکوں کا طریق جو

$$ل \pm لا \pm م \pm ما \pm ن \pm می =$$

کو مس کرتے ہیں

	لا	لا	لا	(ما + ی)
۰ =	ب	ما	(ی + لا)	ما
	ج	(لا + ما)	ی	ی
	ن	م	ل	ل

۶۰۔

ایک ناقص کے کوئی دو قطر جو ایک دوسرے کے علی القوام ہیں ایک ثابت نقطہ 'ن' پر کے تماس سے نقطوں 'ق'، 'م' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ق' اور 'م' میں سے گزرنے والے دوسرے دو تماس ایک ثابت خط مستقیم پر جو ناقص اور 'ن' پر کے دائرہ انحناء کے مشترک وتر کے متوازی ہے اشتقاق ہوتے ہیں۔

۶۱۔ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' چار دائری نقطے ہوں تو 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' میں سے گزرنے والے دو مسکافیوں کے محور 'ف'، 'ق' کے نقطہ تقاطع پر علی القوام متقاطع ہوں گے جہاں 'ا'، 'ب' اور 'ج' دکا

نقطہ تقاطع 'ف'، 'ج' اور 'ب' د کا ق'، 'د' اور 'ب' ج کا س' ہے۔

۷۲۔ اگر نقطے ('ف'، 'گ'، 'س' +) دائری ہوں تو ان نقطوں کا مرکز ہندسی نقطہ دائرہ پر ہوگا۔

(۲۲۵)

۷۳۔ ایک مثلث کے تین عمودوں 'د'، 'ب'، 'ج' 'ف' پر تین نقطے 'ف'، 'ق'، 'س' ایسے لیے گئے ہیں کہ

ا ف : ا د = ب ق : ب ع = ج س : ج ف = لہ : ل ا :
اور 'ف'، 'ق'، 'س' سے نا متناظر ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے چھ پایمن ایک دائرہ پر واقع ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ (۱) لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے دائروں کا لفاف ایک مخروطی ہے جو محافظ دائرہ کے ساتھ دو ہر اتنا مس رکھتا ہے، اور (۲) دائروں کے مرکز و کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۷۴۔ ثابت کرو کہ $\overline{ال} + \overline{ام} + \overline{ان} = ۰$ کا نصف

قطر انحناء اُس نقطہ پر جہاں وہ ع = ۰ کو مس کرتا ہے

$$\frac{۵۱۶ م ن س}{(ج م + ب ن) ۳}$$

ہے۔

۷۵۔ اگر دو ہم ماسکی مخروطی ایسے ہوں کہ ایک میں ایسے مثلث کھینچے جاسکیں جن کے ضلع دوسرے کو مس کریں تو مثلث کا گیر مستقل ہوگا۔

۷۶۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کا اندرونی دائرہ اور نو نقطی دائرہ ایک دوسرے کو اُس قائم زائد کے مرکز پر مس کرتے ہیں جو مثلث کو محافظ کرتا ہے اور اندرونی مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۷۷۔ ایک مثلث

$$لا + لا - لا = ۰$$

کو حاطط کرتا ہے اور اس کا مرکز عمودی نقطہ (۱، ۰) پر ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث کا اس مخروطی

$$لا(۱-د) + ۲(۱+د)لا + ۲(۱-د)لا = ۲(۱-د)لا$$

بد واقع ہے۔

$$۸۔ \frac{لا}{۱} + \frac{لا}{۱} = ۱ \text{ میں مثلث کھینچے گئے ہیں جنکے}$$

مرکز ہندسی نقطہ (۳، ۳) پر ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے ضلع مخروطی

$$\frac{لا}{۱} + \frac{لا}{۱} (۱ - \frac{ک}{۳} + \frac{ک}{۳}) + \frac{ک}{۳} (۱ - \frac{ک}{۳} + \frac{ک}{۳}) - \frac{ک}{۳} (۱ - \frac{ک}{۳} + \frac{ک}{۳}) = ۰$$

کو مس کرتے ہیں۔

$$۹۔ \text{ایک مثلث } \frac{لا}{۱} + \frac{لا}{۱} - ۱ = ۰ \text{ کو حاطط کرتا ہے (۳۴۶)}$$

اور اس کا مرکز ہندسی نقطہ (۱، ۱) پر ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے اس مخروطی

$$۴ = \frac{لا}{۱} (۱ - \frac{ک}{۳} + \frac{ک}{۳}) + \frac{ک}{۳} (۱ - \frac{ک}{۳} + \frac{ک}{۳}) + \frac{ک}{۳} (۱ - \frac{ک}{۳} + \frac{ک}{۳})$$

پر ہیں۔

۸۰۔ ایک مثلث کو ایک مکافی میں اور ایک مخروطی کے گرد کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز ہندسی کا طریق عام طور پر ایک مکافی ہوگا، لیکن یہ طریق ایک خط مستقیم ہوگا اگر دیا، ہو مخروطی ایک

مکافی ہو۔

۸۱۔ مخروطی ایسے چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں کہ ان میں سے دو کو ملانے والا خط دوسرے دو کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے متقاربوں کا لفظ ایک مکافی ہے۔

۸۲۔ مخروطی ایسے چار دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرتے ہیں کہ ان میں سے دو کو ملانے والا خط دوسرے کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے محور ایک مکافی کو لف کرتے ہیں۔

۸۳۔ اگر ایک چار ضلعی کے ضلع ایک دائرہ کو مس کریں تو ان مخروطیوں کے محور جو اس چار ضلعی میں کھینچے جائیں ایک مکافی کو لف کریں گے۔

۸۴۔ اگر مثلث ΔBJC کو مخروطی $\frac{LA}{P} + \frac{MA}{P} - 1 = 0$ ۔

میں کھینچا جائے اور ضلع $B'C$ ، BC ، ΔBJC ، مخروطی $\frac{LA}{P} + \frac{MA}{P} - 1 = 0$ ۔ کو نقطوں A ، B ، C پر مس کریں تو A ، B ، C اور J ، مخروطی

$\Delta^2 (B+B') \frac{LA}{P} + B'^2 (1+1) \frac{MA}{P} - (AB-AB') = 0$ ۔
پر ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۸۵۔ مثلث ΔBJC کو مخروطی

$$\frac{LA}{P} + \frac{MA}{P} - 1 = 0$$

میں کھینچا گیا ہے اور ضلع $B'C$ ، BC ، ΔBJC اور ΔBJC ، مخروطی

$\frac{لا^۲}{ب} + \frac{ما^۲}{ب} = ۱$ ۔ کو (ب، ج پر مس کرتے ہیں۔ حسب ذیل
مسطح ثابت کرو:

(۱) (ب، ج پر کے عماد مخروطی

$$لا^۲ + با^۲ = ما^۲ = (ا - ب)^۲$$

پر ایک نقطہ میں ملیں گے۔

(۲) (ب، ج پر کے عماد مخروطی

$$\frac{لا^۲}{ب} + \frac{با^۲}{ب} = (ا - ب)^۲$$

پر ایک نقطہ میں ملیں گے۔

(۳) (ب، ج کا مرکز عمودی مخروطی

$$لا^۲ + با^۲ = ما^۲ = (ا - ب)^۲$$

پر ہوگا۔

(۴) مثلث (ب، ج کا مائٹ مرکز مخروطی

$$لا^۲ + با^۲ + ما^۲ = (ا - ب)^۲ = (ا - ب)^۲$$

پر ہوگا۔

۸۶۔ اگر چار ضلعیوں کی لامتناہی تعداد مخروطی میں اور
مخروطی میں کے گرد گھمینی جاسکے تو ثابت کرو کہ مثلثوں کی لامتناہی تعداد
میں اور میں کے گرد گھمینی جاسکتی ہے جہاں میں کے لحاظ سے
میں کا قطبی نکالی میں ہے۔

۸۷۔ اگر تین مخروطی ایک نقطہ میں سے گزریں تو اس خط کا
نقاط ایک مخروطی ہوگا جو ان مخروطیوں کو نقطوں کے تین زوجوں میں

جو درتج میں ہیں قطع کرتا ہے۔

۸۸۔ تین مخروطیوں میں، س، س، س میں نقطہ و مشترک ہے۔ س، اور س، کے بقیہ نقاط تقاطع 'ا' ب، ج، ہیں، س، اور س، کے 'ل' م، 'ن' ہیں، اور س، اور س، کے 'ف'، 'ق'، 'س' ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثوں 'ا' ب ج، 'ف' ق، 'ل' م، 'ن' کے نواح ایک ہی مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۸۹۔ ثابت کرو کہ اگر مخروطیوں میں $\cdot = \text{مئی}$ ، $\cdot = \text{مئی}$ میں مشترک وترعم $\cdot = \text{بہ}$ ، $\cdot = \text{ایسے ہوں کہ میں}$ ۔ $\text{مئی} = \text{عہ}$ بہ تو مسادات ک^۱عہ^۲۔ ۲ک (میں + میں) + بہ^۳ = ایک ایسے مخروطی کو تعبیر کرے گی جو میں اور میں میں سے ہر ایک کے ساتھ دو ہر تاس کھیلا۔ ایک مخروطی مخروطیوں

$$= (c+u)^r z^{-r} + u^r = (c+u)^r z^{-r} + u^r$$

میں سے ہر ایک کے ساتھ محدود دوہراتما رکھتا ہے۔ اس کی عام مساوات لکھو اور ثابت کرو کہ تما کے وتر مبدا میں سے گذرتے ہوئے عمودی وتر ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اگر $z^1 + z^2 = 1$ تو ایسے تمام مخروطی قائم زائید ہیں۔

۹۰۔ ثابت کرو کہ مخروطیوں میں $\frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi = 0$ ۔

میں \equiv لا - \equiv ب م = ' اور میں \equiv لا م + \equiv ب = میں
ایسا رشتہ ہے کہ مثلثوں کی لامتناہی تعداد ایک میں گھنٹی جاسکتی ہے، دوسرے
کے حاطہ کی جاسکتی ہے، اور دوسرے کے لئے خود قطبی ہے۔ نیز ثابت
کرو کہ ان میں سے کسی ایک مخروطی کا ماس دوسرے دو مخروطیوں سے
موسیقی طور پر قطع ہوتا ہے، اور وہ ماس جو ایک مخروطی کے کسی نقطہ سے

دوسرے دو مخروطیوں کے گئے ہوں ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۹۱۔ ثابت کرو کہ مخروطی

(۴۴۸) $s = e - 2$ لہذا $e = 0$ کس $e = 2 - 2 = 0$ ۔

س $e = 2$ لہذا $e = 0$ کس $e = 2 - 2 = 0$ ۔
 یہ رشتہ $l = m + n = 1$ کے اس طرح مربوط ہیں کہ ان کو خواہ کسی ترتیب میں لیا جائے مثلثوں کی لامتناہی تعداد ایک مخروطی میں کھینچی جاسکتی ہے، دوسرے کے حاطط کیا جاسکتی ہے اور تیسرے کے لیے خود قطبی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ان میں سے کسی ایک مخروطی کا ماس دوسرے دو مخروطیوں سے موسیقی طور پر قطع ہوتا ہے اور وہ ماس جو ایک مخروطی کے کسی نقطہ سے دوسرے دو مخروطیوں کے کھینچے گئے ہوں ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۹۲۔ اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو $\frac{l}{a} + \frac{b}{b} = 1$ کے

ان ماسوں کو جو وتر

ل $l = m + n = 1$ کے سروں پر کھینچے گئے ہیں مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مخروطی اور دائرہ کے تقاطع کے وتروں میں سے وہ وتر جو ماس کے وتروں کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے خط

لاجم $e +$ ماجب $e = 0$

کے متوازی ہو تو ماسوں کا نقطہ تقاطع مخروطی

$$\frac{l}{a} - \frac{b}{b} = \frac{a}{a} - \frac{b}{b} = 0$$

پر ہو گا جو ایک قائم زاؤ دے ہوئے ناقص کے ہم ماسکی ہے۔

۹۳۔ ثابت کرو کہ $(ا'ب'ج'ن'گ'م)(لا')$ کے نقطہ $(لا'با)$ پر قریب ترین تماس کے مکانی کی مساوات
 $\Delta س + ج ت =$

سے یا

$$\begin{vmatrix} لا & ما & ا \\ لا & با & ا \\ گ & ف & ج \end{vmatrix} - \Delta ت =$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

۹۴۔ اگر ایک محرومی جس کو ایک مثلث میں کھینچا گیا ہو حائط دائرہ کے مرکز میں سے گزرے تو محرومی کا مرتب دائرہ مثلث کے حائط دائرہ کو مس کرے گا۔

۹۵۔ ثابت کرو کہ اگر ایک محرومی کو ایک مثلث میں کھینچا جائے اور محرومی کا مرتب دائرہ مثلث کے حائط دائرہ کو مس کرے تو وہ نقطہ دائرہ کو بھی مس کرے گا۔

۹۶۔ ثابت کرو کہ ہم ماسکی محرومیوں کے چار زوج ایسے ہوتے ہیں کہ ہر زوج کا ایک محرومی ایک دے ہوئے مثلث میں اور دوسرا اس مثلث کے گرد کھینچا جاسکتا ہے۔

۹۷۔ تین دے ہوئے نقطوں $(ا'ب'ج)$ سے ایک دے

(۴۴۹)

ہوئے دائرہ مس کے تماس $(ا'ف'ب'ق'ج)$ میں۔
 ثابت کرو کہ (۱) اگر تین مستطیلوں $ب ج \times (ا'ف'ج)$ $ا ب \times ج$ میں سے ایک دوسرے دو کے مجموعہ سے بڑا

ہو تو دائرہ (ب ج دائرہ) میں کو قطع کرے گا (۲) اگر ان میں سے ایک مستطیل دوسرے دو کے مجموعہ کے مساوی ہو تو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں گے۔ اور (۳) اگر ان میں سے مستطیل دوسرے دو کے مجموعہ سے کم ہو تو دائروں میں کوئی نقطہ مشترک نہیں ہوں گے۔

۹۸۔ ایک چار ضلعی کو

مس = ۱ع + ۲ب + ۲ج ج = ۰.

میں کہینچا گیا ہے اور اس کے تین ضلع

سے = ع + د + ط جہاں =

کو مس کرتے ہیں، ثابت کرو کہ چوتھا ضلع

$$= \dots + \frac{1}{b} \left[\frac{2}{b} r - \frac{1}{r} r - \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \right]$$

کو مس کرتا ہے۔

۹۹۔ ایک نقطہ سے مخروطیوں سے $\frac{1}{2}$ ماس کے ماس کہنے گئے ہیں جو مستقل چلیبی نسبت $\frac{1}{2}$ کی ایک پٹیل بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق

$$\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 \dots \Delta_n = \left(\frac{1-l}{1+l} \right)^n \Delta_1 = \dots$$

-4-

۱۰۔ ایک دے ہوئے مخروطی کی مسادات $\epsilon = 0$ ہے۔
ثابت کرو کہ اس مخروطی کی عام مسادات جو نقطوں $\epsilon = 0$ پر
اور $\epsilon = 0$ میں سے گزرتا ہے اور جو دے ہوئے مخروطی کو

نقطہ ف پر مس کرتا ہے اور جس کا نصف قطر انحناء نقطہ ف پر
دئے ہوئے محرومی کے انحناء (اسی نقطہ ف پر) کا گنا ہے جب
ذیل ہے:

ل (عہ بہ - جہ^۲) + (ک - ا) جہ (عہ - ۲ ل جہ + ل^۲ بہ) =
نیز ثابت کرو کہ دوسرے مشترک ماسوں کے نقطے تقاطع کا
طریق

$$عہ بہ = \left(\frac{ک - ا}{۱ + ل} \right) جہ^۲$$

ہے۔

پیشگی



فہرست اصطلاحات

محرومی تراشیں

انگریزی	اردو	انگریزی	اردو
A		Co-axial circles	ہم محور دائرے
Anharmonic ratio	غیر مستقیم یا	Collinear	ہم خط
or cross ratio	چلیبی نسبتیں	Complement	تکمیل
Areal co-ordinates	رقبہ مختد	Concyclic points	ہم دائری نقطے
Asymptote	متقابل	Confocal conic	ہم فوکی محرومی
Auxiliary circle	امدادی دائرہ	Confocals	ہم فوکی
Auxiliary conic	امدادی محرومی	Conics	محرومی
Axes	محاور (واحد - محور)	Conjugate axis	مزدوج محور
C		Conoidal surface	محرومی مناسطح
Cartesian co-ordinates	کارٹیزی مختد	Co-normal points	ہم عادی نقطے
Centre locus	مرکز طریق	Co-ordinate	مختد
Centroid	مرکز ہندی	Corresponding chords	اطیری نقطے - متناظر نقطے
Circumcentre	حائط مرکز	D	
Circumscribing conic	حائط محرومی	Degree	درجہ
Class	جامعت	Diagonal point	قطری نقطہ

انگریزی	اردو	انگریزی	اردو
Director circle	مربع دائرہ	Homogeneous equation	متجانس مساوات
Directrix	مربع (جمع - مرتبات)	Homographic	ہم رسم
Discriminant	ممیز	Hyperbola	تخلع زائید
Double points or foci	دوہرے نقطے یا اس کے	I	
E		In-centre	اندرونی مرکز
Eccentric angle	نایج المکرز زاویہ	Inscribed conic	اندرونی محرومی
Eccentricity	خروج المکرز	Invariants	غیر متغیر
Ellipse	تخلع ناقص	Involution	دریغ
Envelope	لٹاف	L	
Equi-conjugate diameters	مساوی مزدوج اقطار	Latus-rectum	دائرہ خاص
F		Limiting points	انتہائی نقطے
Foci	اسے	Linear dimensions	خطی ابعاد
Fociod	اس کے	Locus	طریق
G		M	
Generating line	تکوینی خط	Major axis	محور بظلم
Generator	تکون	Minor axis	محور اصغر
H		N	
Harmonically conjugate	موتقی طور پر مزدوج	Normal	عماد
Harmonic progression	سلسلہ موتقی	O	
		Oblique axis	ائل محور

انگریزی	اردو	انگریزی	اردو
Origin	مبدأ	Reciprocation	مکافات
Orthogonal circles	علی القوائم دائرے	Rectangular hyperbola	قائم زائد
Osculating curve	لمشی منحنی	Re-entrant	متداخل
P		S	
Parabola	قطع مکانی	Scalar quantities	میزانی مقادیر
Pencil	پنسل	Self-Polar triangle	خود قطبی مثلث
Polar	قطبی	Semi latus-rectum	نیم وتر خاص
Polar co-ordinates	قطبی محدد	T	
Polarity	قطبیت	Tangential equation	ماسی مساوات
Projection	تظیل - اظلال	Transverse axis	قاطع محور
Projective property	ظاتی خواص	Triad	ثلاثیہ
Q		Trilinear co-ordinates	تثلی محدد
Quadrants	ربعات	V	
R		Vertex	راس
Radical axis	بنیادی محور	Vectorial angle	سمتی زاویہ
Radius of curvature	نصف قطر انحنا		
Radius vector	سمتی نصف قطر		
Range	سعت		
Reciprocal polar	متکافی قطبی		

اغلاطانا

محرومی تراشیں

صحیح	غلط	نقطہ	نقطہ	صحیح	غلط	نقطہ	نقطہ
قائم	قائم	۹	۳۸۷	(لا، با)	(لا، با)	۸	۱۰
لا	لا	۶	۳۸۸	(لا، با)	(لا، با)	۶	۱۱
دیے	دے	۱۳	۳۹۰	سا	با	۶	۱۶
ایک	ایک	۱۵	۳۹۲	گھڑی	کھڑی	۱۳	۱۸
ن ب	ن ب	۱۶	۴۰۱	محوروں	محوروں	۴	۲۳
مبادل	ل	۱۶	۴۰۳	$\frac{لا-لا}{لا-لا}$	$\frac{لا-لا}{لا-لا}$	۲۶	آخری سطر
مرکز	مراکز	۱۰	۴۰۹	$\frac{لا-لا}{لا-لا}$	$\frac{لا-لا}{لا-لا}$	۶	۳۳
=	=	۳	۴۲۸	(۶، ۳-)	(۶، ۳)	۱۳	۳۸
وہی	رہی	۱۳	۴۳۴	مسئلہ اخذ	مسئلہ اخذ	۱۷	۱۴۱
(عہ + بہ + جہ)	(عہ + بہ + جہ)	۲	۴۳۸	مسئلہ	مسئلہ	۶	۱۴۳
ہے	جہ	۱۷	۴۴۰	$\frac{ک}{م}$	$\frac{ک}{م}$	۱۵	۱۶۲
نقطوں	نقطوں	۲۳	۴۴۱	$\frac{ک}{م}$	$\frac{ک}{م}$	۵	۱۹۱
و	و	۲۰	۵۴۶	$\frac{ک}{ج}$	$\frac{ک}{ج}$		

صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط
لفاف	لفاف	۱۰	۵۹۷	مساوت	مساوت	۸	۵۵۰
لا اتمناہی	لا اتمہا	۲	۶۱۰	=	=	۱۱	۵۵۲
د	و	۹	۶۲۳	الحاور زائد	الحاور زائد	۱۹	۵۵۵
متکافی	تفکافی	۵	۶۱۹	ہوگا۔	ہے۔	۱۸	۵۶۱
		۱۸	۶۳۵	محور	محور	۲۲	۵۶۶
				تظلیل	تظیل	۱۵	۵۷۸

Rare **DUE DATE**

Cl. No. 516.22

Acc. No. 16422

16877

Late Fine Ordinary books 25 p. per day, Text Book
Re 1 per day, Over night book Re 1 per day.

--	--	--	--

